

# 1 Ogrevalne naloge iz teorije grafov

Pri vseh nalogah obravnavamo le *enostavne grafe*.

**1.1.** Naj bo  $G$  nek graf reda  $n$ . Pokaži neenakost

$$\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n.$$

**1.2.** Naj bo  $G$  graf z  $n$  vozlišči in več kot  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  povezavami. Pokaži, da je tedaj  $G$  povezan.

**1.3.** Naj bo  $G$  nek  $r$ -regularen graf ožine  $2k + 1$ . Pokaži, da velja naslednja zgornja meja za število vozlišč grafa  $G$

$$|V(G)| \geq 1 + r + r(r - 1) + \dots + r(r - 1)^{k-1}. \quad (1)$$

**1.4.** Pokaži, da če za nek graf velja  $\text{diam}(G) \geq 3$  potem je  $\text{diam}(\overline{G}) \leq 3$ .

**1.5.** Pokaži, da je  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  zaporedje stopenj vozlišč nekega drevesa če in samo če

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2n - 2.$$

**1.6.** Pravimo, da je graf  $G$  hipohamiltonski če je  $G - v$  hamiltonski graf za vsak  $v \in V(G)$  vendar  $G$  ni hamiltonski.

a) Če je  $G$  hipohamiltonski potem je  $\delta(G) \geq 3$ .

b) Hipohamiltonski graf ni nikoli dvodelen.

Z uporabo zgornjih trditev poiščite hipohamiltonski graf na 10 vozliščih. (težje) Pokažite, da je najdeni graf najmanjši hipohamiltonski graf.

**1.7.** Pokaži, da ima vsak povezan graf  $G$  vozlišče  $v$  da je  $G - v$  povezan graf.

**1.8.** Pokaži, da je za  $r > 1$  vsak povezan dvodelen  $r$ -regularen graf 2-povezan.

**1.9.** Naj bo  $G$  nek kubičen hamiltonov graf. Pokaži, da je  $G$  razreda I.

**1.10.** Naj bo  $G$  razreda I in  $H$  poljuben graf. Pokaži, da je tedaj  $G \square H$  razreda II.

**1.11.** Premisli, da je  $C_n \square C_m$  hamiltonov. Ali to pomeni, da je za hamiltonska grafa  $G, H$  njun kartezični produkt hamiltonov?

**1.12.** Naj bo  $k \geq 2$  in naj  $M_k$  graf, ki ga dobimo tako da iz  $Q_{2k+1}$  odstranimo vsa vozlišča katerih število enic je manjše od  $k$  ali večje od  $k + 1$ . Pokažite, da je  $M_k$  hamiltonski.

**1.13.** Dokaži ali ovrzi:

- a) Če grafa  $G$  in  $H$  vsebujeta hamiltonovo pot je graf  $G \square H$  hamiltonski.
- b) Če grafa  $G$  in  $H$  imata hamiltonovo pot, jo ima tudi  $G \square H$ .

**1.14.** Dokaži ali ovrzi:

- a) Če je  $G \square H$  hamiltonov je hamiltonov vsaj eden izmed grafov  $G$  ali  $H$ .
- b) Če graf  $G \square H$  vsebuje hamiltonovo pot potem vsaj eden izmed grafov  $G$  ali  $H$  vsebuje hamiltonovo pot.

**1.15.** Pokaži, da ima hiperkocka  $Q_d$  vsaj  $2^{2^d-2}$  popolnih prirejanj.

**1.16.** Določi število 4-ciklov v  $Q_n$ .

**1.17.** Določi Wienerjev index za  $Q_n$ .

**1.18.** Pokaži, da je  $P_n \square P_m$  hamiltonski graf, če in samo če  $2|mn$ .

**1.19.** Denimo, da imata  $G$  in  $H$  vsaj eno vozlišče sosednjo z vsaj dvema vozliščema stopnje 1. Pokažite, da  $G \square H$  ni hamiltonski.