

Liejeve grupe

Gladke mnogoterosti

Gladke mnogoterosti so geometrični prostori, ki posplošujejo pojma krivulj in ploskev na višje dimenzije. Gladka struktura nam omogoča, da lahko na njih definiramo gladke funkcije, vektorska polja ter podobne objekte in jih tudi smiselno odvajamo in integriramo.

Gladke mnogoterosti se pojavljajo večinoma v naslednjih dveh oblikah:

- kot množice, ki so opremljene z gladkim atlasom,
- kot podmnogoterosti v Evklidskem prostoru.

(1) Konstruiraj atlasa na projektivni premici in projektivni ravnini.

Rešitev: Najprej se spomnimo na osnovne pojme, ki jih potrebujemo za definicijo gladke mnogoterosti. Naj bo M neka množica oziroma topološki prostor. *Karta* dimenzije m na M je bijekcija

$$\phi : U \rightarrow \phi(U)^{\text{odp}} \subset \mathbb{R}^m$$

z neke podmnožice $U \subset M$ na neko odprto podmnožico $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$. Karto ponavadi krajše označimo s (ϕ, U) . Če je M topološki prostor, dodatno zahtevamo še, da je U odprta podmnožica M , preslikava ϕ pa homeomorfizem.

Karta nam omogoča, da točke množice $U \subset M$ opišemo s koordinatami. Če lahko celo množico M pokrijemo s kompatibilnimi kartami, rečemo, da je M mnogoterost.

Kompatibilnost kart formalno definiramo na naslednji način. Recimo, da sta (ϕ_1, U_1) in (ϕ_2, U_2) karti na M , za kateri je $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Torej lahko točke v $U_1 \cap U_2$ opišemo z dvema naboroma koordinat, zato je smiselno zahtevati, da sta ta dva nabora gladko odvisna eden od drugega. Eksplicitno to pomeni, da morata biti $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ in $\phi_2(U_1 \cap U_2)$ odprti množici v \mathbb{R}^m in da je preslikava

$$\phi_2 \circ (\phi_1|_{U_1 \cap U_2})^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

gladek difeomorfizem med njima.

Karta na M nam med drugim omogoča odvajati funkcije. Če dve karti nista kompatibilni, se lahko zgodi, da je na primer neka funkcija v enih koordinatah odvedljiva, v drugih pa ne. Ker želimo, da je pojem odvedljivosti funkcije neodvisen od izbire koordinat, se omejimo samo na nabore kart, ki so paroma kompatibilne. Družini paroma kompatibilnih kart na M , ki pokrivajo celo množico M , rečemo *gladek atlas* na M .

Projektivna premica:

Realna projektivna premica $\mathbb{R}P^1$ je množica vseh premic v \mathbb{R}^2 , ki potekajo skozi izhodišče

$$\mathbb{R}P^1 = \{\text{premise skozi izhodišče v } \mathbb{R}^2\}.$$

Točke na projektivni premici ponavadi označujemo s homogenimi koordinatami. Za vsak par $(x, y) \neq (0, 0)$ s simbolom $[x : y]$ označimo premico, ki poteka skozi izhodišče in pa skozi točko $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ker več točk določa isto premico, se moramo zavedati, da pri računanju s homogenimi koordinatami veljajo enakosti

$$[x : y] = [\lambda x, \lambda y]$$

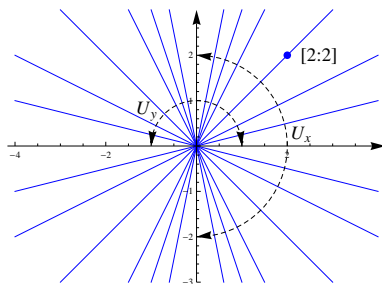
za poljuben $(x, y) \neq (0, 0)$ in poljuben neničeln $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sedaj bi radi na $\mathbb{R}P^1$ konstruirali gladek atlas. Za koordinato lahko vzamemo kar naklon premice, vendar pa moramo biti malce pazljivi. Najprej definirajmo naslednji podmnožici projektivne premice:

$$U_x = \{\text{premise, ki niso pravokotne na } x\text{-os}\},$$

$$U_y = \{\text{premise, ki niso pravokotne na } y\text{-os}\}.$$

Vsaka izmed njiju je skoraj cela projektivna premica, razen po ene točke v obeh primerih.



