Prva domača naloga iz kompleksne analize

29.10.2010

V nalogah je z $D(a, R)$ označen disk s središčem v točki $a \in \mathbb{C}$ in radijem $R > 0$. Z $\mathbb{D}$ je označen enotski disk, $\mathbb{D} = D(0, 1)$.

1. Naj bo $0 < r < R$ in A kolobar, $A = \{z \in \mathbb{C}; r \leq |z| \leq R\}$. Pokaži, da obstaja $\epsilon > 0$, da za vsak polinom p velja
$$\max_{z \in A} \left| p(z) - \frac{1}{z} \right| > \epsilon.$$
2. Naj bosta f in g holomorfni funkciji na okolici zaprtega diska $\overline{D(a, R)}$ in brez ničel. Pokaži, da v primeru, ko je
$$|f(z)| = |g(z)|, \quad \forall z \in \partial D(a, R),$$
obstaja kompleksna konstanta λ, $|\lambda| = 1$, da je $f = \lambda g$.
3. Dokaži, da za poljubne $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \partial\mathbb{D}$ obstaja $z \in \partial\mathbb{D}$, za katerega je
$$|z - w_1| \cdot |z - w_2| \cdot \ldots \cdot |z - w_n| = 1.$$
4. Pokaži, da ne obstaja holomorfna funkcija $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, za katero bi veljalo
$$|f(z)| \geq \frac{1}{1 - |z|}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$
5. Naj bo $\Omega_1 = D(i, 1/2)$ in $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\, z < 0 \ \wedge \ |\mathrm{Im}\, z| < \pi\}$. Ali obstaja holomorfna preslikava $f \colon \Omega_1 \to \Omega_2$, za katero velja
$$f(1/4 + i) = \ln 1/2 \quad \text{in} \quad f'(1/4 + i) = 5?$$
6. Naj bo $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C}; |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{4}\right\}$ in $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija za katero velja,
$$|f(z)| < e^{\mathrm{ch}\,(\mathrm{Re}\, z)}, \quad \forall z \in \Omega.$$
Pokaži, da ob predpostavki, da je f omejena na $\partial\Omega$, velja, da je f omejena na celem območju Ω.

Rok za oddajo nalog je 30. november 2010 preko elektronske pošte na uros.kuzman@gmail.com ali v službeni predalček na Jadranski 19, Ljubljana.