Iterativne numerične metode v linearni algebri

13. november 2013

Metodo konjugiranih gradientov lahko uporabimo tudi za reševanje predoločenega sistema $Ax = b$. Najbolj preprosta ideja je, da prevedemo problem na reševanje normalnega sistema $A^T Ax = A^T$. Na učilnici je na voljo osnovna verzija metode konjugiranih gradientov, ki pa ni napisana optimalno. Popravite je in in jo uporabite za reševanje normalnega sistema, kjer je A razpršena matrika. Primerjate svojo metodo z metodama LSQR, ki je na voljo na http://www.stanford.edu/group/SOL/software/lsqr.html. Preizkusite še metodo LSMR na voljo na . Kaj opazite, oziroma kje dobite hitrejšo konvergenco? Algoritme lahko preizkusite še na realnem problemu, ki nastane pri računanju približka Mahalanobis razdalje, http://en.wikipedia.org/wiki/Mahalanobis_distance pri ocenjevanju kvalitete rudarjenja podatkov. Izračunati moramo produkt

$$X_{\text{test}}^T (X_{\text{train}} X_{\text{train}}^{-1}) X_{\text{test}}.$$

Obe matriki X imata veliko večje število vrstic kot stolpcev in sta razpršeni. Tako dobimo zelo slabo pogojen predoločen sistem, ki ga moramo reševati z regularizacijo.

Naloge v Matlabu

Iterativne metode v numerični linearni algebri 2013/2014

Vaje 13. 11. 2013

Naloga 0.1 *Na strani http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/ se nahaja zbirka razpršenih matrik dobljenih iz praktičnih problemov. Na strani so na voljo različni vmesniki (Matlab, Java, Mathematica), ki nam omogočajo prenos matrik. Mi bomo uporabili Matlabov vmesnik* `ufget.m`*, ki nam omogoči nalaganje matrik direktno iz Matlaba. Zanimala nas bo optimalna izbira ω pri SOR oziroma SSOR metodi. Optimalno izbiro bomo iskali na sledeč način. Najprej definiramo funkcijo $f(\omega)$, ki meri število korakov potrebnih za konvergenco. Potem pa se bomo lotili minimiziranja funkcije z Matlabovo vgrajeno metodo* `fminbnd`*. Funkcijo poženi večkrat za različne začetne približke in se nato odloči za optimalno izbiro. Ali dobiš bistveno različne rezultate, če začneš šteti korake, šele ko se zaporedna približka ne razlikujeta preveč?*

Nasvet: najprej preveri svojo funkcijo na primerih manjših dimenzij, kot je recimo tisti v `494_bus` *(id 2). Šele ko dobiš tam smiselne rezultate, se loti večjih problemov.*

Naloga 0.2 *Z uporabo Matlabovih funkcij* `FOM.m` *in* `FOMk.m` *primerjaj metodi na matrikah iz prejšnjih vaj. Poišči še kakšno nesimetrično matriko, ali opaziš izboljšavo, če uporabiš ponovni zagon. Eksperimentiraj s številom korakom k. Primeraj tudi Lanczosev in Arnoldijev algoritem uporabljen na simetrični pozitivni definitni matriki. Kaj opaziš?*

Naloga 0.3 *Dana je matrika A velikosti 20000×20000, kjer so vsi elementi enaki nič, razen na glavni diagonali, kjer so praštevila $2, 3, \ldots, 224737$ in pa enice na diagonalah, kjer je $|i-j| = 1, 2, 4, 8, \ldots, 16384$. Čim bolj natančno izračunajte element $(1,1)$ inverzne matrike matrike A. Pomagajte si z ugotovitvijo, da je $(1,1)$-ti element inverzne matrike matrike A prvi element vektorja x, ki je rešitev sistema $Ax = e_1$, kjer je e_1 prvi enotski vektor. Ker je matrika A razpršena in velika, za reševanje uporabite kakšno iterativno metodo. Pri generiranju matrike A si pomagajte s funkcijo `primes`, ki vrne seznam praštevil, ki so pod izbrano mejo. Za kontrolo, točen rezultat, ki se mu poskusite čim bolj približati, je*

$$0.725078346268401167468687719251160968869\,1\ldots$$

Naloga 0.4 *Za brezdimenzijski geometrijski faktor F za pokončno prizmo, katere presek je območje $\Omega \in \mathbb{R}^2$ z robom $\partial\Omega$ velja, da je*

$$F = \frac{4\pi}{S^2} \int_{\Omega} \psi dS,$$

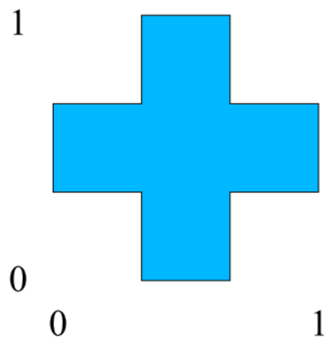
kjer je ψ torzijska funkcija preseka, kar pomeni, da je rešitev paricalne diferencialne enačbe

$$-\Delta\psi = 2$$

pri robnem pogoju

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Na 6 decimalk oziroma čim bolj natančno izračunajte F za prizmo s presekom, ki ga dobite, če enotski kvadrat razdelite na 3×3 enake dele in odstranite vse vogalne dele.



Diferencialno enačbo aproksimirajte s pettočkovno shemo in s primerno iterativno metodo rešite dobljeni razpršeni sistem. Dobljene točke iz mreže vstavite v izbrano kvadraturno pravilo. Kako velik sistem potrebujete, da pridete do 6 točnih decimalk? Sestavite program v Matlabu, ki reši nalogo.

Iterativne metode v numerični linearni algebri 2011/2012

Vaje 19. 12. 2011

(i). Poizkusi implementirati Arnoldijevo metodo z reortogonalizacijo za izračun lastnih vrednosti. Če ne gre, lahko Matlabovo funkcijo dobiš na učilnici.

(ii). Uporabi Matlabovo demonstracijsko matrike `west0479`. Ali je matrika simetrična, kakšna je njena velikost, koliko neničelnih elementov vsebuje? Z ukazom `spy` si lahko ogledaš še strukturo matrike. Matrika ni prevelike dimenzije, tako lahko uporabiš kar funkcijo `eig` in izračunaš vse lastne vrednosti. Nariši dobljene lastne vrednosti (realne in imaginarne dele). Ali kaj opaziš?

(iii). Naredi 30 korakov Arnoldijeve metode z naključno izbranim začetnim vektorjem. Izračunaj

$$||AU_j - U_{j+1}H_{j+1,j}||,$$

za $j = 30$, da preveriš, če metoda zares deluje. Preveri še ortonormiranost stolpcev U_{j+1}, tako da izračunaš

$$||I_{j+1} - U_{j+1}^* U_{j+1}||.$$

Ali so residuali majhni?

(iv). Ritzove vrednosti so lastne vrednosti $j \times j$ Hessenbergove matrike H_j. Izračunaj lastne vrednosti matrike H_j ($j = 30$) z uporabo funkcije `eig`. Na isti graf nariši eksaktne lastne vrednosti in Ritzove lastne vrednosti. To ponovi za različne manjše j. Ali je potrebno matrike H_j ponovno izračunati. Kaj opaziš?

(v). Modificiraj Arnolidijevo metodo tako, da ne bo uporabljala ortogonalizacije. Spet izvedi 30 korakov in preveri ostanke

$$||I_{j+1} - U_{j+1}^* U_{j+1}||.$$

Kaj opaziš, če uporabiš 60 korakov?

(vi). Modificiraj Arnoldijevo metodo, tako da uporabiš premik in invertiranje. Na vsakem koraku namesto množenja z A pomnoži vektor z $(A - \tau I)^{-1}$, vendar ne eksplicitno. Uporabi LU razcep, ki ga je potrebno izračunati le enkrat. Preizkusi metodo za $\tau = 10$ in $\tau = -10$ in še kako drugo vrednost.

Iterativne metode v numerični linearni algebri 2011/2012

Vaje 9. 1. 2012

(i). Poizkusi implementirati Lanczosovo metodo z reortogonalizacijo za izračun lastnih vrednosti. Če ne gre, lahko Matlabovo funkcijo dobiš na učilnici, dodati moraš še reortogonalizacijo.

(ii). Zgeneriraj razpršeno diskretno negativno Laplacovo matriko z zaporedjem naslednjih ukazov:

```
A = delsq(numgrid('H', 40));
perm = symamd(A); A = A(perm, perm);
```

Kakšna je velikost matrike A, ali je simterična, pozitivno definitna? Matrika ni prevelike dimenzije, tako lahko uporabiš kar funkcijo `eig` in izračunaš vse lastne vrednosti. Nariši dobljene lastne vrednosti (realne in imaginarne dele, če obstajajo).

(iii). Naredi $10, 20, 30, 40$ korakov Lanczosove metode z naključno izbranim začetnim vektorjem. Izračunaj

$$||AU_j - U_{j+1}H_{j+1,j}||,$$

za $j = 10, 20, 30, 40$, da preveriš, če metoda zares deluje. Preveri še ortonormiranost stolpcev U_{j+1}, tako da izračunaš

$$||I_{j+1} - U_{j+1}^* U_{j+1}||.$$

Ali so residuali majhni?

(iv). Ritzove vrednosti so lastne vrednosti $j \times j$ tridiagonalne matrike H_j. Izračunaj lastne vrednosti matrike H_j (spet za različne vrednosti j), kar z uporabo funkcije `eig`. Na isti graf nariši točne lastne vrednosti in Ritzove lastne vrednosti. Ali je potrebno matrike H_j ponovno izračunati? Ali so notranje lastne vrednosti dobro aproksimirane?

(v). Modificiraj Lanczosovo metodo tako, da ne bo uporabljala ortogonalizacije. Spet izvedi $10, 20, 30$ korakov in preveri ostanke

$$||I_{j+1} - U_{j+1}^* U_{j+1}||.$$

Kakšne lastne vrednosti si dobil, a se kakšna pojavi prevečkrat? Kaj opaziš, če uporabiš 60 korakov?

(vi). Modificiraj Lanczsovo metodo, tako da uporabiš premik in invertiranje. Na vsakem koraku namesto množenja z A pomnoži vektor z $(A - \tau I)^{-1}$, vendar ne eksplicitno. Uporabi razcep Choleskega, ki ga izračunaš samo na začetku. Preizkusi metodo za $\tau = 10$ in še kako drugo vrednost blizu kakšne lastne vrednosti.

Poglavje 1

Iterativno reševanje linearnih sistemov

Naloga 1.1 *Pokaži naslednjo trditev. Če Jacobijeva metodo konvergira za sistem* $Ax = b$*, potem konvergira tudi za* $A^T x = d$.

