1. domača naloga iz Liejevih grup

Naloge je treba reševati samostojno.
Rok za oddajo: 5 dni pred ustnim izpitom in najkasneje do 15. septembra 2014.

Naj bo $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ algebra kvaternionov. Vsak kvaternion $q \in \mathbb{H}$ lahko predstavimo v obliki

$$q = (t, x, y, z) = (t, \vec{r}),$$

kjer je t skalarni del, $\vec{r} = (x, y, z)$ pa vektorski del kvaterniona. Množenje kvaternionov lahko potem izrazimo s formulo

$$(t_1, \vec{r}_1)(t_2, \vec{r}_2) = (t_1 t_2 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2, t_1 \vec{r}_2 + t_2 \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2).$$

Enota za množenje je kvaternion $e = (1, 0, 0, 0)$, množica $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ pa tvori grupo za množenje. Za vsak $q \in \mathbb{H}^\times$ definiramo levo translacijo $L_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ s predpisom $L_q(p) = qp$. Vektorsko polje X na $\mathbb{H}^\times$ je potem po definiciji levo invariantno, če velja

$$(dL_q)_p(X_p) = X_{qp}$$

za vsaka $q, p \in \mathbb{H}^\times$. Izberimo tangentne vektorje $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_e, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_e, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_e \in T_e\mathbb{H}$ in z X, Y in Z označimo njihove (enolične) razširitve do levo invariantnih vektorskih polj na $\mathbb{H}^\times$.

(a) Poišči predpise za vektorska polja X, Y in Z.

(b) Izračunaj tokove vektorskih polj X, Y in Z.

(c) Izračunaj komutatorje vektorskih polj X, Y in Z. Kateri znani Liejevi algebri je izomorfna Liejeva algebra, ki jo generirajo ta tri polja?

(d) Za vsak $q \in \mathbb{H}^\times$ definirajmo podprostor $F_q = \mathrm{Lin}\{X_q, Y_q, Z_q\} \subset T_q\mathbb{H}^\times$ in definirajmo podsveženj $F = \bigcup_{q \in \mathbb{H}^\times} F_q$ tangentnega svežnja $T(\mathbb{H}^\times)$. Pokaži, da je F integrabilen sveženj in nato opiši liste inducirane foliacije na $\mathbb{H}^\times$.