Homogene koordinate premic, ki ležijo v množici U_x , imajo neničelno prvo koordinato, zato lahko definiramo bijekcijo $\phi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$\phi_x([x : y]) = \frac{y}{x}.$$

Definicija je dobra zaradi multiplikativne lastnosti homogenih koordinat. Analogno lahko definiramo bijekcijo $\phi_y : U_y \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$\phi_y([x : y]) = \frac{x}{y}.$$

Sedaj moramo preveriti, da sta ti dve karti kompatibilni. V preseku $U_x \cap U_y$ so vse premice razen koordinatnih osi. Sliki $\phi_x(U_x \cap U_y)$ in $\phi_y(U_x \cap U_y)$ sta obe enaki odprti podmnožici $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$, prehodna preslikava $\phi_y \circ (\phi_x|_{U_x \cap U_y})^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pa ima predpis

$$(\phi_y \circ (\phi_x|_{U_x \cap U_y})^{-1})(r) = \frac{1}{r}.$$

Vidimo, da je ta preslikava gladka in ima gladek inverz, zato sta karti kompatibilni. Na projektivni premici definirata gladek strukturo, ki naredi $\mathbb{R}P^1$ difeomorfno krožnici S^1 .

Projektivna ravnina:

Realna projektivna ravnina $\mathbb{R}P^2$ je množica vseh premic v \mathbb{R}^3 , ki potekajo skozi izhodišče

$$\mathbb{R}P^2 = \{\text{premise skozi izhodišče v } \mathbb{R}^3\}.$$

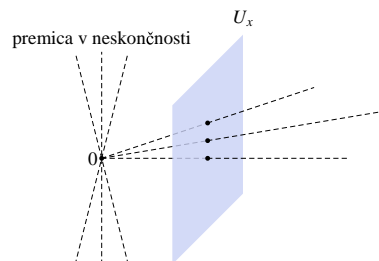
Podobno kot na projektivni premici lahko tudi točke projektivne ravnine opišemo s homogenimi koordinatami. Tokrat bomo celo ravnino pokrili s tremi kartami:

$$U_x = \{\text{premise, ki niso pravokotne na } x\text{-os}\},$$

$$U_y = \{\text{premise, ki niso pravokotne na } y\text{-os}\},$$

$$U_z = \{\text{premise, ki niso pravokotne na } z\text{-os}\}.$$

Karta U_x na primer vsebuje vse premice, razen tistih, ki ležijo v yz -ravnini. Le-te pa tvorijo kopijo projektivne premice v projektivni ravnini, ki ji rečemo premica v neskončnosti. Projektivno ravnino lahko torej smatramo kot unijo Evklidske ravnine in pa premice v neskončnosti.



Sedaj bomo definirali bijekcije $\phi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi_y : U_y \rightarrow \mathbb{R}^2$ in $\phi_z : U_z \rightarrow \mathbb{R}^2$ s predpisi:

$$\begin{aligned}\phi_x([x : y : z]) &= \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right), \\ \phi_y([x : y : z]) &= \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y} \right), \\ \phi_z([x : y : z]) &= \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right).\end{aligned}$$

Preslikava ϕ_x na primer dano premico preslika v točko oblike (y, z) , kjer je $(1, y, z)$ presečišče premice z ravnino $x = 1$.

Sedaj bi morali preveriti, da je vsak par kart kompatibilen. Ker je dokaz v vseh treh primerih podoben, bomo pokazali samo, da sta karti (ϕ_x, U_x) in (ϕ_y, U_y) kompatibilni. Presek $U_x \cap U_y$ se s preslikavama ϕ_x in ϕ_y preslika na odprto podmnožico $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Če malce preračunamo, vidimo, da ima prehodna preslikava

$$\phi_y \circ (\phi_x|_{U_x \cap U_y})^{-1} : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$$

predpis

$$(\phi_y \circ (\phi_x|_{U_x \cap U_y})^{-1})(r_1, r_2) = \left(\frac{1}{r_1}, \frac{r_2}{r_1} \right).$$

Ta preslikava je gladka z gladkim inverzom, zato sta karti kompatibilni. Podobno velja tudi za ostala para kart. Projektivna ravnina je sklenjena neorientabilna ploskev. \square

(2) Konstruiraj atlas na Liejevi grupi rotacij $SO(3)$.