Rešitev. Spomnimo se iteracijske matrike Jacobijeve metode za reševanje linearnih sistemov. Rešujemo sistem $Ax = b$. Matriko A razdelimo na spodnji trikotnik brez diagonale L, diagonalo D in zgornji trikotnik brez diagonale U. Torej iz $(D + L + U)x = b$ dobimo iteracijo $x^{(1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(0)} + D^{-1}b$. Iteracijska matrika je $R_J = -D^{-1}(L + U)$, metoda konvergira, natanko takrat ko je $\rho(R_J) < 1$. Pokazali bomo, da velja $\rho(R_J)(A) = \rho(R_J)(A^T)$. Izračunajmo $R_J(A^T) = -D^{-1}(L^T + U^T)$ in transponirajmo. Dobimo $R_J(A^T)^T = -(L + U)D^{-1}$. Če izrazimo $-(L + U)$ iz obeh iteracijskih matrik, dobimo

$$R_J(A^T)^T D = DR_J(A), \quad R_J(A) = D^{-1}R_J(A^T)D.$$

Torej sta $R_J(A^T)^T$ in $R_J(A)$ podobni matriki, tako imata enak spektralni radij. Prav tako pa imata enak spektralni radij transponirani matriki. Torej je $\rho(R_J(A)) = \rho(R_J(A^T))$. ■

Posledica 1.1 *Če je* A *po stolpcih diagonalno dominantna matrika, potem Jacobijeva metoda konvergira.*

Rešitev. Iz izreka iz predavanj vemo, da je to res za matriko, ki je diagonalno dominantna po vrsticah. Taka pa je matrika A^T, saj je A diagonalno dominantna po stolpcih. ■

Algoritem 1: Jacobijeva iteracija

$x^{(0)}$ začetni približek;
Ponavljaj

$$x_{k+1}^{(r+1)} = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{i=1, i \neq k}^{n} a_{ki} x_i^{(r)} \right)$$

Krajše $R_J = -D^{-1}(L + U), \quad c = D^{-1}b$;
$x^{(r+1)} = R_J x^{(r)} + c$;

Algoritem 2: Gauss-Seidlova metoda

$x^{(0)}$ začetni približek;
Ponavljaj

$$x_{k+1}^{(r+1)} = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki}x_i^{(r+1)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}x_i^{(r)}\right)$$

Krajše $R_{GS} = -(L+D)^{-1}U, \quad c = (L+D)^{-1}b$;
$x^{(r+1)} = R_{GS}x^{(r)} + c$;

Algoritem 3: SOR metoda

$x^{(0)}$ začetni približek;
Izberi $\omega \in (0,2)$;
Ponavljaj

$$x_{k+1}^{(r+1)} = (1-\omega)x_k^{(r)} + \omega\frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki}x_i^{(r+1)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}x_i^{(r)}\right)$$

Krajše $R_{SOR} = -(\omega L + D)^{-1}((1-\omega)D - \omega U)$;

Naloga 1.2 *Preuredi sistem enačb*

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \end{array},$$

tako da bo Jacobijeva metoda zagotovo konvergirala. Izračunaj prvi približek z začetnim vektorjem $x = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Rešitev. Matrične vrstice preuredimo tako, da bo nova matrika diagonalno dominantna po stolpcih. Rešujemo ekvivalenten problem

$$\begin{array}{ccccccc} 4x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \end{array}.$$

Nova matrika je diagonalno dominantna po stolpcih, velja $|4| > |2| + |1|$, $|4| > |1| + |1|$ ter $|4| > |3| + |0|$. Izračunajmo

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(3 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(3 + 0.5) = \frac{7}{8} = 0.875 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{4}(1 - 2x_1^{(0)} - 3x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(1 - 2\frac{3}{2} - 3) = -\frac{5}{4} = -1.25 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{4}(4 - x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) = \frac{1}{4}(4 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} = 0.75. \end{aligned}$$

■

Naloga 1.3 *Naj bo* $||R|| < 1$ *in poleg tega je matrična norma usklajena z vektorsko. Dokaži, da velja*

(i).

$$||x^{(r+1)} - x^{(r)}|| \leq ||R||||x^{(r)} - x^{(r-1)}||$$

(ii).

$$||x^{(r)} - x^*|| \leq \frac{||R||}{1 - ||R||}||x^{(r)} - x^{(r-1)}||$$

(iii).

$$||x^{(r)} - x^*|| \leq \frac{||R||^{(r)}}{1 - ||R||}||x^{(1)} - x^{(0)}||,$$

kjer je x^* *točna rešitev. Velja še* $x^{(r+1)} = Rx^{(r)} + c$.

Rešitev.

(i). Izračunajmo

$$||x^{(r+1)} - x^{(r)}|| = ||Rx^{(r)} + c - Rx^{(r-1)} - c|| =$$
$$||Rx^{(r)} - Rx^{(r-1)}|| \leq ||R||||x^{(r)} - x^{(r-1)}||.$$

(ii). Velja

$$||x^{(r)} - x^*|| = ||x^{(r)} - x^{(r+1)} + x^{(r+1)} - x^{(r+2)} + \ldots + x^*|| \leq$$
$$||x^{(r)} - x^{(r+1)}|| + ||x^{(r+1)} - x^{(r+2)}|| + \ldots \leq$$
$$||R||||x^{(r)} - x^{(r-1)}|| + ||R||^2||||x^{(r+1)} - x^{(r)}|| + \ldots \leq$$
$$\Big(||R|| + ||R||^2 + \ldots\Big)||||x^{(r)} - x^{(r-1)}|| =$$
$$||R||\Big(1 + ||R|| + ||R||^2 + \ldots\Big)||||x^{(r)} - x^{(r-1)}|| = ||R||\frac{1}{1 - ||R||}||x^{(r)} - x^{(r+1)}||.$$

Vse dobimo z zaporedno uporabo (i).

(iii). Iz (ii) dobimo

$$||x^{(r)} - x^*|| \leq \frac{||R||}{1 - ||R||}||x^{(r)} - x^{(r-1)}||$$
$$\leq \frac{||R||^2}{1 - ||R||}||x^{(r-1)} - x^{(r-2)}|| \leq \ldots \leq \frac{||R||^r}{1 - ||R||}||x^{(1)} - x^{(0)}||.$$

■

Naloga 1.4 *Izračunaj prva dva približka sistema*

$$\begin{array}{rcrcrcl} 10x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 5 \end{array},$$

po Jacobijevi in Gauss-Seidlovi metodi z začetnim približkom $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. *Oceni koliko korakov iteracije potebuješ, da bo veljalo* $||x^{(r)} - x^*||_\infty \leq 10^{-5}$.

Rešitev. Matrika je enaka

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 4 \\ -1 & 8 & 2 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Vektorja sta

$$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Velja ocena

$$||x^{(r)} - x^*|| \leq \frac{||R||^{(r)}}{1 - ||R||} ||x^{(1)} - x^{(0)}||,$$

oziroma

$$||x^{(r)} - x^*|| \leq \frac{||R||^{(r-1)}}{1 - ||R||} ||x^{(2)} - x^{(1)}||.$$

To smo dokazali.

Najprej izračunajmo približka za Jacobijevo metodo

$$x_{k+1}^{(r+1)} = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{i=1, i \neq k}^{n} a_{ki} x_i^{(r)} \right).$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}(8 + 2x_2^{(0)} - 4x_3^{(0)}) = \frac{1}{10}(8 + 2) = 1 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{8}(8 + x_1^{(0)} - 2x_3^{(0)}) = \frac{1}{8}(8 + 1) = 1.125 \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}(5 - x_1^{(0)} + 3x_2^{(0)}) = \frac{1}{10}(5 - 1 + 3) = 0.7
\end{aligned}$$

Dobili smo $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1.125 & 0.7 \end{bmatrix}^T$.

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{1}{10}(8 + 2x_2^{(1)} - 4x_3^{(1)}) = \frac{1}{10}(8 + 2 \cdot 1.125 - 4 \cdot 0.7) = 0.745 \\
x_2^{(2)} &= \frac{1}{8}(8 + x_1^{(1)} - 2x_3^{(1)}) = \frac{1}{8}(8 + 1 - 2 \cdot 0.7) = 0.95 \\
x_3^{(2)} &= \frac{1}{10}(5 - x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)}) = \frac{1}{10}(5 - 1 + 3 \cdot 1.125) = 0.7375
\end{aligned}$$

Dobili smo $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.745 & 0.95 & 0.7375 \end{bmatrix}^T$. Za oceno rabimo še $||R_J||_\infty$. Izračunajmo

$$R_J = -D^{-1}(L + U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & & \\ & \frac{1}{8} & \\ & & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

Neskončna norma je ravno največja vsota absolutnih vrednosti po vrsticah, $||R_J||_\infty = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 0.6$. Izračunajmo

$$||x^{(2)} - x^{(1)}||_\infty = || \begin{bmatrix} -0.255 \\ -0.175 \\ 0.0375 \end{bmatrix} ||_\infty = 0.225.$$

Upoštevajmo oceno in dobimo

$$||x^{(r)} - x^*||_\infty \leq \frac{0.6^{r-1}}{1-0.6}||x^{(2)} - x^{(1)}||_\infty = \frac{0.6^{r-1}}{0.4}0.225 \leq 10^{-5}.$$

Tako dobimo, da mora veljati

$$0.6^{r-1} \leq \frac{0.4 \cdot 10^{-5}}{0.225}.$$

Z antilogaritmiranjem dobimo $r \geq 22.411 \doteq 23$.

Izračunajmo še približka za Gauss-Seidlovo metodo

$$x_{k+1}^{(r+1)} = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki}x_i^{(r+1)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}x_i^{(r)}\right)$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}(8 + 2x_2^{(0)} - 4x_3^{(0)}) = \frac{1}{10}(8+2) = 1 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{8}(8 + x_1^{(1)} - 2x_3^{(0)}) = \frac{1}{8}(8+1) = 1.125 \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}(5 - x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)}) = \frac{1}{10}(5 - 1 + 3 \cdot 1.125) = 0.7375
\end{aligned}$$

Dobili smo $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1.125 & 0.7375 \end{bmatrix}^T$.

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}(8 + 2x_2^{(1)} - 4x_3^{(1)}) = \frac{1}{10}(8 + 2 \cdot 1.125 - 4 \cdot 0.7375) = 0.73 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{8}(8 + x_1^{(2)} - 2x_3^{(1)}) = \frac{1}{8}(8 + 0.73 - 2 \cdot 0.7375) = 0.906875 \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}(5 - x_1^{(2)} + 3x_2^{(2)}) = \frac{1}{10}(5 - 0.73 + 3 \cdot 0.906875) = 0.6990625
\end{aligned}$$

Dobili smo $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.73 & 0.906875 & 0.6990625 \end{bmatrix}^T$. Za oceno rabimo še $||R_{GS}||_\infty$. Izračunajmo

$$R_{GS} = -(D+L)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & -0.4 \\ 0 & 0.025 & -0.3 \\ 0 & -0.0125 & -0.05 \end{bmatrix}.$$

Tako dobimo $||R_{GS}||_\infty = 0.6$, $||x^{(2)} - x^{(1)}||_\infty = 0.27$. Hočemo, da velja

$$||x^{(r)} - x^*||_\infty \leq \frac{0.6^{r-1}}{1-0.6}||x^{(2)} - x^{(1)}||_\infty = \frac{0.6^{r-1}}{0.4} \cdot 0.27.$$

Podobno kot prej z antilogaritmiranjem dobimo $r \geq 22.768 \doteq 23$. ■

Naloga 1.5 *Vemo, da za vse operatorske norm velja $\rho(R) \leq ||R||$. Pokaži, da za vsak operator R in vsak $\epsilon > 0$ obstaja operatorska norma $||R||_*$, da velja $||R||_* \leq \rho(R) + \epsilon$. To pomeni, da za fiksen operator R lahko zmeraj izberemo normo, ki je poljubno blizu spektralnega radija $\rho(R)$.*

Nasvet. Najprej pokaži, da vsaka obrnljiva matrika B in operatorsko norma $||.||$ inducirata vektorsko normo $||x||_B = ||Bx||$ in operatorsko normo

$$||A||_B = \max_{x \neq 0} \frac{||BAx||}{||Bx||} = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_B}{||x||_B}.$$

Rešitev.

