5. domača naloga iz Liejevih grup

Naloge je treba reševati samostojno.
Rok za oddajo: 5 dni pred ustnim izpitom in najkasneje do 15. septembra 2014.

Naj bo $\mathcal{P}_n$ realni vektorski prostor homogenih polinomov stopnje n v treh spremenljivkah x, y in z. Vsak tak polinom $p \in \mathcal{P}_n$ je oblike

$$p(x,y,z) = \sum_{k+l+m=n} a_{klm} x^k y^l z^m$$

za neka realna števila a_{klm} in nenegativna cela števila k, l in m. Nadalje naj bo $\mathcal{H}_n$ podprostor prostora $\mathcal{P}_n$ harmoničnih polinomov

$$\mathcal{H}_n = \{p \in \mathcal{P}_n \mid \Delta p = 0\}.$$

Na prostoru $\mathcal{P}_n$ definirajmo reprezentacijo ρ Liejeve grupe $\mathrm{SO}(3)$ s predpisom

$$(Q \cdot p)(x,y,z) = p([x,y,z]\,Q)$$

za $Q \in \mathrm{SO}(3)$.

(a) Izračunaj odvod $\mathfrak{L}(\rho)$ reprezentacije ρ in pokaži, da velja:

$$\mathfrak{L}(\rho)(W_x) = z\tfrac{\partial}{\partial y} - y\tfrac{\partial}{\partial z},$$
$$\mathfrak{L}(\rho)(W_y) = x\tfrac{\partial}{\partial z} - z\tfrac{\partial}{\partial x},$$
$$\mathfrak{L}(\rho)(W_z) = y\tfrac{\partial}{\partial x} - x\tfrac{\partial}{\partial y},$$

kjer so matrike

$$W_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

baza Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$. Pri tem je na primer $\mathfrak{L}(\rho)(W_x) = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_n)$ linearna preslikava, ki je definirana s predpisom

$$\mathfrak{L}(\rho)(W_x)(p) = z\tfrac{\partial p}{\partial y} - y\tfrac{\partial p}{\partial z}$$

za $p \in \mathcal{P}_n$.

(b) Pokaži, da $\mathfrak{L}(\rho)(W_x)$, $\mathfrak{L}(\rho)(W_y)$ in $\mathfrak{L}(\rho)(W_z)$ komutirajo z Laplaceovim operatorjem Δ in od tod sklepaj, da je $\mathcal{H}_n$ $\mathrm{SO}(3)$-invariantni podprostor prostora $\mathcal{P}_n$.

(c) Poišči izomorfizem med adjungirano reprezentacijo grupe $\mathrm{SO}(3)$ in reprezentacijo $\mathcal{H}_1$. Nato izračunaj karakter adjungirane reprezentacije grupe $\mathrm{SO}(3)$.

(d) Definirajmo reprezentacijo θ grupe $\mathrm{SO}(3)$ na realnem vektorskem prostoru $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ s predpisom

$$\theta(Q)(X) = QXQ^T$$

za $Q \in \mathrm{SO}(3)$ in $X \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Razcepi reprezentacijo θ na vsoto nerazcepnih reprezentacij.