Rešitev: Grupo rotacij Evklidskega prostora \mathbb{R}^3 , ki je definirana s predpisom

$$SO(3) = \{Q \in \text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid Q^T Q = I, \det(Q) = 1\}$$

lahko smatramo kot podmnožico Evklidskega prostora $\text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$. Najprej bomo pokazali, da je $SO(3)$ gladka podmnožica $\text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$. V ta namen bomo poljubno matriko $Q \in SO(3)$ zapisali v obliki

$$Q = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}.$$

Pogoj $Q^T Q = I$ nam pove, da so vrstice matrike Q paroma pravokotni enotski vektorji. To lahko zapišemo z naslednjim sistemom vezi:

$$\begin{aligned}x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{13}^2 &= 1, \\x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2 &= 1, \\x_{31}^2 + x_{32}^2 + x_{33}^2 &= 1, \\x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} + x_{13}x_{23} &= 0, \\x_{11}x_{31} + x_{12}x_{32} + x_{13}x_{33} &= 0, \\x_{21}x_{31} + x_{22}x_{32} + x_{23}x_{33} &= 0.\end{aligned}$$

Označimo zaporedoma z f_1, f_2, \dots, f_6 zgornje vezi. Če nam uspe pokazati, da so gradienti teh vezi linearno neodvisni vzdolž podmnožice $\text{SO}(3) \subset \text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, bo od tod sledilo, da je $\text{SO}(3)$ gladka podmnogoterost $\text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Gradienti teh vezi so:

$$\begin{aligned}\nabla f_1 &= 2 \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla f_2 = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla f_3 = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}, \\ \nabla f_4 &= \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla f_5 = \begin{bmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{bmatrix}, \quad \nabla f_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Če bi bila neka linearna kombinacija teh gradientov enaka nič, bi od tod sledilo, da je neka linearna kombinacija vrstic matrike Q enaka nič. To pa se ne more zgoditi na matrikah iz $\text{SO}(3)$. Matrike, ki zadoščajo zgornjemu sistemu vezi, sicer tvorijo grupo ortogonalnih matrik $\text{O}(3)$. Izkaže se, da ima grupa $\text{O}(3)$ dve komponenti, ena izmed njih pa je $\text{SO}(3)$. V $\text{SO}(3)$ so natanko ortogonalne matrike z determinanto 1. Ker je $\dim(\text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})) = 9$ in imamo 6 vezi, je $\text{SO}(3)$ tridimenzionalna mnogoterost.

Po izreku o implicitni funkciji lahko v okolici vsake matrike $Q \in \text{SO}(3)$ izberemo neko trojico koordinat v $\text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, ki tvorijo tudi koordinate na $\text{SO}(3)$. Tako dobljene koordinate pa večinoma niso najbolj primerne za računanje, zato v praksi raje uporabljamo druge koordinatne sisteme na $\text{SO}(3)$. Med najbolj uporabljenimi koordinatami na $\text{SO}(3)$ so:

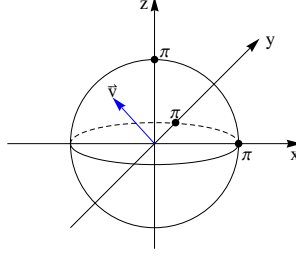
- Eulerjevi koti,
- kvaternionske koordinate,
- osno-kotne koordinate.

Za naš predmet so najbolj zanimive osno-kotne koordinate na $\text{SO}(3)$, ker so to v bistvu koordinate, ki nam jih da eksponentna preslikava na Liejevi grupi $\text{SO}(3)$.

Oсно-kotne koordinate na $\text{SO}(3)$:

Kadar imamo opravka s krivuljo, ploskvijo ali podmnogoterostjo Evklidskega prostora, jo pogosto namesto s kartami opišemo s parametrizacijo. Gre v bistvu za isto stvar, le v obratni smeri. Naše osno-kotne koordinate bomo zato najprej implicitno definirali s pomočjo lokalne parametrizacije grupe $\text{SO}(3)$ v okolici identične matrike.

Domena naše parametrizacije bo odprta krogla $B(0, \pi) \subset \mathbb{R}^3$, danemu vektorju $\vec{v} \in B(0, \pi)$ pa bo priredila rotacijo okoli vektorja \vec{v} za kot $|\vec{v}|$.