Naj bo x_* normiran lastni vektor za $\lambda = \rho(R)$, potem velja

$$||A|| = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \max_{||x||=1} \frac{||Ax||}{||x||} = \max_{||x||=1} ||Ax|| \geq ||Ax_*|| = |\lambda x_*| = |\lambda|$$

Lotimo se se dokaza nasveta. Pokažimo, da je $||x||_B = ||Bx||$ vektorska norma. Če je $x = 0$, je seveda $Bx = 0$ in tako tudi $||Bx|| = ||x||_B = 0$. V drugo smer pokažemo podobno. Iz $Bx = 0$, sledi $x = 0$, saj je B obrnljiva.

Množenje s skalarjem podeduje lastnosti vektorske norme

$$||\lambda x||_B = ||B(\lambda x) = ||\lambda Bx|| = |\lambda|||Bx||| = |\lambda|||x||_B.$$

Trikotniško neenakost pokažemo podobno

$$||x+y||_B = ||B(x+y)|| = ||Bx + By|| \leq ||Bx|| + ||By|| = ||x||_B + ||y||_B.$$

Iz tega sledi, da je $||.||_B$ operatorska norma inducirana z vektorsko normo $||.||_B$. Velja še

$$||A||_B = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_B}{||x||_B} = \max_{x\neq 0} \frac{||BAx||}{||Bx||} = \max_{y=Bx\neq 0} \frac{||BAB^{-1}y||}{||y||} = ||BAB^{-1}||.$$

To pomeni, da je inducirana morma $||A||_B$ enaka normi podobne matrike BAB^{-1}. Spomnimo se Jordanske forme $R = XJX^{-1}$.

Za vsako matriko A obstaja Jordanska forma J, tako da velja

$$A = XJX^{-1} = X\mathrm{diag}(J_1, J_2, \cdots, J_p)X^{-1},$$

kjer je

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ Jordanska kletka.}$$

Tako smo dobili, da velja

$$||R||_X = ||XRX^{-1}|| = ||J||$$

Izbrati si moramo še primerno normo za katero najlažje izraćunamo $||J||$. Primerna izbira je neskončna norma, saj velja $||J_i||_\infty = 1 + |\lambda_i|$, oziroma če je kletka dimenzije 1, $||J_i||_\infty = |\lambda_i|$. Če so vse lastne vrednosti enostavne, smo že končali. V nasprotnem predpostavimo, da so bloki dimenzije 1 v Jordanski formi na zadnjih mestih. Naš cilj je poiskati matriko podobno Jordanski kletki J_i, ki ima neskončno normo poljubno blizu $|\lambda_i|$. Poiskali bomo ustrezno diagonalno podobnostno matriko D.

$$\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & \frac{d_1}{d_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{d_{n-1}}{d_n} \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Primnerna izbira je $d_i = \epsilon^{n-i}$, saj takrat velja $\frac{d_i}{d_{i+1}} = \epsilon$. Tako bločno sestavimo matriko $\widetilde{D}$, da velja

$$||\widetilde{D}J\widetilde{D}^{-1}||_\infty \leq \rho(R) + \epsilon$$

■

Naloga 1.6 *Naj bo A strogo diagonalno dominatna matrika. Vemo, da Jacobijeva in Gauss-Seidlova metoda konvergirata. Pokaži, da v tem primeru velja*

$$||R_{GS}||_\infty \le ||R_J||_\infty < 1$$

Rešitev. Naj bo L spodnji trikotnik (brez diagonale) v matriki A, D diagonala matrike in U zgornji trikotnik (brez diagonale) v matriki. Potem velja

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{GS}} &= -(L+D)^{-1}U \qquad \text{in} \\ R_{\mathrm{J}} &= -D^{-1}(L+U). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Vpeljali bomo še novo operacijo na matriki $|A|(i,j) = |a_{ij}|$ za $\forall i,j$. Torej vsakemu elementu matrike priredimo njegovo velikost. Navedimo še nekaj preprostih lastnosti. Trikotniška neenakost

$$|AB| \le |A||B|$$

sledi iz navadne trikotniške neenakost uporabljene na elementih $C = AB$. Poleg tega velja še $|DA| = |D||A|$ in $|BD| = |B||D|$, kjer je D diagonalna matrika primerne dimenzije. Dobimo

$$|c_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right| \le \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \cdot |b_{kj}| = |C|(i,j).$$

Zapišimo še

$$(D+L)^{-1} = \Big(D(I+D^{-1}L)\Big)^{-1} = (I+D^{-1}L)^{-1}D^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(D^{-1}L)^i = I+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(D^{-1}L)^i$$

Opazimo še, da je $D^{-1}L$ spodnje trikotna matrika in tako nilpotentna, pri vsakem potenciranju postane ena poddiagonala več enaka nič. Tako velja $(D^{-1}L)^n = 0$.

Do ocene nam manjka samo še povezava z neskončno normo. Naj bo $\mathbf{1}$ vektor dimenzije n, ki imam vse komponente enake 1. Potem so komponente vektorja $|A|\mathbf{1}$ ravno vsote absolutnih vrednosti elementov matrike po vrsticah. Njegova največja komponenta pa bo ravno enaka neskončni norme matrike A. Upoštevali bomo še da velja $|D^{-1}(L+U)| = |D^{-1}L| + |D^{-1}U|$, saj imata obe matriki disjunktno množico neničelnih elementov.

Ideja dokaza je, da pokažemo, da velja neenakost po komponentah, $|R_{\mathrm{GS}}|\mathbf{1} \le |R_{\mathrm{J}}|\mathbf{1}$.

$$\begin{gathered} |-(L+D)^{-1}U|\mathbf{1} = \left|\left(I+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(D^{-1}L)^i\right)D^{-1}U\right|\mathbf{1} \le \\ \left(I+\sum_{i=1}^{n-1}|(D^{-1}L)^i|\right)|D^{-1}U|\mathbf{1} \overbrace{\le}^{?} |D^{-1}(L+U)|\mathbf{1} = |D^{-1}L|\mathbf{1} + |D^{-1}U|\mathbf{1} \\ (I-|D^{-1}L|)^{-1}|D^{-1}U|\mathbf{1} \overbrace{\le}^{?} |D^{-1}L|\mathbf{1} + |D^{-1}U|\mathbf{1} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Od tukaj naprej ni več ekvivalence. Naj bo X^{-1} matrika s samimi pozitivnimi elementi ter a in b poljubna vektorja, potem lahko sklepamo, če velja $a \le Xb$, potem mora veljati tudi $X^{-1}a \le X^{-1}Xb = b$. Zadosti bo, če pokažemo $a \le Xb$, kjer je

$$X^{-1} = \left(I+\sum_{i=1}^{n-1}|(D^{-1}L)^i|\right) = (I-|(D^{-1}L)^i|)^{-1}, \quad a = |D^{-1}U|1, \quad b = |D^{-1}L|\mathbf{1} + |D^{-1}U|\mathbf{1}.$$

$$\begin{aligned}|D^{-1}U|\mathbf{1} \overbrace{\leq}^{?} |D^{-1}L|\mathbf{1} + |D^{-1}U|\mathbf{1} - |D^{-1}L|^2\mathbf{1} - |D^{-1}L||D^{-1}U|\mathbf{1} \\ |D^{-1}L| \cdot (I - |D^{-1}L| - |D^{-1}U|)\mathbf{1} \overbrace{\geq}^{?} \mathbf{0}\end{aligned} \tag{1.3}$$

Zadosten pogoj, da velja zadnja neenakost je $(I - |D^{-1}L| - |D^{-1}U|)\mathbf{1} \geq \mathbf{0}$. To pa takoj sledi iz dejstva da je matrika diagonalno dominantna, če neenakost pomnožimo z $|D|$ in dobimo

$$(|D| - |L| - |U|)\,\mathbf{1} \geq \mathbf{0}.$$

■

Naloga 1.7 *Chebyshevi polinomi so definirani z rekurzivno shemo*

$$T_m(x) = 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x),$$

kjer je $T_0(x) = 1$ *in* $T_1(x) = x$. *Pokaži, da velja:*

(a) $T_m(1) = 1$

(b) $T_m(x) = 2^{m-1}x^m + O(x^{m-1}), m \geq 1$

(c)

$$T_m(x) = \begin{cases} \cos\left(m \arccos(x)\right), & |x| \leq 1 \\ \cosh\Big(m \cosh^{-1}(x)\Big), & |x| \geq 1 \end{cases}$$

(d) $|T_m(x)| \leq 1$, *za* $|x| \leq 1$

(e) Ničle $T_m(x)$ *so* $x_i = \cos(\frac{(2i-1)\pi}{2m})$, *za* $i = 1, \ldots, m$.

(f)

$$T_m(x) = \frac{1}{2}\Big((x + \sqrt{x^2-1})^m + (x + \sqrt{x^2-1})^{-m}\Big), \quad za\ |x| \geq 1$$

(g) $T_m(1+\epsilon) \geq \frac{1}{2}(1 + m\sqrt{2\epsilon}), \quad za\ \epsilon \geq 0$

(h) Pokaži, da velja še močnejša ocena $T_m(1+\epsilon) \geq 1 + m^2\epsilon$, *kjer je* $\epsilon \geq 0$. *Pomagaj si z razvojem v Taylorjevo vrsto.*

Rešitev.

(a) Trditev za $m = 0, 1$ očitno velja. Za $m = 2$ dobimo

$$T_2(1) = 2 \cdot 1 \cdot T_1(1) - T_0(1) = 2 - 1 = 1.$$

Dokažimo še indukcijski korak $m-1, m-2 \to m$.

$$T_m(1) = 2 \cdot 1 \cdot T_{m-1}(1) - T_{m-2}(1) = 2 - 1 = 2.$$

(b) Dokazati moramo, da je vodilni koeficient $2^{m-1}x^m$. Trditev za $m = 0, 1, 2$ očitno velja. Predpostavimo, da trditev velja za $i = 0, \cdots, m-1$.

$$T_m(x) = 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x) = 2x2^{m-2}x^{m-1} + O(x^{m-1}) - 2^{m-3}x^{m-2} - O(x^{m-3}) = 2^{m-1}x^m + O(x^{m-1})$$

(c) Označimo $\alpha = \cos^{-1}(x)$ in izračunajmo. Upoštevali bomo kosinusni izrek

$$\cos(\beta+\gamma) = \cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\sin(\gamma)$$
$$\sin(\beta+\gamma) = \cos(\beta)\sin(\gamma) + \sin(\beta)\cos(\gamma)$$

in ga uporabili za $\beta = m\alpha, (m-1)\alpha$ in $\gamma = -\alpha$.

$$\begin{aligned} T_m(x) &= 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x) \\ \cos(m\alpha - \alpha) &= \cos(m\alpha)\cos(\alpha) + \sin(m\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(m\alpha - 2\alpha) &= \cos(m\alpha)\cos(2\alpha) + \sin(m\alpha)\sin(2\alpha) \\ 2\cos(\alpha)\left[\cos(m\alpha)\cos(\alpha) + \sin(m\alpha)\sin(\alpha)\right] &- \cos(m\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(m\alpha)\sin(2\alpha) \\ \cos(m\alpha)(2\cos^2(\alpha) - \cos(2\alpha)) + \sin(m\alpha)(2\cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(2\alpha)) &= \cos(m\alpha) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Drugi del pokažemo podobno, veljajo namreč naslednje zveze:

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y) \end{aligned} \tag{1.5}$$

(d) Uporabimo točko (c) in upoštevamo, da je kosinus po absolutni vrednosti vedno manjši od ena.

