Tretja domača naloga iz kompleksne analize

11.1.2011

V nalogah je z $\mathcal{O}(\Omega)$ je označena družina holomorfnih funkcij definiranih na območju $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Z $\mathbb{D}$ je označen enotski disk.

1. Konstruiraj meromorfno funkcijo f na $\mathbb{C}$, ki ima pole druge stopnje natanko v točkah $\mathbb{Z} \times i\mathbb{Z}$ in zanjo velja:
   $\operatorname{Res}(f, \omega) = 0, \operatorname{Res}\left((z-\omega)f, \omega\right) = 1, \forall \omega \in \mathbb{Z} \times i\mathbb{Z}$.
2. Poišči vse cele funkcije f, ki rešijo enačbo $f(2z) = (1-2z)f(z)$.
   Nasvet: Obravnavaj ničle funkcije f.
3. Naj bo I najmanjši ideal kolobarja $(\mathcal{O}(\mathbb{C}), +, \cdot)$, ki vsebuje funkciji $\sin(\pi z^2)$ in $\cos(\pi z^4/2)$. Poišči njegov generator.
4. Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ območje, $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ in $\{(f_t, D_t);\ t \in [0,1]\}$ analitično nadaljevanje funkcijskega elementa (f_0, D_0) vzdolž neke poti. Naj velja $f_t(D_t) \subset \Omega$ za vsak $t \in [0,1]$ in $h(f_0(z)) = z$ za vsak $z \in D_0$. Dokaži, da je tedaj $h(f_1(z)) = z$ za vsak $z \in D_1$.
   Nasvet: Pokaži, da je množica $T = \{t \in [0,1]\,; h(f_t(z)) = z,\ \ \forall z \in D_t\}$ neprazna, odprta in zaprta podmnožica intervala $[0,1]$.

Naj bo $S = \{iy; y \in \mathbb{R},\ \ |y| \geq 1\}, T = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}z = \pi/2, \mathrm{Im}z \neq 0\}$ in $\Omega = (-\pi/2, \pi/2) \times i(-\infty, \infty)$. Funkcija $f(z) = \mathrm{tg}z$ bijektivno slika Ω v $\mathbb{C}\backslash S$ in T v S. Ker je periodična s periodo $k\pi$, ji ne moremo poiskati inverza, definiranega na celotni kompleksni ravnini. Če pa se omejimo na zarezano ravnino $\mathbb{C}\backslash S$, lahko izbiramo med števno mnogo vejami. V nadaljevanju bomo z $\mathrm{Arctg}(z)$ označili glavno vejo, ki ima zalogo vrednosti v Ω.

5. a) Pokaži, da število $\frac{1+iz}{1-iz}$ leži na negativni realni osi natanko tedaj, ko je $z \in S$. Pokaži, da na $\mathbb{C}\backslash S$ velja $\mathrm{Arctg}(z) = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$, kjer smo izbrali glavno vejo logaritma.
   b) Poišči maksimalno območje neoviranega analitičnega nadaljevanje za funkcijo
   $$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} z^{2n}.$$
   Skiciraj ali opiši Riemannovo ploskev, ki pripada kompletni analitični funkciji dobljeni iz funkcijskega elementa $(f, \mathbb{D})$.

Rok za oddajo nalog je 31. januar 2011. Zagovori nalog bodo potekali 2. februarja 2011.