Najprej se dogovorimo glede oznak. Naj bo $\vec{v} = (x, y, z)$. Potem lahko vsak $\vec{v} \neq 0$ zapišemo v obliki

$$\vec{v} = |\vec{v}|\vec{e} = r\vec{e},$$

kjer je r dolžina vektorja \vec{v} , vektor \vec{e} pa enotski vektor v njegovi smeri. Označimo še z

$$W(\vec{v}) \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

antisimetrično matriko, ki pripada vektorju \vec{v} . To je matrika, ki pripada vektorskemu množenju z vektorjem \vec{v} , kar pomeni, da velja $W(\vec{v})(\vec{r}) = \vec{v} \times \vec{r}$. Po drugi strani pa je preslikava $\vec{v} \mapsto W(\vec{v})$ izomorfizem med Liejevo algebro (\mathbb{R}^3, \times) in pa Liejevo algebro Liejeve grupe $SO(3)$.

Oсно-kotno parametrizacija $SO(3)$ je eksplicitno podana s preslikavo:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(\vec{v}) &= I + \frac{\sin r}{r}W(\vec{v}) + \frac{1 - \cos r}{r^2}W(\vec{v})^2, \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin r}{r} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} + \frac{1 - \cos r}{r^2} \begin{bmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Iz predpisa takoj sledi, da je dana preslikava zvezna, v nadaljevanju pa bomo preverili, da ustreza pogojem gladke parametrizacije grupe $SO(3)$.

$\phi^{-1}(\vec{v})$ je rotacijska matrika:

Pri računu bomo uporabili enakost $W^3 = -r^2W$, ki sledi iz Cayley-Hamiltonovega izreka za matriko $W = W(\vec{v})$. Računajmo:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(\vec{v})^T \cdot \phi^{-1}(\vec{v}) &= \left(I - \frac{\sin r}{r}W + \frac{1 - \cos r}{r^2}W^2 \right) \left(I + \frac{\sin r}{r}W + \frac{1 - \cos r}{r^2}W^2 \right), \\ &= I + \frac{\sin r}{r}W + \frac{1 - \cos r}{r^2}W^2 - \frac{\sin r}{r}W - \left(\frac{\sin r}{r} \right)^2 W^2 \\ &\quad - \frac{\sin r(1 - \cos r)}{r^3}W^3 + \frac{1 - \cos r}{r^2}W^2 + \frac{\sin r(1 - \cos r)}{r^3}W^3 + \frac{(1 - \cos r)^2}{r^4}W^4, \\ &= I + W^2 \frac{(2(1 - \cos r) - \sin^2 r - (1 - \cos r)^2)}{r^2}, \\ &= I. \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $\phi^{-1}(\vec{v})$ ortogonalna matrika za vsak $\vec{v} \in B(0, \pi)$. Ker pa je ϕ^{-1} zvezna preslikava in $B(0, \pi)$ povezana množica, so matrike $\phi^{-1}(\vec{v})$ rotacijske matrike.

$\phi^{-1}(\vec{v})$ je rotacija za kot $\phi = |\vec{v}|$ okoli vektorja \vec{v} :

Hitro lahko preverimo, da velja

$$\phi^{-1}(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{v},$$

od koder sledi, da je $\phi^{-1}(\vec{v})$ rotacija okoli vektorja \vec{v} . Če imamo dano rotacijsko matriko Q , lahko kot rotacije ϕ izračunamo iz zveze

$$\text{tr}(Q) = 2 \cos \phi + 1.$$

V našem primeru je

$$\text{tr}(\phi^{-1}(\vec{v})) = 3 - 2(1 - \cos r) = 2 \cos r + 1,$$

zato je $\phi = \pm r$. Da je dejansko $\phi = r$, bi lahko preverili, če bi eksplicitno izračunali, kako se zavrti nek konkreten vektor.

Iz geometrijske interpretacije preslikave ϕ^{-1} sledi, da je injektivna na odprti krogli $B(0, \pi)$.

$\phi^{-1}(\vec{v})$ je imerzija:

Iz predpisa preslikave ϕ^{-1} je jasno, da je gladka, zato si jo bomo поблиže pogledali v okolici točke $(0, 0, 0)$.