(e) Spet uporabimo (c), $T_m(x) = \cos(m\cos^{-1}(x))$. Ničle so potemtakem ravno rešitve enačbe

$$\begin{aligned} m\cos^{-1}(x) &= \pi/2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x &= \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2m}\right), \quad k \in \{0, \dots, m-1\} \end{aligned}$$

(f) Upoštevali bomo, da je inverzna funkcija $\cos^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Kratek račun pokaže, da velja

$$T_m(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\cos^{-1}x}\right)^m + \left(e^{\cos^{-1}x}\right)^{-m} = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^m + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-m}$$

(g) Upoštevamo prejšnjo točko in poračunamo, kjer upoštevamo

$$(1 + (\epsilon + \sqrt{2\epsilon + \epsilon^2})^m = 1 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (\epsilon + \sqrt{2\epsilon+\epsilon^2})^k \geq 1 + m(\epsilon + \sqrt{2\epsilon + \epsilon^2}) \geq 1 + m\sqrt{2\epsilon}$$

$$\begin{aligned} T_m(1+\epsilon) &= \frac{1}{2}\left(1 + \epsilon + \sqrt{(1+\epsilon)^2 - 1}\right)^m + \left(1 + \epsilon + \sqrt{(1+\epsilon)^2-1}\right)^{-m} \\ T_m(1+\epsilon) &= \frac{1}{2}\left(1+\epsilon+\sqrt{2\epsilon+\epsilon^2}\right)^m + \left(1+\epsilon+\sqrt{2\epsilon+\epsilon^2}\right)^{-m} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Za ostrejšo oceno bomo najprej pokazali, da ima polinom $T_m(1+x)$ vse koeficiente pozitivne.

$$\begin{aligned} T_m(x) &= 2^{m-1}\prod_{k=1}^{m}\left(x - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right)\right) \\ T_m(1+x) &= 2^{m-1}\prod_{k=1}^{m}\left(x + \left(1 - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Ker velja $\left(1-\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right)\right) \geq 0$ so vsi koeficienti pozitivni. Označimo $a = \epsilon + \sqrt{2\epsilon + \epsilon^2}$ in upoštevamo $\binom{-m}{2} = -m(-m-1)/2$,

$$\begin{aligned}
T_m(1+x) &= \frac{1}{2}\left[(1+a)^m + (1+a)^{-m}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + ma + \binom{m}{2}a^2 + \binom{m}{3}a^3 + \cdots + 1 - ma + \binom{-m}{2}a^2 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + (m*(m+1)/2 + m(m-1)/2)a^2 + O(a^3)\right) \geq 1 + \frac{1}{2}m^2a^2 \geq 1 + m^2\epsilon
\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da velja

$$a^2 = (\epsilon + \sqrt{2\epsilon + \epsilon^2})^2 = \epsilon^2 + 2\epsilon\sqrt{2\epsilon + \epsilon^2} + 2\epsilon + \epsilon^2 \geq 2\epsilon.$$

■

Naloga 1.8 *Pokaži, da sta podprostora Krylova $\mathcal{K}_k(A,b)$ in $\mathcal{K}_k(\alpha I + \beta A, b)$ enaka za $\forall \alpha, \beta, \beta \neq 0$.*

Rešitev. Dokazovali bomo z indukcijo. Vemo, da velja

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_k(A,b) &= \mathrm{Lin}\{b, Ab, A^2b, \cdots, A^{k-1}b\} \\
\mathcal{K}_k(\alpha I + \beta A, b) &= \mathrm{Lin}\{b, (\alpha I + \beta A)b, (\alpha I + \beta A)^2b, \cdots, (\alpha I + \beta A)^{k-1}b\}
\end{aligned}$$

Očitno trditev velja za $k = 1$, saj sta oba prostora razpeta samo z b. Za $k = 2$ izračunamo

$$\mathrm{Lin}\{b, (\alpha I + \beta A)b\} = \mathrm{Lin}\{b, b + Ab\} = \mathrm{Lin}\{b, Ab\},$$

saj je očitno $b + Ab$ linearna kombinacija b in Ab.

Pokažimo, da velja trditev za $k+1$, če vemo, da velja že za $\forall k \leq k+1$. Pokazati moramo samo, da je zadnji vektor kombinacija prejšnjih $b, Ab, A^2b, \cdots, A^{k-1}b$ in A^kb. Vemo, da velja

$$(\alpha I + \beta A)^{k-1}b = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i A^i b$$

Izračunajmo:

$$(\alpha I + \beta A)^k b = (\alpha I + \beta A)(\alpha I + \beta A)^{k-1}b = (\alpha I + \beta A)\sum_{i=0}^{k-1}\gamma_i A^i b = \sum_{i=0}^{k-1}\alpha\gamma_i A^i b + \sum_{i=0}^{k-1}\gamma_i \beta A^{i+1}b.$$

Pokazali smo, da velja $\mathcal{K}_k(\alpha I + \beta A, b) \subset \mathcal{K}_k(A,b)$. Vendar zaradi linearnosti velja tudi obratna smer, če trditev uporabimo za matriko $\widetilde{A} = \alpha I + \beta A$ in uopštevamo, da velja $A = \frac{1}{\beta}\widetilde{A} - \frac{\alpha}{\beta}I$. ■

Naloga 1.9 *Spomnimo se, da je razcep realne matrike, $Q^TAQ = H$. kjer je H zgornje Hessenbergova matrika in Q ortogonalna matrika, določen že s prvim stolpcem matrike Q. To pomeni, da imamo na izbiro samo predznak stolpcev Q, ki so ortogoanalni. Pokaži, da iz razcepa dobiš ravno ortogonalizacijo podprostora Krylova dimenzije k, če pogledaš samo prvih k stolpcev matrike Q, prvi stolpec Q je enak $\frac{b}{||b||}$.*

Rešitev. Razcep preoblikujemo in dobimo, uporabili bomo Matlabovo sintakso, kjer je $a_i = A(:,i)$ i-ti stolpec matrike A, $A(j,:)$ j-ta vrstica matrike A in $A(i,j) = a_{ij}$. Definirajmo še $h_{0,1} = 0$, tako s primerjavo i-tih stolpcev dobimo:

$$AQ = QH$$
$$Aq_i = QH(:,i) = \sum_{m=1}^{i+1} h_{m,i}q_m$$

Za prvi stolpec velja $Aq_1 = h_{11}q_1 + h_{21}q_2$. Če pomnožimo s q_1^T z leve, dobimo $q_1^T Aq_1 = h_{11}$. Velja še $h_{21}q_2 = Aq_1 - h_{21}q_2$. Iz česar dobimo $h_{21} = ||Aq_1 - h_{21}q_2||$. Torej trditev drži za $k = 2$, saj je q_2 dobljen z ortogonalizacijo glede na q_1, na koncu ga še normiramo.

Pokažimo trditev z indukcijo. Trditev velja do k-tega stolpca, pokažimo da velja tudi za stolpec $k + 1$. Velja

$$Aq_{k+1} = QH(:,i) = \sum_{m=1}^{k+2} h_{m,i}q_m$$
$$h_{k+2,k+1}q_{k+2} = Aq_{k+1} - h_{1,k+1}q_1 - \cdots - h_{k+1,k+1}q_{k+1}$$

Podobno kot prej sledi, $q_i^T Aq_{k+1} = h_{i,k+1}$. Dobimo še, da je q_{k+2} dobljen z ortogonalizacijo glede na $q_1, \cdots, q_{k+1}$ in normiranjem. ∎

Naloga 1.10 *Naj bo A simetrična pozitivno definitna matrika dimenzije $n \times n$. Podana je še matrika $P_k \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $k < n$, ki je polnega ranga. Ali je matrika $P_k^T AP_k$ obrnljiva, kaj pa s.p.d? Ali lahko rezultat posplošimo na matrike, ki niso s.p.d, a so obrnljive.*

Rešitev. Za s.p.d matriko A obstaja razcep Choleskega $A = VV^T$, kjer je V spodnje trikotna matrika. Tako dobimo, da velja $P_k^T AP_k = P_k^T V^T V P_k = (VQ_k)^T(VQ_k)$. Ta matrika je očitno s.p.d. Označimo $B = VQ_k$ in dobimo $< B^T Bx, x >=< Bx, Bx >> 0$.

Za drugi del naloge bomo poiskali simetrično matriko dimenzije 2×2, ki bo imela ortogonalne stolpce. Identiteta ni dobra izbira, saj je s.p.d, druga najbolj preprosta izbira je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Velja $Ae_1 = e_2$ in $e_1^T Ae_1 = 0$. Tako lahko definiramo $e_1 = P$ in $P^T AP$ ni obrnljiva.

Če A ni s.p.d zmeraj obstajajo vektorji y, da velja $y^T Ay = 0$. Brž ko velja $y \in \mathrm{Im}(P_k)$, bo obstajal w, da velja $y = P_k w$. Tako dobimo $w^T P_k^T V^T V P_k w = 0$.

∎

Naloga 1.11 *Naj bo A s.p.d matrika. Na predavanjih ste pokazali, da je reševanje sistem $Ax = b$ ekvivalentno iskanju minimuma funkcije $\Phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$.*

(i). Naredi dokaz ponovno, vendar tokrat z odvajanjem.

(ii). Če za približek x_k velja $\Phi(x_k) \approx 0$, bi radi iz njega dobili še boljši približek. Pokaži, da le iščemo približek v smeri p, potem velja $\alpha = \frac{-p^T r}{p^T Ap}$, kjer je $r = Ax_k - b$. Iščemo minimum $\Phi(x_k + \alpha p)$.

S primerno izberi smeri dobimo različne metode kot so konjugirani gradienti, gradientna metoda, ...

Rešitev.

(i). Spomnimo se naslednjih lastnosti odvajanja vektorskih funkcij. Z a_i^T označimo i-to vrstico. Velja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x^Tb)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^n x_j b_j\right) = b_i \\
\nabla(x^Tb) &= b \\
\frac{\partial(x^TAx)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^n x_j a_j^T x\right) = a_j^T x + \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_j^T x\right) \\
&= a_i^T x + \sum_{j=1}^n x_j \overbrace{a_{ij}}^{=a_{ji}} = a_i^T x + \sum_{j=1}^n x_j a_{ji} = 2a_i^T x \\
\nabla(x^TAx) &= 2Ax
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Tako smo dobili $\nabla\Phi(x) = Ax - b$.

