2. domača naloga iz Liejevih grup

Naloge je treba reševati samostojno.
Rok za oddajo: 5 dni pred ustnim izpitom in najkasneje do 15. septembra 2014.

Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^4$ lahko študiramo evklidsko in simplektično strukturo. Z uporabo identifikacije $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$, ki vektor (x_1, x_2, y_1, y_2) preslika v $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$, pa na $\mathbb{R}^4$ dobimo tudi kompleksno strukturo. Množenje z i na $\mathbb{C}^2$ se preko tega izomorfizma prevede na množenje z matriko

$$\mathrm{J}_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Malo splošneje pa kompleksno linearne preslikave opišemo takole. Vsako matriko $C \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ lahko enolično zapišemo v obliki $C = A + iB$, kjer sta $A, B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Definirajmo preslikavo $\phi : \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ s predpisom

$$\phi(A + iB) = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

Množenje z matriko $\phi(A + iB)$ v $\mathbb{R}^4$ ustreza množenju z matriko $A + iB$ v $\mathbb{C}^2$.

(a) Pokaži, da je ϕ gladek, injektiven homomorfizem Liejevih grup in da so v njegovi sliki natanko matrike, ki komutirajo z matriko $\mathrm{J}_{\mathbb{C}}$.

(b) Pokaži, da velja
$$\det(\phi(A + iB)) = |\det(A + iB)|^2.$$

(c) Homomorfizem ϕ nam omogoča, da gledamo na grupi $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ in $\mathrm{U}(2) \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ kot podgrupi grupe $\mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$. Pokaži, da velja

$$\mathrm{U}(2) = \mathrm{SO}(4) \cap \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R}).$$

(d) Poišči center grupe $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.