Pri interpretaciji odvoda preslikave je včasih poučno pogledati, kako preslikava transformira majhne koščke poti. Vzemimo na primer pot skozi točko $(0, 0, 0) \in B(0, \pi)$ oblike

$$\vec{v}(t) = (0, 0, t)$$

za $|t| < \pi$. Potem nam pot $\phi^{-1}(\vec{v}(t))$ predstavlja neko pot v grupi rotacij, ki je podana s predpisom

$$\phi^{-1}(\vec{v}(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin |t|}{|t|} \begin{bmatrix} 0 & -t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1 - \cos |t|}{|t|^2} \begin{bmatrix} -t^2 & 0 & 0 \\ 0 & -t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Geometrično lahko to pot prepoznamo kot vrtenje okoli z -osi. Če to pot odvajamo po t pri $t = 0$, smo v resnici izračunali parcialni odvod preslikave ϕ^{-1} po z v točki $(0, 0, 0)$. Eksplicitno dobimo

$$\left. \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial z} \right|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika na desni ni rotacijska matrika, ampak leži v Liejevi algebri grupe $SO(3)$. Interpretiramo jo lahko kot infinitezimalni generator rotacij okoli z -osi. Podobno dobimo tudi infinitezimalna generatorja okoli drugih dveh smeri, ki sta enaka:

$$\left. \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x} \right|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left. \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y} \right|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker so ti trije infinitezimalni generatorji linearno neodvisni, je preslikava ϕ^{-1} imerzija v točki $(0, 0, 0)$. Lahko bi šli eksplicitno izračunati še njen odvod v drugih točkah in

pokazali, da je imerzija povsod na $B(0, \pi)$. Zaradi enostavnosti pa bomo dokaz raje za nekaj časa odložili, da spoznamo izrek, ki nam pove, v katerih točkah je eksponentna preslikava Liejeve grupe imerzija.

Karta, ki jo dobimo kot inverz osno-kotne parametrizacije, ustreza v teoriji Liejevih grup logaritmski karti. Definirana je na odprti gosti podmnožici $U \subset \text{SO}(3)$, ki sestoji iz vseh rotacij za kot $\phi < \pi$. Dobljena preslikava $\phi : U \rightarrow B(0, \pi)$ je eksplicitno dana s predpisom:

$$r = \arccos \left(\frac{\text{tr}(Q) - 1}{2} \right),$$

$$\vec{e} = \frac{1}{2 \sin r} \begin{bmatrix} x_{32} - x_{23} \\ x_{13} - x_{31} \\ x_{21} - x_{12} \end{bmatrix}.$$

Identično matriko preslikava ϕ preslika v koordinatno izhodišče.

Ker je množica rotacij $\text{SO}(3)$ grupa, lahko dobimo atlas na $\text{SO}(3)$ z uporabo translacij dane karte. Najprej označimo z

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, R_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, R_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotacije okoli koordinatnih osi za kot π ter z

$$U_x = L_{R_x}(U), U_y = L_{R_y}(U), U_z = L_{R_z}(U)$$

odprte podmnožice $\text{SO}(3)$, ki jih dobimo s translacijami množice U . Na teh množicah lahko definiramo karte s predpisi

$$\begin{aligned} \phi_x &= \phi \circ L_{R_x}, \\ \phi_y &= \phi \circ L_{R_y}, \\ \phi_z &= \phi \circ L_{R_z}. \end{aligned}$$

Kot bomo videli kasneje, so translacije na Liejevi grupi gladke preslikave, zato so te karte avtomatično gladke in paroma kompatibilne, preveriti pa moramo še, da pokrivajo celo grupo $\text{SO}(3)$. Izven množice U ležijo natanko rotacije za kot π . Za vsako takšno rotacijo Q torej velja

$$\text{tr}(Q) = -1$$

oziroma

$$x_{11} + x_{22} + x_{33} = -1.$$

Če bi Q ležala tudi izven množic U_x , U_y in U_z , bi morale biti tudi $R_x Q$, $R_y Q$ in $R_z Q$ rotacije za kot π , kar bi pomenilo, da velja:

$$\begin{aligned} x_{11} - x_{22} - x_{33} &= -1, \\ -x_{11} + x_{22} - x_{33} &= -1, \\ -x_{11} - x_{22} + x_{33} &= -1. \end{aligned}$$

Ker dobljeni sistem enačb nima rešitev, dane štiri množice pokrivajo celo grupo $\text{SO}(3)$ in zatorej tvorijo gladek atlas na $\text{SO}(3)$.

Opomba 1: Preslikava ϕ^{-1} je dobro definirana na celem \mathbb{R}^3 , a je injektivna samo na odprti krogli $B(0, \pi)$. Če bi jo gledali na zaprti krogli $B(0, \pi)$, bi dobili surjekcijo na $SO(3)$, ki pa bi dve antipodni točki na robu krogle preslikala v isto točko. Od tod sledi, da je Liejeva grupa $SO(3)$ difeomorfna projektivnemu prostoru $\mathbb{R}P^3$.