(ii). Izračunajmo naslednji izraz, kjer sta začetni približek x in smer iskanja ekstrema p fiksna.

$$\begin{aligned}
\Phi(x+\boldsymbol{\alpha} p) = \frac{1}{2}(x+\alpha p)^T A(x+\alpha p) - (x+\alpha p)^T b &= \frac{1}{2}x^TAx + \frac{1}{2}\alpha^2 p^TAp + \alpha x^TAp - x^Tb - \alpha p^Tb \\
&= \phi(x) + \frac{1}{2}\alpha^2 p^TAp + \alpha x^TAp - x^Tb - \alpha p^Tb \\
\frac{\partial\Phi(x+\boldsymbol{\alpha} p)}{\partial\alpha} &= \alpha p^TAp + x^TAp - p^Tb = 0 \\
\alpha = \frac{p^Tb - x^TAp}{p^TAp} = \frac{p^Tb - p^TAx}{p^TAp} &= \frac{p^T(b-Ax)}{p^TAp} = \frac{-p^Tr}{p^TAp}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Upoštevali smo, da velja

$$x^TAp = (x^TAp)^T = p^T \overbrace{A^T}^{=A} x = p^TAx.$$

■

Naloga 1.12 *Zapiši gradientno metodo, kjer začneš z x_0, nato pa se vsakič premaknemo v smeri gradienta in poiščemo minimum v tej smeri.*

Rešitev. ■

Naloga 1.13 *Z Arnoldijevim algoritmom in metodo GMRES in Krylovim podprostorom dimenzije 2 izračunaj približek za rešitev linearnega sistema*

$$Ax = b = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Algoritem 4: Gradientna metoda

$x_0 = 0$;
$r = -b$;
for $i = 1, 2, \ldots$ **do**
  $z = Ar_{i-1}$;
  $\alpha = \frac{r_{i-1}^T r_{i-1}}{r_{i-1}^T z}$;
  $x_i = x_{i-1} + \alpha r$;
  $r = \alpha z - r$;
end

Rešitev.

Za zaćetni približek vzamemo kar $x_0 = 0$. Tako je $r = b - Ax_0 = b$ in

$$q_1 = b/||b|| = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{q_2} = Aq_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ velja že } h_{11} = \widetilde{q_2}^T q_1 = 0 \longrightarrow q_2 = \widetilde{q_2}/||\widetilde{q_2}|| = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, h_{21} = ||\widetilde{q_2}|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\widetilde{q_3} = Aq_2 = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h_{12} = q_1^T \widetilde{q_3} = -\sqrt{2}, \quad h_{22} = q_2^T \widetilde{q_3} = 1, \quad \widetilde{q_3} = \widetilde{q_3} + \sqrt{2} q_1 - q_2 = 0 \to h_{32} = ||\widetilde{q_3}|| = 0 \tag{1.9}$$

Slučajno se je zgodilo, da je q_3 ničeln. Dobili smo:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V splošnem bi pri GMRES iskali rešitev predoločenega sistema

$$||AQ_2 z - b||_2 = ||Q_3 \widetilde{H}_2 z - b|| = ||\widetilde{H}_2 z - Q_3^T b|| = ||\widetilde{H}_2 z - ||r_0|| e_1||$$

kjer velja $AQ_2 = Q_2 H_2 + h_{32} q_3 e_2^T = Q_3 \widetilde{H}_2$. Rešujemo preko normalnega sistema in dobimo

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \to y = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Končna rešitev je seveda

$$Q_2 y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pri metodi FOM, zatevamo samo ortogonalnost ostanka in rešimo kar $H_2 y = ||r_0|| e_1$. ■

Naloga 1.14 *Naj bo A obrnljiva normalna matrika, katere lastne vrednosti so oblike $|\mathrm{Re}(\lambda)| > |\mathrm{Im}(\lambda)|$. Pokaži, da GMRES, kjer naredimo ponovni zagon na vsake dva koraka konvergira za vsak začetni približek. Uporabi dejstvo, da velja $r_2 = p_2(A)r_0$, kjer je p_2 polinom druge stopnje, ki minimizira ostanek in zanj velja $p_2(0) = 1$. Krajše zapisano velja:*

$$||r||_2 \leq \min_{p_2, p_2(0)=1} ||p_2(A)|| ||r_0||.$$

Kaj mora veljati za polinom?

Rešitev. Polinom s prostim členom 1 mora preslikati spekter, tako da bo veljalo $|p(\lambda_i)| \leq 1$. SLIKA
Velja namreč $p(A) = p(UDU^H) = Up(D)U^H$, kjer je D matrika lastnih vrednosti in U ortogonalna baza lastnih vektorjev. Upoštevali smo, da je matrika normalna in da velja $(UDU^H)^i = UD^iU^H$. Če na diagonalni matriki uporabimo polinom je efekt isti, kot da bi ga uporabili na diagonalnih elementih.

Iz slike razberemo, da je območje v katerem ležijo lastne vrednosti simetrično glede na izhodišče. Tako dobimo idejo, da mora podobno veljati za naš polinom, $p(z) = p(-z)$. Polega tega bi radi, da polinom slika lastne vrednosti v enotsko kroglo. Tako definiramo polinom $p(z) = 1 - (\alpha z)^2$. Naj bo $\alpha z = a + ib$, primeren α bomo določili tako, da bodo vse lastne vrednosti ležale v enotski krogli. Označimo še $b = a\epsilon$, kjer je $|\epsilon| < 1$.

$$1 - (\alpha z)^2 = 1 - (a + ib)^2 = 1 - (a^2 - b^2) + 2iab$$
$$|1 - (\alpha z)^2|^2 = (1 - (a^2 - b^2))^2 + 4a^2b^2 = 1 - 2(1 - \epsilon^2)a^2 + a^4(1 + \epsilon^2)^2 = f(a)$$

Število a lahko s skaliranjem spravimo poljubno blizu 0. Poiščimo ekstreme funkcije, očitno velja $f(a) = f(-a)$ in tudi $f(0) = 1$. Ko izračunamo odvod dobimo

$$4a^3(1 + \epsilon^2)^2 - 4(1 - \epsilon^2)a = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{1 - \epsilon^2}{(1 + \epsilon^2)^2}$$

Za majhne a je funkcija očitno strogo manjša od 1, s skaliranjem lahko zagotovimo, da je $a^2 < \frac{1-\epsilon^2}{(1+\epsilon^2)}$. ∎

Naloga 1.15 *S `condif.m` generiraj matriko `A=condif(n, c)`. Vzemi $n \geq 50$ in `c = [0.2, 5]`. Dobljena matrika dimenzije n^2 ni simeterična. Preizkusi Matlabove vgrajene metode `bicg`, `qmr`, `bicgstab`, `cgs`, `gmres`.*

Primer: `n = 50; c = [0.2, 5]; A = condif(n, c); nn = n*n; sol = rand(nn, 1); b = A sol; tol = 1e-12; maxit = 1000; x=bicg(A, b, tol, maxit);`

Naloga 1.16 *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika dimenzije $n \times n$ z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \ldots \lambda_n \geq 0$ in $\lambda_2 \geq \lambda_n$.*

(i). Pokaži, da transformacija $\omega(x) = 1 - 2\frac{x-\lambda_2}{\lambda_n-\lambda_2}$ slika interval $[\lambda_n, \lambda_2]$ na interval $[-1, 1]$.

(ii). Definiraj polinome $q_k \in \mathbb{P}_k$,

$$q_k(x) = T_k(\omega(x)) = T_k(1 - 2\frac{x - \lambda_2}{\lambda_n - \lambda_2}),$$

kjer je T_k k-ti Chebsysev polinom. Pokaži, da velja $|a_k(\lambda_i)| \leq 1$ za $i = 2, \ldots, n$ in $q_k(\lambda_1) \geq \frac{1}{2}\rho^k$, kjer je $\rho \geq 1 + 2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_n} > 1$. Predpostavi, da veš, da za $x = 1 + 2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_n} = \cosh(\alpha)$ in $\rho = e^\alpha$ velja $|T_k(x)| \geq \frac{1}{2}\rho^k$.

(iii). Naj bo $w = c_1v_1 + \dots c_nv_n$, kjer $c_1 \neq 0$. Definiraj

$$\widetilde{q}_k(x) = \frac{q_k(x)}{c_1 q_k(\lambda_1)} \text{ in } w_k = \widetilde{q}_{k-1}(A) \in \mathcal{K}_k(A, x).$$

Pokaži, da potem velja $||w_k - v_1|| \leq c\rho^{-k}$, za $k = 0, 1, \dots, n$ in nek fiksen $c > 0$.

(iv). Pokaži, da $\mathcal{K}_k(A, x)$ vsebuje vektor, ki je blizu v_1.

(v). Naj velja $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \geq \lambda_4 \dots \lambda_n \geq 0$. Pokaži, da $\mathcal{K}_k(A, x)$ vsebuje tudi lastni vektor, ki je blizu v_2

(vi). Isti pogoj kot v prejšnji točki, dodatno velja še $\lambda_3 > \lambda_4$. Pokaži, da $\mathcal{K}_k(A, x)$ vsebuje tudi lastni vektor, ki je blizu v_3

Rešitev.

(i). Preslikava je linearna in slika interval $[\lambda_n, \lambda_2]$ v interval $[-1, 1]$. Velja še

$$\omega(\lambda_1) = 1 - 2\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_n - \lambda_2} = 1 + 2\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_n} > 1,$$

saj velja $\lambda_1 > \lambda_2$ in $\lambda_2 > \lambda_n$.

(ii). Izračunajmo $q_k(\lambda_i) = T_k(\omega(\lambda_i))$. Za $i \geq 2$ velja, da je $|\omega(\lambda_i)| \leq 1$, tako iz lastnosti Chebysevih polinom sledi $T_k(\omega(\lambda_i)) \leq 1$. Zapišimo

$$\frac{\rho}{2} = \frac{e^\alpha}{2} \leq \omega(\lambda_1) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \leq e^\alpha = \rho \Rightarrow \omega(\lambda_1) \leq \rho \leq 2\omega(\lambda_1)$$

Naša ocena direktno sledi.

(iii). BŠS predpostavimo, da so v_i normirani, $||v_i|| = 1$. Vemo že, da velja $|q_k(\lambda_i)| \leq 1 \forall i \geq 2$, in $|q_k(\lambda_1)| \geq \frac{1}{2}\rho^k$. Izračunajmo

$$q_k(A)w = \sum_{i=1}^n c_i q_k(A) v_i = \sum_{i=1}^n c_i q_k(\lambda_i) v_i$$

$$w_k = \widetilde{q}_{k-1}(A)w = \sum_{i=1}^n \frac{c_i q_{k-1}(\lambda_i)}{c_1 q_{k-1}(\lambda_1)} v_i = v_1 + \sum_{i=2}^n \frac{c_i q_{k-1}(\lambda_i)}{c_1 q_{k-1}(\lambda_1)}$$

$$||w_k - v_1|| = ||\sum_{i=2}^n \frac{c_i q_{k-1}(\lambda_i)}{c_1 q_{k-1}(\lambda_1)}|| \leq \sum_{i=2}^n \left|\frac{c_i q_{k-1}(\lambda_i)}{c_1 q_{k-1}(\lambda_1)}\right| ||v_i|| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|c_i|}{|c_1|} \frac{1}{\frac{1}{2}\rho^{k-1}} \leq c\rho^{-k}$$

(iv). Trditev sledi direktno iz prejšnje točke.

