# Druga domača naloga iz kompleksne analize

8.12.2010

V nalogah je z $D(a, R)$ označen disk s središčem v točki $a \in \mathbb{C}$ in radijem $R > 0$. Z $\mathbb{D}$ je označen enotski disk, $\mathbb{D} = D(0, 1)$, z $\mathbb{D}^*$ pa punktiran enotski disk. Z $\mathcal{O}(\Omega)$ je označena družina holomorfnih funkcij definiranih na območju $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, s $\hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ pa holomorfna ogrinjača kompakta $K \subset \Omega$.

1. Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ zaporedje funkcij, ki konvergira enakomerno po kompaktih k nekonstantni holomorfni funkciji $f$. Pokaži, da za poljuben $a \in \Omega$ obstaja zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$, ki konvergira k $a$ in za katero obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $f_n(a_n) = f(a)$ za vsak $n \geq N$.
2. Naj bo $\lambda \in (e, \infty)$ in $n \in \mathbb{N}$. Pokaži, da je število rešitev enačbe $e^z = \lambda z^n$ na $\mathbb{D}$ enako $n$. Pokaži, da so vse rešitve različne.
3. Naj bo $u_n$ zaporedje realnih funkcij, definiranih na enostavno povezanem območju $\Omega$, ki konvergira enakomerno po kompaktih k funkciji $u$. Naj bo $v_n$ zaporedje realnih funkcij z lastnostjo $f_n = u_n + iv_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ in naj obstaja limita $v_0 = \lim_{n\to\infty} v_n(0)$. Pokaži, da je tedaj družina $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ normalna.
   Nasvet: Najprej pokaži, da je normalna družina $\left\{e^{f_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Pokaži, da so elementi družine
   $$\mathcal{F} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nz); |a_n| < \frac{1}{n!}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$
   holomorfne funkcije na $\mathbb{C}$. Pokaži, da je $\mathcal{F}$ normalna.
5. Naj bo $G = \{x + iy \in \mathbb{C}; y > x^3\}$. Določi vse holomorfne funkcije, ki slikajo iz $\mathbb{C}$ v G.
6. Poišči primer kompaktne množice $K$, ki je vsebovana v preseku območij $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ in za katero velja $\hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_1)} \neq \hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_2)}$.

**Rok za oddajo nalog je 7. januar 2011 preko elektronske pošte na uros.kuzman@gmail.com ali v službeni predalček na Jadranski 19, Ljubljana.**