Opomba 2: Spoznali smo dva rahlo različna načina podajanja mnogoterosti, ki pa sta v bistvu ekvivalentna. Če imamo dano gladko podmnogoterost Evklidskega prostora, lahko po izreku o implicitni funkciji za lokalne koordinate izberemo kar ustrezen nabor koordinat Evklidskega prostora. Če pa imamo dano množico z glatkim atlasom dimenzije m , jo lahko po Whitneyevem izreku vložimo v Evklidski prostor dimenzije $2m$. \square

(3) Izračunaj tokove in komutatorje naslednjih vektorskih polj na \mathbb{R}^3 :

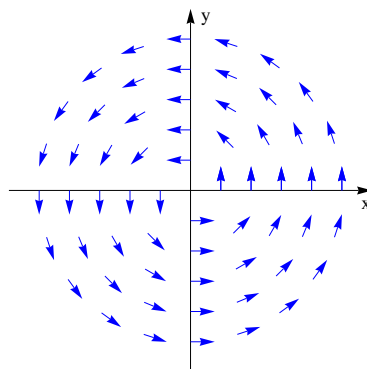
(a) $X = -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}$, $Y = -x \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial x}$, $Z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$,

(b) $X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z}$, $Z = \frac{\partial}{\partial z}$.

Rešitev: Vektorska polja lahko interpretiramo na več načinov, odvisno od problema, ki ga študiramo. Najpogostejše so naslednje interpretacije:

(1) Geometrični opis:

Vektorsko polje si pogosto predstavljamo kot polje silnic neke sile, kot sta na primer električno ali pa gravitacijsko polje. Ta polja so večinoma definirana v \mathbb{R}^2 ali \mathbb{R}^3 , podamo pa jih po komponentah v obliki $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.



Na splošnih gladih mnogoterostih se stvari malce zakomplicirajo pri definiciji pojma tangentnega prostora in tangentnega vektorja. V splošnem je vektorsko polje na gladki mnogoterosti M definirano kot prerez tangentnega svežnja TM . Vsako tako vektorsko polje $X \in \mathfrak{X}(M)$ lahko v lokalnih koordinatah (x_1, \dots, x_m) na M zapišemo v obliki

$$X = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_m \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

Mislino si lahko, da tak X ustreza polju $\vec{F} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$.

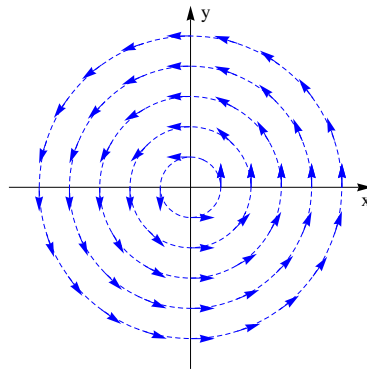
(2) Dinamični opis:

Vektorsko polje si lahko predstavljamo tudi kot hitrostno polje neke tekočine, kar matematično pomeni sistem navadnih diferencialnih enačb prvega reda. Če lahko v lokalnih koordinatah

vektorsko polje X zapišemo v obliki $X = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_m \frac{\partial}{\partial x_m}$, mu priredimo sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ \dot{x}_2 &= a_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ &\vdots = \quad \quad \quad \vdots \\ \dot{x}_m &= a_m(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Toku tekočine ustreza tok vektorskega polja, ki je družina difeomorfizmov $\Phi_t^X : M \rightarrow M$, parametrizirana s $t \in \mathbb{R}$. Če fiksiramo točko $p \in M$, nam preslikava $t \mapsto \Phi_t^X(p)$ definira tokovnico skozi točko p , ki je povsod tangenta na vektorsko polje X .



(3) Algebraični opis:

Na vektorsko polje lahko gledamo tudi kot na linearni parcialni diferencialni operator reda ena oziroma derivacijo. To pomeni, da je vektorsko polje X na mnogoterosti M linearna preslikava $X : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, ki zadošča pogoju

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

za poljubni funkciji $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Če lahko v lokalnih koordinatah polje X izrazimo v obliki $X = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_m \frac{\partial}{\partial x_m}$, je ta derivacija definirana lokalno s predpisom

$$X(f) = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_m \frac{\partial f}{\partial x_m}.$$

Sedaj si bomo te tri interpretacije pogledali na konkretnih primerih. Najprej izračunajmo tokove danih vektorskih polj.