(v). Definirali bomo nov polinom, ki bo imel za ničlo λ_1.

$$s(x) = (x - \lambda_1) T_k\left(1 - 2\frac{x - \lambda_3}{\lambda_n - \lambda_3}\right)$$

Za ta polinom velja

$$s(\lambda_1) = 0$$
$$s(\lambda_i) = (\lambda_i - \lambda_1) T_k\left(1 - 2\frac{\lambda_i - \lambda_3}{\lambda_n - \lambda_3}\right), \forall i \geq 3$$
$$s(\lambda_2) \geq \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\rho^k, \text{ kjer je } \rho \geq 1 + 2\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_n} > 1.$$

Naredimo analogen sklep kot v prejšnji točki.

(vi). Podobno kot v prejšnji točki, definiramo polinom

$$(\lambda) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)T_k\left(1 - 2\frac{x - \lambda_4}{\lambda_n - \lambda_4}\right)$$

■

Naloga 1.17 *Naj bo podan podprostor W.*

(i). Pokaži, da je podprostor invarianten za množenje z $A - \tau I$, natanko takrat ko je invarianten za monženje z A.

(ii). (λ, v) je lastni par za $A \Leftrightarrow ((\lambda - \tau)^{-1}, v)$ je lastni par za $(A - \tau I)^{-1}$.

Rešitev.

(i). Naredimo naslednje zaporedje sklepov

$$Au = w \in \mathcal{U} \Leftrightarrow Au - \tau u = (A - \tau I)u = w - \tau u \in \mathcal{U}.$$

(ii). Podobno kot v prejšnji točki, dobimo

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \tau v = (A - \tau I)v = \lambda v - \tau v = (\lambda - \tau)v \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - \tau}v = (A - \tau I)^{-1}v.$$

■

Naloga 1.18 *Denimo, da smo naredili k korakov Krylovega postopka. Naj bo (μ, y) lastni par $H_k = U_k^* A U_k$, $(\mu_k, U_k y)$ je približek za lastni par matrike A. Naj bo (λ, v) lastni par za A, $||v|| = 1$ in $w \in Im(U_k)$, tako da velja $||v - w|| = \epsilon << 1$, oziroma $w = U_k y$.*

(i). Predpostavimo, da proces vrne ortogonalne vektorje $v_1, \ldots, v_k$ in pokaži, da velja $||w|| = ||y||$. Pokaži, da potem velja

$$\frac{||H_k y - \lambda y||}{||y||} \leq \frac{||Aw - \lambda w||}{||w||}$$

(ii). Pokaži, da velja $||Aw - \lambda w|| \leq 2||A||\epsilon$ in sklepaj (skupaj s prvo točko), da je (λ, y) lastni par matrike blizu H_k.

Če so vsi lastni pari matrike H_k dobro pogojeni, potem lahko sklepamo, da obstaja lastna vrednost matrike H_k blizu λ. V nasprotnem primeru to ne drži.

(iii). Naj bo U_k poljubna baza podprostora Krylova $\mathcal{K}_k(A, x_0)$, ne nujno ortogonalna. Pokaži, da potem velja

$$\frac{||H_k y - \lambda y||}{||y||} \leq \overbrace{\kappa(U_k)}^{\text{pogojenostno število}} \frac{||Aw - \lambda w||}{||w||}$$

Rešitev.

(i). Najprej pokažimo, da velja $||w|| = ||y|| = ||U_k y|| = \sqrt{y^T U_k^T U_k y_k} = \sqrt{y_k^T y_k} = ||y_k||$. Za drugi del, lahko naredimo naslednje zaporedje ocen:

$$\frac{||H_k y - \lambda y||}{||y||} = \frac{||U_k^* A U_k y - \lambda U_k^* w||}{||w||} = \frac{||U_k^* A w - \lambda U_k^* w||}{||w||} = \frac{||U_k^*(Aw - \lambda w)||}{||w||} \leq \frac{||Aw - \lambda w||}{||w||}$$

Zadnje neenačaj sledi iz dejstva, da je norma ortogonalne projekcije manjša ali enaka normi projiciranega vektorja.

(ii). Začnimo z ocenjevanjem:

$$\begin{aligned} ||Aw - \lambda w|| = ||Aw - Av + Av - \lambda w|| = ||A(w - v) + \lambda(v - w)|| = \\ ||(A + \lambda I)(v - w)|| \leq ||A + \lambda I|| ||v - w|| \leq 2||A||\epsilon. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je vsaka lastna vrednost manjša od katerekoli matrične norme.

(iii). Naredimo podoben sklep kot v prvi točki:

$$\frac{||H_k y - \lambda y||}{||y||} = \frac{||U_k^+ A U_k y - \lambda U_k^+ w||}{||U_k^+ w||} = \frac{||U_k^+ A w - \lambda U_k^+ w||}{||U_k^+ w||} = \frac{||U_k^+(Aw - \lambda w)||}{||w||} \leq \kappa(U_k) \frac{||Aw - \lambda w||}{||w||}$$

Kjer smo ocenili $||y|| = ||U_k w|| \leq ||U_k|| \cdot ||w||$, $||U_k^+(Aw - \lambda w)|| \leq ||U_k^+|| \cdot ||Aw - \lambda w||$

■

Naloga 1.19 *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n$. Spomnimo se, da je $u \in \mathcal{U}$ Ritzov vektor in $\theta \in \mathbb{C}$ Ritzova vrednost za A in podprostor $\mathcal{U}$, če velja $Au - \theta u \perp \mathcal{U}$, ostanek je pravokoten na iskalni prostor. Naj bo U unitarna baza podprostora $\mathcal{U} = Im(U)$ in $B = U^* A U$. Pokaži, da velja:*

$$(\theta, u) \text{ je Ritzov par za } A \Leftrightarrow (\theta, \overbrace{U^* u}^{x}) \text{ je Ritzov par za } B.$$

Rešitev. Naslednji kratek razmislek prinese željeno zvezo:

$$Au - \theta u \perp \mathcal{U} \Leftrightarrow U^*(Au - \theta u) = 0 \Leftrightarrow U^* A u = U^* A U x = \theta x$$

■

Naloga 1.20 Harmonični Ritzovi pari
Naj bo τ kompleksna tarča. Vrednost μ je harmonična Ritzova vrednost za τ in podprostor $\mathcal{S}$, če je $(\mu - \tau)^{-1}$ navadna Ritzeva vrednost za $S^*(A - \tau I)^{-1} S$. Definirajmo $\mathcal{U} = (A - \tau I)\mathcal{S}$. Pokaži, da velja:

(i).

$$u \in \mathbb{C}^n, u \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{C}^k, \text{ da velja } \mathcal{U} = (A - \tau I) S x,$$

kjer je x enolično določen.

(ii). *μ je harmonična Ritzova vrednost za A, tarčo τ in prostor $\mathcal{U} \Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{U}$, $(A - \tau I)^{-1} u - (\mu - \tau)^{-1} u \perp \mathcal{U}$*

(iii). *Naj bo $Y = (A - \tau I) S \in \mathbb{C}^{n \times k}$. Pokaži, da je μ harmonična Ritzova vrednost (za tarčo τ in podprostor $\mathcal{U}$) z Ritzovim vektorjem $v = Sx$, natanko takrat ko velja $Y^* Y x = (\mu - \tau) Y^* S x$.*

Rešitev.

(i). Prva točka je očitna.

(ii). Dobro preberemo in ugotovimo, da je naša trditev samo malo preoblikovana definicija.

(iii). Vemo, da velje $U = Y = (A-\tau I)S$ in $u = (A-\tau I)Sx$, oz. $(A-\tau I)^{-1}u = Sx$. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
U^*\left((A-\tau I)^{-1}u - (\mu-\tau)^{-1}u\right) &= 0\\
S^*(A-\tau I)^*\left((A-\tau I)^{-1}u - (\mu-\tau)^{-1}u\right) &= 0\\
Y^*\left(Sx - (\mu-\tau)^{-1}(A-\tau I)Sx\right) &= 0\\
Y^*(Sx - (\mu-\tau)^{-1}Yx)) = Y^*Yx &= (\mu-\tau)Y^*Sx
\end{aligned}$$

■

Naloga 1.21 *Naj bo A simetrična matrika. Če izvedemo k korakov Lanczoseve metode, dobimo $AV_k = V_{k+1}T_{k+1,k} = V_kT_k + \beta_k v_{k+1}e_k^T$, kjer je*

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{k-1} & \alpha_k \end{bmatrix}$$

Naj bodo $\theta_1,\dots,\theta_k$ Ritzeve vrednosti, $\widetilde{\theta}_1,\dots,\widetilde{\theta}_k$ pa harmonične Ritzeve vrednosti matrike A glede na V_k. Podobno naj bodo $\theta_1(\sigma),\dots,\theta_k(\sigma)$ Ritzeve vrednosti, $\widetilde{\theta}_1(\sigma),\dots,\widetilde{\theta}_k(\sigma)$ pa harmonične Ritzeve vrednosti matrike $A-\sigma I$ glede na isti podprostor kot prej. Pokažite, da veljajo naslednje zveze

(i). $\theta_i(\sigma) = \theta_i - \sigma$,

(ii). $\widetilde{\theta}_i(\sigma)$ *so rešitve enačbe*

$$\det\left((T_{k,k}-\sigma I)(T_{k,k}-(\sigma+\widetilde{\theta})I) + \beta_k^2 e_k e_k^T\right) = 0.$$

(iii). Lastne vrednosti $(k+1)\times(k+1)$ matrike

$$\begin{bmatrix} T_k - \sigma I & \beta_k e_k \\ \beta_k e_k^T & \beta_k^2/\delta_k \end{bmatrix},$$

kjer je $\delta_k^{-1} = e_k^T(T_k-\sigma I)^{-1}e_k$ so 0 in $\widetilde{\theta}_1(\sigma),\dots,\widetilde{\theta}_k(\sigma)$.

(iv). Uporabite prejšnjo točko in pokažite, da se Ritzeve in harmonične Ritzeve vrednosti $A-\sigma I$ prepletajo v smislu

$$\cdots < \widetilde{\theta}_{-1}(\sigma) < \theta_{-1}(\sigma) < 0 < \theta_1(\sigma) < \widetilde{\theta}_1(\sigma) < \dots,$$

kjer so novi indeksi določeni glede na oddaljenost od 0 v pozitivni oz. negativni smeri.

Rešitev.

