INMLA (magistrski bolonjski študij) 2011/2012

2. izpit, 27. 2. 2012

Vpisna številka: Ime in priimek:

1. Podan je sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Za reševanje sistema uporabi GMRES za podprostor Krilova dimenzije 2 in začetni približek $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. S pomočjo dobljenega prostora Krilova poišči še približek za dominantno lastno vrednost in pripadajoči lastni vektor.

2. Poišči približek za rešitev sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \end{aligned}$$

   z uporabo dveh korakov Jacobijeve iteracije in začetnega ničelnega približka. Ali metoda konvergira za poljuben začetni približek? Izračunaj spektralni radij Jacobijeve iteracijske matrike in oceni potrebno število korakov, da bo ostanek manjši od 10^{-5}.

3. Matrika $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ je poševno hamiltonska, če za $J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$ velja $A^T J = JA$. Pokaži, da je JA poševno simetrična matrika. S pomočjo tega dejstva pokaži, da je prostor $X = \mathcal{K}_k(A, b)$ izotropičen za vsak k, tj. $x^T J y = 0$, za vsaka x, $y \in X$. Napiši Arnoldijev algoritem z reortogonalizacijo za poševno hamiltonske matrike, kjer eksplicitno vsiliš izotropijo. Ali lahko kaj poveš o lastnih vrednostih matrike?

4. Dokaži, da iz konvergence Jacobijeve iterativne metode za sistem $Ax = b$ sledi konvergenca iterativnega postopka JOR,

$$x^{(r+1)} = \big((1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)\big)\, x^{(r)} + \omega D^{-1} b$$

   za $\omega \in (0, 1]$. Pomagaj si z iteracijsko matriko in poveži lastne vrednosti iteracijskih matrik Jacobijeve metode in JOR.