(a) Vektorskemu polju $X = -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}$ pripada sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= -z, \\ \dot{z} &= y. \end{aligned}$$

To je linearen sistem diferencialnih enačb, ki ga lahko zapišemo tudi v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Matriko

$$W = W(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

smo že spoznali, saj predstavlja infinitezimalni generator vrtenja okoli x -osi. Tok, ki ga določa to vektorsko polje, lahko predstavimo z matriko e^{tW} , kar se eksplicitno izrazi v obliki:

$$\Phi_t^X(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Tokovnice tega vektorskega polja so krožnice s središči na x -osi in ki ležijo v normalnih ravninah na x -os. Točke na x -osi so stacionarne točke.

Podobno lahko izračunamo tudi tokova polj Y in Z :

$$\Phi_t^Y(x, y, z) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$\Phi_t^Z(x, y, z) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

ki predstavljata vrtenje okoli y oziroma z -osi.

(b) Najprej si pogledjmo vektorsko polje $Z = \frac{\partial}{\partial z}$ in pripadajoči sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= 0, \\ \dot{z} &= 1. \end{aligned}$$

To polje predstavlja homogeni tok vzdolž z -osi, ki je definiran s predpisom

$$\Phi_t^Z(x, y, z) = (x, y, z + t).$$

Tokovnice so premice, ki so vzporedne z -osi.

Vektorskemu polju $X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z}$ pripada sistem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1, \\ \dot{y} &= 0, \\ \dot{z} &= -\frac{1}{2}y, \end{aligned}$$

katerega rešitev je tok

$$\Phi_t^X(x, y, z) = (x + t, y, z - \frac{1}{2}yt).$$

Tokovnice so premice, ki so vzporedne ravnini $y = 0$, njihov naklon pa se spreminja vzdolž y -koordinate.

Analogno lahko izračunamo tudi tok polja Y , ki je dan s predpisom

$$\Phi_t^Y(x, y, z) = (x, y + t, z + \frac{1}{2}xt).$$

Komutator vektorskih polj:

Na prostoru vektorskih polj $\mathfrak{X}(M)$ na gladki mnogoterosti M imamo operacijo, ki na $\mathfrak{X}(M)$ porodi strukturo Liejeve algebre. Če lahko vektorski polji X in Y lokalno zapišemo v obliki $X = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ in $Y = \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, je njun komutator lokalno definiran s predpisom

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^m (X(b_i) - Y(a_i)) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Komutator vektorskih polj je spet vektorsko polje.

(a) Komutatorji vektorskih polj X , Y in Z so:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} = -Z, \\ [Y, Z] &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} = -X, \\ [Z, X] &= x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} = -Y. \end{aligned}$$

Liejeva algebra, ki jo generirajo vektorska polja X , Y in Z , je izomorfna Liejevi algebri grupe $SO(3)$.

(b) V tem primeru so komutatorji:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \frac{\partial}{\partial z} = Z, \\ [X, Z] &= 0, \\ [Y, Z] &= 0. \end{aligned}$$

Te komutacijske relacije ustrezajo Heisenbergovi Liejevi grupi.

Tudi komutator lahko interpretiramo na več načinov.

(1) Algebraična interpretacija:

Če na vektorska polja gledamo kot na parcialne diferencialne operatorje reda ena na M , ustreza komutator vektorskih polj ravno algebraičnemu komutatorju operatorjev. To pomeni, da za vsak $f \in C^\infty(M)$ velja

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Ta pristop se uporablja v nekomutativni geometriji in pa v kvantni mehaniki. Operatorji X , Y in Z so v tesni zvezi z operatorji vrtilne količine L_x , L_y in L_z , ki so definirani s predpisi:

$$\begin{aligned} L_x &= -i\hbar X, \\ L_y &= -i\hbar Y, \\ L_z &= -i\hbar Z. \end{aligned}$$

Ena izmed komutacijskih relacij je potem na primer $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$.