(i). Očitno velja

$$V_k^T A V_k v = \theta_i v \Leftrightarrow V_k^T (A - \sigma I) V_k v = V_k^T A V_k b - \sigma v = (\theta_i - \sigma) v.$$

(ii). Po definiciji harmonične Ritzove vrednosti vemo, da velja ${V_k}^T (A - \sigma I)^{-1} V_k x = \lambda x$ Uporabimo zadnjo točko prejšnje naloge in upoštevajmo $(A - \sigma I) V_k = V_k (T_k - \sigma I) + \beta_k v_{k+1} e_k^T$ in izračunajmo

$$((A - \sigma I) V_k)^T (A - \sigma I) V_k = (T_k - \sigma I)^2 + \beta_k^2 e_k e_k^T$$
$$V_k^T (A - \sigma I) V_k = T_k - \sigma I$$

Tako dobimo da so harmonične lastne vrednosti rešitve enačbe

$$\det \Big((T_k - \sigma I)^2 + \beta_k^2 e_k e_k^T - \widetilde{\theta} (T_k - \sigma I) \Big) = 0$$

(iii). Poglejmo, kaj mora veljati za lastni vektor $k + 1 \times k + 1$ matrike:

$$\begin{bmatrix} T_k - \sigma I & \beta_k e_k \\ \beta_k e_k^T & \beta_k^2 / \delta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T_k - \sigma I) x_1 + \beta_k e_k x_2 \\ \beta_k e_k^T x_1 + \beta_k^2 e_k^T (T_k - \sigma I)^{-1} e_k x_2 \end{bmatrix} = \widetilde{\theta} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Zapišemo sistem enačb:

$$\begin{aligned} (T_k - \sigma I) x_1 + \beta_k e_k x_2 = \widetilde{\theta} x_1 \Leftrightarrow x_1 + \beta_k (T_k - \sigma I)^{-1} e_k x_2 &= \widetilde{\theta} (T_k - \sigma I)^{-1} x_1 \\ \Rightarrow e_k^T x_1 + \beta_k e_k^T (T_k - \sigma I)^{-1} e_k x_2 &= \widetilde{\theta} e_k^T (T_k - \sigma I)^{-1} x_1 \\ \beta_k \Big(e_k^T x_1 + \beta_k e_k^T (T_k - \sigma I)^{-1} e_k x_2 \Big) &= \widetilde{\theta} x_2 \end{aligned}$$

Združimo oboje in dobimo $x_2 = \beta_k \Big(e_k^T (T_k - \sigma I)^{-1} x_1 \Big)$. Vse skupaj vstavimo v prvo enačbo, označimo še $(T_k - \sigma I)^{-1} x_1 = \widetilde{x}_1$, $x_2 = \beta_k (e_k^T \widetilde{x}_1)$. Tako dobimo:

$$(T_k - \sigma I) x_1 + \beta_k e_k x_2 = \widetilde{\theta} x_1 \Rightarrow (T_k - \sigma I)^2 \widetilde{x}_1 + \beta_k^2 e_k \Big(e_k^T \widetilde{x}_1 \Big) - \widetilde{\theta} (T_k - \sigma I) \widetilde{x}_1 = 0$$

iz česar že sledi želeno. Lastno vrednost 0 dobimo, če definiramo $x_2 = 1$ in $x_1 = \beta_k (T_k - \sigma I)^{-1} e_k$.

(iv). Če poznamo točko tri, je ta točka direktna posledica Cauchyjevega izreka o prepletanju.

■

Naloga 1.22 *Naj bo U unitarna matrika in $\tau \in \mathbb{C}$ točka z absolutno vrednostjo 1, ki se razlikuje od vseh lastnih vrednosti matrike U. Definiramo*

$$A = i(U + \tau I)(U - \tau I)^{-1}.$$

Pokažite:

(i). Vse lastne vrednosti matrike A so realne.

(a) Podana ja naslednja transformacija v razširjeni kompleksni ravnini $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$$z = \Phi(w) = \frac{w + i}{w - i}$$

To je Cayleyeva transformacija. Pokaži, da Φ slika razširjeno realno os na enotski krog, kjer velja $\Phi(\infty) = 1$.

(b) *Naj bo τ točka na enotskem krogu, definiramo preslikavo:*

$$z = \Phi_\tau(w) = \tau\frac{w+i}{w-i}.$$

Pokaži, da Φ_τ slika razširjeno realno os na enotski krog, kjer velja $\Phi_\tau(\infty) = \tau$.

(c) *Pokaži, da je inverz preslikave Φ_τ enak*

$$w = \Phi_\tau^{-1}(z) = i\frac{z+\tau}{z-\tau}.$$

Inverz slika enotski krog na razširjeno realno os, kjer velja $\Phi_\tau^{-1}(\tau) = \infty$.

(ii). Lastna vrednost matrike U, ki je najbližja τ, se preslika v dominantno lastno vrednost matrike A.

(iii). Matrika A je hermitska.

Iz zgornjih ugotovitev sledi, da lahko računanje lastnih vrednosti unitarne matrike prevedemo na hermitski problem.

Rešitev.

(i). Najprej pokažimo prvo točko.

(a) Upoštevajmo, da je w realno število in $|y| = |\overline{y}|$.

$$\left|\frac{w+i}{w-i}\right| = \frac{|w+i|}{|w-i|} = \frac{|\overline{w+i}|}{|w-i|} = \frac{|w-i|}{|w-i|} = 1$$

Očitno velja $\Phi(\infty) = 1$.

(b) Ponovimo isti razmislek kot v prejšnji točki.

(c) Izračunajmo:

$$\Phi_\tau^{-1}(\Phi_\tau(w)) = i\frac{\tau\frac{w+i}{w-i}+\tau}{\tau\frac{w+i}{w-i}-\tau} = i\frac{\frac{w+i}{w-i}+1}{\frac{w+i}{w-i}-1} = i\frac{\frac{2w}{w-i}}{\frac{2i}{w-i}} = w.$$

(ii). Velja:

$$Ux = \lambda x \Leftrightarrow (U-\tau I)x = (\lambda-\tau)x \Leftrightarrow (U-\tau I)^{-1}x = \frac{1}{\lambda-\tau}x \Leftrightarrow i(U+\tau I)(U-\tau I)^{-1}x$$
$$= i\frac{1}{\lambda-\tau}(Ux+\tau x) = i\frac{1}{\lambda-\tau}(\lambda x+\tau x) = i\frac{\lambda+\tau}{\lambda-\tau}x$$

Naj bo $d = \lambda - \tau$. Potem velja

$$\left|i\frac{\lambda+\tau}{\lambda-\tau}\right|^2 = \left|\frac{2\tau+d}{d}\right|^2 = \left|2\frac{\tau}{d}+1\right|^2 = \overline{\left(2\frac{\tau}{d}+1\right)}\left(2\frac{\tau}{d}+1\right) = 1+4\frac{|\tau|^2}{|d|^2}+2\left(\overline{(\frac{\tau}{d})}+\frac{\tau}{d}\right)$$
$$= 1+4\frac{|\tau|^2}{|d|^2}+4\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{\tau}{d}\right)$$

BŠS predpostavimo $\tau = 1$. Tako se izraz poenostavi v

$$1+4\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{1}{d}\right)^2+4\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{1}{d}\right)^2+4\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{1}{d}\right) = \left(1+2\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{1}{d}\right)\right)^2+4\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{1}{d}\right)^2$$

Število d predstavlja dolžino tangente v krogu med λ in τ, njena velikost očitno narašča z oddaljenostjo od τ. Velja $d = (\cos(\phi) - 1) + i\sin(\phi)$, $|d|^2 = (\cos(\phi) - 1)^2 + \sin(\phi)^2 = 2(1 - \cos(\phi))$, $\frac{1}{d} = \frac{(\cos(\phi)-1)-i\sin(\phi)}{2(1-\cos(\phi))} = \frac{1}{2} - i\frac{\sin(\phi)}{2(1-\cos(\phi))}$. Tako končno dobimo

$$\left(1 + 2 \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{1}{d}\right)\right)^2 + 4 \cdot \mathrm{Im}\left(\frac{1}{d}\right)^2 = 4 + 4\frac{\sin^2(\phi)}{(1-\cos(\phi))^2} = 4 + 4\cot^2(\phi/2)$$

(iii). Pokažimo še, da je matrika hermitska.

$$(i(U + \tau I)(U - \tau I)^{-1})^H = -i\left(U^H - \tau^H I\right)^{-1}(U^H + \tau^H I) = -i\left(U - \tau^H I\right)^{-1}(U + \tau^H I)$$

$$-i\left(U - \tau^H I\right)^{-1}(U + \tau^H I) \overbrace{=}^{?} i(U + \tau I)(U - \tau I)^{-1})^H \Leftrightarrow$$

$$-(U + \tau^H I)(U - \tau I) \overbrace{=}^{?} (U + \tau I)\left(U - \tau^H I\right)$$

$$= -U^2 + (\tau - \tau^H)U + \tau\tau^H I \overbrace{=}^{?} U^2 + (\tau - \tau^H)U - \tau\tau^H I \Leftrightarrow -I + I = I - I$$

S tem smo dokaz zaključili.

■

Naloga 1.23 *Pokaži naslednjo trditev. Če Jacobijeva metodo konvergira za sistem $Ax = b$, potem konvergira tudi za $A^T x = d$.*

Rešitev. Spomnimo se iteracijske matrike Jacobijeve metode za reševanje linearnih sistemov. Rešujemo sistem $Ax = b$. Matriko A razdelimo na spodnji trikotnik brez diagonale L, diagonalo D in zgornji trikotnik brez diagonale U. Torej iz $(D + L + U)x = b$ dobimo iteracijo $x^{(1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(0)} + D^{-1}b$. Iteracijska matrika je $R_J = -D^{-1}(L + U)$, metoda konvergira, natanko takrat ko je $\rho(R_J) < 1$. Pokazali bomo, da velja $\rho(R_J)(A) = \rho(R_J)(A^T)$. Izračunajmo $R_J(A^T) = -D^{-1}(L^T + U^T)$ in transponirajmo. Dobimo $R_J(A^T)^T = -(L + U)D^{-1}$. Če izrazimo $-(L + U)$ iz obeh iteracijskih matrik, dobimo

$$R_J(A^T)^T D = DR_J(A), \quad R_J(A) = D^{-1}R_J(A^T)D.$$

Torej sta $R_J(A^T)^T$ in $R_J(A)$ podobni matriki, tako imata enak spektralni radij. Prav tako pa imata enak spektralni radij transponirani matriki. Torej je $\rho(R_J(A)) = \rho(R_J(A^T))$. ■

Posledica 1.2 *Če je A po stolpcih diagonalno dominantna matrika, potem Jacobijeva metoda konvergira.*

Rešitev. Iz izreka iz predavanj vemo, da je to res za matriko, ki je diagonalno dominantna po vrsticah. Taka pa je matrika A^T, saj je A diagonalno dominantna po stolpcih. ■

Naloga 1.24 *Preuredi sistem enačb*

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \end{array},$$

tako da bo Jacobijeva metoda zagotovo konvergirala. Izračunaj prvi približek z začetnim vektorjem $x = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Algoritem 5: Jacobijeva iteracija

$x^{(0)}$ začetni približek;
Ponavljaj

$$x_{k+1}^{(r+1)} = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{i=1, i\neq k}^{n} a_{ki} x_i^{(r)} \right)$$

