4. domača naloga iz Liejevih grup

Naloge je treba reševati samostojno.
Rok za oddajo: 5 dni pred ustnim izpitom in najkasneje do 15. septembra 2014.

Paulijeve matrike so matrike v $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, ki so definirane s predpisi

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Za poljuben $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ naj bo $\sigma(\vec{s}) = s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2 + s_3\sigma_3$. Pokaži, da potem za vsak $t \in \mathbb{R}$ in vsak $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$, ki zadošča pogoju $|\vec{s}| = 1$, velja

$$e^{it\sigma(\vec{s})} = \cos t \,\mathrm{I} + i \sin t\, \sigma(\vec{s}).$$

(b) Pokaži, da je množica $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ baza Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ in da je linearna preslikava $\Phi : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$, ki je na baznih vektorjih definirana s predpisi

$$i\sigma_1 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, i\sigma_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, i\sigma_3 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

izomorfizem Liejevih algeber.

(c) Naj bo $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ enolično določen homomorfizem Liejevih grup, ki integrira preslikavo Φ (to pomeni, da je $d\phi = \Phi$) in naj bo matrika $A \in \mathrm{SU}(2)$ dana s predpisom

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Izračunaj matriko $\phi(A)$.

(d) Poišči in opiši vse povezane Liejeve podgrupe grupe $\mathrm{SU}(2)$.