

# INMLA (magistrski bolonjski študij) 2011/2012

1. izpit, 13. 2. 2012

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Izračunaj prva dva približka za rešitev sistema

$$\begin{aligned}12x_1 - 3x_2 + x_3 &= 10 \\ -x_1 + 9x_2 + 2x_3 &= 10 \\ x_1 - x_2 + 10x_3 &= 10\end{aligned}$$

začetnim približko  $x^{(0)} = [1 \ 0 \ 1]^T$  in uporabo Gauss-Seidelove metode. Izračunaj neskončno normo iteracijske matrike in oceni maksimalno število potrebnih korakov, da dosežeš natančnost  $10^{-5}$ .

2. Podan je sistem oblike

$$Ax = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 5 \\ 3 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 3 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = b.$$

Poišči podprostor Krilova  $\mathcal{K}_2(A, b)$  in v njem poišči približek za rešitev sistema z metodo FOM, kjer zahtevaš, da je ostanek pravokoten na prostor v katerem iščeš približek.

3. Zapiši učinkovit Arnoldijev algoritem za poševno simetrično matriko,  $A = -A^T$ . Kakšno obliko zavzame enačba

$$AU_k = U_{k+1}H_{k+1,k} = U_k H_k + h_{k+1,k} u_{k+1} e_k^T?$$

Poišči kratko rekurzivno zvezo podobno tisti, ki jo dobiš pri simetrični matriki. Pokaži, da velja  $A^2 U_k = U_{k+2} H_{k+2,k+1} H_{k+1,k}$ . Izračunaj  $H_{k+2,k+1} H_{k+1,k}$  in iz tega sklepa, da je Arnoldijev algoritem za poševno simetrično matriko ekvivalenten dvema Lanczosevima procesoma za matriko  $A^2$ . Prvi začne z  $u_1$ , drugi pa z vektorjem  $u_2 = \frac{A u_1}{\|A u_1\|}$ .

4. Dušenje je način, kako iz nekonvergentne iteracije za reševanje linearnega sistema poizkusimo dobiti konvergentno metodo.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega M^{-1} r^{(k)}, \text{ kjer je } r^{(k)} = Ax^{(k)} - b.$$

Predpostavi, da ima matrika  $M^{-1}A$  same realne strogo pozitivne lastne vrednosti. V tem primeru pokaži, da obstaja tak  $\omega$ , da dušena iteracija konvergira. Ali lahko poveš kaj o optimalni izbiri  $\omega$ , če poznaš vse lastne vrednosti? Pokaži, da brez predpostavke o lastnih vrednosti, trditev v splošnem ne drži.