Krajše $R_J = -D^{-1}(L+U), \quad c = D^{-1}b$;
$x^{(r+1)} = R_J x^{(r)} + c$;

Algoritem 6: Gauss-Seidlova metoda

$x^{(0)}$ začetni približek;
Ponavljaj

$$x_{k+1}^{(r+1)} = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} x_i^{(r+1)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki} x_i^{(r)} \right)$$

Krajše $R_{GS} = -(L+D)^{-1}U, \quad c = (L+D)^{-1}b$;
$x^{(r+1)} = R_{GS} x^{(r)} + c$;

Algoritem 7: SOR metoda

$x^{(0)}$ začetni približek;
Izberi $\omega \in (0,2)$;
Ponavljaj

$$x_{k+1}^{(r+1)} = (1-\omega) x_k^{(r)} + \omega \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} x_i^{(r+1)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki} x_i^{(r)} \right)$$

Krajše $R_{SOR} = -(\omega L + D)^{-1}((1-\omega)D - \omega U)$;

Rešitev. Matrične vrstice preuredimo tako, da bo nova matrika diagonalno dominantna po stolpcih. Rešujemo ekvivalenten problem

$$\begin{array}{ccccccc} 4x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \end{array} .$$

Nova matrika je diagonalno dominantna po stolpcih, velja $|4| > |2| + |1|$, $|4| > |1| + |1|$ ter $|4| > |3| + |0|$. Izračunajmo

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(3 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(3 + 0.5) = \frac{7}{8} = 0.875 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{4}(1 - 2x_1^{(0)} - 3x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(1 - 2\frac{3}{2} - 3) = -\frac{5}{4} = -1.25 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{4}(4 - x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) = \frac{1}{4}(4 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} = 0.75. \end{aligned}$$

■

Naloga 1.25 *Naj bo $||R|| < 1$ in poleg tega je matrična norma usklajena z vektorsko. Dokaži, da velja*

(i).
$$||x^{(r+1)} - x^{(r)}|| \leq ||R||||x^{(r)} - x^{(r-1)}||$$

(ii).
$$||x^{(r)} - x^*|| \leq \frac{||R||}{1 - ||R||}||x^{(r)} - x^{(r-1)}||$$

(iii).
$$||x^{(r)} - x^*|| \leq \frac{||R||^{(r)}}{1 - ||R||}||x^{(1)} - x^{(0)}||,$$

kjer je x^* točna rešitev. Velja še $x^{(r+1)} = Rx^{(r)} + c$.

Rešitev.

(i). Izračunajmo
$$||x^{(r+1)} - x^{(r)}|| = ||Rx^{(r)} + c - Rx^{(r-1)} - c|| =$$
$$||Rx^{(r)} - Rx^{(r-1)}|| \leq ||R||||x^{(r)} - x^{(r-1)}||.$$

(ii). Velja
$$||x^{(r)} - x^*|| = ||x^{(r)} - x^{(r+1)} + x^{(r+1)} - x^{(r+2)} + \ldots + x^*|| \leq$$
$$||x^{(r)} - x^{(r+1)}|| + ||x^{(r+1)} - x^{(r+2)}|| + \ldots \leq$$
$$||R||||x^{(r)} - x^{(r-1)}|| + ||R||^2||||x^{(r+1)} - x^{(r)}|| + \ldots \leq$$
$$\left(||R|| + ||R||^2 + \ldots\right)||||x^{(r)} - x^{(r-1)}|| =$$
$$||R||\left(1 + ||R|| + ||R||^2 + \ldots\right)||||x^{(r)} - x^{(r-1)}|| = ||R||\frac{1}{1 - ||R||}||x^{(r)} - x^{(r+1)}||.$$

Vse dobimo z zaporedno uporabo (i).

(iii). Iz (ii) dobimo

$$||x^{(r)} - x^*|| \leq \frac{||R||}{1 - ||R||} ||x^{(r)} - x^{(r-1)}||$$

$$\leq \frac{||R||^2}{1 - ||R||} ||x^{(r-1)} - x^{(r-2)}|| \leq \ldots \leq \frac{||R||^r}{1 - ||R||} ||x^{(1)} - x^{(0)}||.$$

■

Naloga 1.26 *Izračunaj prva dva približka sistema*

$$\begin{array}{rcrcrcl} 10x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 5 \end{array},$$

po Jacobijevi in Gauss-Seidlovi metodi z začetnim približkom $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. *Oceni koliko korakov iteracije potebuješ, da bo veljalo* $||x^{(r)} - x^*||_\infty \leq 10^{-5}$.

Rešitev. Matrika je enaka

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 4 \\ -1 & 8 & 2 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Vektorja sta

$$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Velja ocena

$$||x^{(r)} - x^*|| \leq \frac{||R||^{(r)}}{1 - ||R||} ||x^{(1)} - x^{(0)}||,$$

oziroma

$$||x^{(r)} - x^*|| \leq \frac{||R||^{(r-1)}}{1 - ||R||} ||x^{(2)} - x^{(1)}||.$$

To smo dokazali.

Najprej izračunajmo približka za Jacobijevo metodo

$$x_{k+1}^{(r+1)} = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{i=1, i \neq k}^{n} a_{ki} x_i^{(r)} \right).$$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}(8 + 2x_2^{(0)} - 4x_3^{(0)}) = \frac{1}{10}(8 + 2) = 1 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{8}(8 + x_1^{(0)} - 2x_3^{(0)}) = \frac{1}{8}(8 + 1) = 1.125 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}(5 - x_1^{(0)} + 3x_2^{(0)}) = \frac{1}{10}(5 - 1 + 3) = 0.7 \end{aligned}$$

Dobili smo $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1.125 & 0.7 \end{bmatrix}^T$.

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{10}(8 + 2x_2^{(1)} - 4x_3^{(1)}) = \frac{1}{10}(8 + 2 \cdot 1.125 - 4 \cdot 0.7) = 0.745 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{8}(8 + x_1^{(1)} - 2x_3^{(1)}) = \frac{1}{8}(8 + 1 - 2 \cdot 0.7) = 0.95 \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{10}(5 - x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)}) = \frac{1}{10}(5 - 1 + 3 \cdot 1.125) = 0.7375 \end{aligned}$$

Dobili smo $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.745 & 0.95 & 0.7375 \end{bmatrix}^T$. Za oceno rabimo še $||R_J||_\infty$. Izračunajmo

$$R_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & & \\ & \frac{1}{8} & \\ & & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

Neskončna norma je ravno največja vsota absolutnih vrednosti po vrsticah, $||R_J||_\infty = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 0.6$. Izračunajmo

$$||x^{(2)} - x^{(1)}||_\infty = || \begin{bmatrix} -0.255 \\ -0.175 \\ 0.0375 \end{bmatrix} ||_\infty = 0.225.$$

Upoštevajmo oceno in dobimo

$$||x^{(r)} - x^*||_\infty \le \frac{0.6^{r-1}}{1-0.6} ||x^{(2)} - x^{(1)}||_\infty = \frac{0.6^{r-1}}{0.4} 0.225 \le 10^{-5}.$$

Tako dobimo, da mora veljati

$$0.6^{r-1} \le \frac{0.4 \cdot 10^{-5}}{0.225}.$$

Z antilogaritmiranjem dobimo $r \ge 22.411 \doteq 23$.

Izračunajmo še približka za Gauss-Seidlovo metodo

$$x_{k+1}^{(r+1)} = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} x_i^{(r+1)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki} x_i^{(r)} \right)$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}(8 + 2x_2^{(0)} - 4x_3^{(0)}) = \frac{1}{10}(8+2) = 1 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{8}(8 + x_1^{(1)} - 2x_3^{(0)}) = \frac{1}{8}(8+1) = 1.125 \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}(5 - x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)}) = \frac{1}{10}(5 - 1 + 3 \cdot 1.125) = 0.7375
\end{aligned}$$

Dobili smo $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1.125 & 0.7375 \end{bmatrix}^T$.

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}(8 + 2x_2^{(1)} - 4x_3^{(1)}) = \frac{1}{10}(8 + 2 \cdot 1.125 - 4 \cdot 0.7375) = 0.73 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{8}(8 + x_1^{(2)} - 2x_3^{(1)}) = \frac{1}{8}(8 + 0.73 - 2 \cdot 0.7375) = 0.906875 \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}(5 - x_1^{(2)} + 3x_2^{(2)}) = \frac{1}{10}(5 - 0.73 + 3 \cdot 0.906875) = 0.6990625
\end{aligned}$$

Dobili smo $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.73 & 0.906875 & 0.6990625 \end{bmatrix}^T$. Za oceno rabimo še $||R_{GS}||_\infty$. Izračunajmo

$$R_{GS} = -(D+L)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & -0.4 \\ 0 & 0.025 & -0.3 \\ 0 & -0.0125 & -0.05 \end{bmatrix}.$$

Tako dobimo $||R_{GS}||_\infty = 0.6$, $||x^{(2)} - x^{(1)}||_\infty = 0.27$. Hočemo, da velja

$$||x^{(r)} - x^*||_\infty \le \frac{0.6^{r-1}}{1-0.6} ||x^{(2)} - x^{(1)}||_\infty = \frac{0.6^{r-1}}{0.4} \cdot 0.27.$$

Podobno kot prej z antilogaritmiranjem dobimo $r \ge 22.768 \doteq 23$. ■

Naloga 1.27 *Dokaži, da Jacobijeva in Gauss-Seidlova iterativna metoda konvergirata za matriko* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Spmonimo se, da je iteracijska matrika za Jacobijevo metodo

$$R_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Pokazati moramo, da velja $\rho(R_J) < 1$. Kar pomeni, da mora za vsako lastno vrednost veljati $|\lambda| < 1|$. Poglejmo si matriko

$$R_J - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & -\lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ & & & & \frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Če velja $|\lambda| > 1$, je matrika $R_J - \lambda I$ strogo diagonalno dominantna in tako obrnljiva. Pokazati moramo še, da R_J nima lastne vrednosti 1 ali -1.

Izračunajmo determinatno

$$\det(R_J - I) = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & -1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ & & & & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-2)^n}\det(A).$$

Uporabili bomo indukcijo in upoštevali, da lahko uporabimo izračun determinante kot v Sturmovem zaporedju. Ugotovimo, da velja $\det(A_n) = n+1$. Uporabimo

$$p_i(\lambda) = (d_i - \lambda)p_{i-1}(\lambda) - u_{i-1}^2 p_{i-2}(\lambda), \text{ za } i = 2, \dots, n,$$

torej velja

$$\det(A_i) = 2\det(A_{i-1}) - (-1)^2\det(A_{i-2}) = 2i - (i-1) = i+1.$$

Kar pomeni, da je matrika A simetrična in pozitivno definitna. Podobno dokažemo, da velja

$$\det(R_J + I_n) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ & & & & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-2)^n}\det(A-4I) = \frac{1}{(-2)^n}(-1)^n(n+1).$$ Upoštevamo,

da velja

$$\det(A_i - 4I_i) = (2-4)(-1)^{i-1}i - (-1)^2(-1)^{i-2}(i-1) = (-1)^i(2i-(i-1)) = (-1)^i(i+1).$$

$\blacksquare$