(2) Dinamična interpretacija:

Dinamično lahko komutator vektorskih polj interpretiramo kot približek najnižjega reda za komutator njunih tokov. Poglejmo si to eksplicitno na primeru polj X in Y iz (a). Tok polja X lahko linearno v t aproksimiramo v obliki

$$\Phi_t^X(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \approx \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Podobno dobimo aproksimacijo

$$\Phi_t^Y(x, y, z) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Aproksimaciji kompozitumov teh dveh tokov sta:

$$\begin{aligned} (\Phi_t^Y \circ \Phi_t^X)(x, y, z) &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t^2 & t \\ 0 & 1 & -t \\ -t & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \\ (\Phi_t^X \circ \Phi_t^Y)(x, y, z) &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ t^2 & 1 & -t \\ -t & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Opazimo lahko, da je njuna razlika enaka

$$(\Phi_t^Y \circ \Phi_t^X - \Phi_t^X \circ \Phi_t^Y)(x, y, z) \approx t^2 \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} = t^2[X, Y]_{(x, y, z)}.$$

Komutator tokov nam torej približno pove, kakšna je razlika med kompozicijama tokov v obeh vrstnih redih.

V splošnem imamo za vektorski polji X in Y na M ter $p \in M$ za majhne t aproksimacijo

$$(\Phi_t^Y \circ \Phi_t^X - \Phi_t^X \circ \Phi_t^Y)(p) \approx t^2[X, Y]_p.$$

Če je komutator dveh vektorskih polj na nekem območju enak nič, potem tokova teh vektorskih polj komutirata. Tipični primeri polj, ki komutirajo, so koordinatna vektorska polja v nekih lokalnih koordinatah. Bolj zanimiv primer pa so polja X , Y in Z iz naloge (b). Ni se težko geometrijsko prepričati, da polje Z komutira s poljema X in Y . Nekoliko težje je geometrijsko prepoznati komutator polj X in Y , račun pa pokaže, da je v tem primeru zgornja približna formula dejansko natančna. \square

- (4) Naj bo G Liejeva grupa z množenjem $\mu : G \times G \rightarrow G$ in inverzom $\iota : G \rightarrow G$. Izračunaj odvoda $d\mu_{(e, e)}$ in $d\iota_e$.

Rešitev: Kadar imamo opravka z gladko vloženo podmnogoterostjo nekega Evklidskega prostora, lahko brez problema definiramo tangentne vektorje in tangentni prostor na mnogoterost v dani točki. Rašel problem pa se pojavi, ko hočemo pojem tangentnega prostora posplošiti na abstraktne mnogoterosti.

Abstraktno lahko tangentne vektorje na mnogoterost definiramo s pomočjo derivacij. Naj bo M gladka mnogoterost in $p \in M$. Tangentni prostor $T_p M$ mnogoterosti M v točki p je potem vektorski prostor

$$T_p M = \{\text{derivacije algebre } \mathcal{C}^\infty(M) \text{ v točki } p\}.$$

Derivacija algebre $\mathcal{C}^\infty(M)$ v točki $p \in M$ je linearna preslikava $v : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadošča Leibnizevemu pravilu

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

za poljubna $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. To je abstraktna definicija tangentnega vektorja, ki pa nam pride prav pri dokazovanju in brezkoordinatnem računanju.

Tangentne vektorje si seveda lahko predstavljamo tudi bolj geometrično kot hitrosti poti v M . Denimo, da je $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ gladka pot v M , za katero je $\gamma(0) = p$. V lokalnih koordinatah $\phi = (x_1, \dots, x_m)$ na M lahko pot γ izrazimo v obliki $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$. Hitrost poti nam pove, kako hitro se spreminjajo koordinate točke, ki potuje po tej poti, opišemo pa jo lahko z m -terico

$$\dot{\gamma}(0) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_m(t)) = \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x_1(\gamma(t)), \dots, \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x_m(\gamma(t)) \right).$$

Koordinate na M so v bistvu posebni primeri funkcij na M . Če hočemo imeti brezkoordinatno definicijo tangentnega vektorja oziroma hitrosti dane poti, pa namesto odvodov koordinat hkrati pogledamo kar odvode vseh funkcij. Formalno tako poti γ priredimo tangentni vektor $v = \dot{\gamma}(0) \in T_p M$, ki je definiran s predpisom

$$v(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t))$$

za $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Ker za običajen odvod velja Leibnizevo pravilo, je tako definirana preslikava derivacija algebre $\mathcal{C}^\infty(M)$ v točki p . Izkazuje se, da lahko vsako derivacijo predstavimo kot hitrost neke poti, ni pa ta korespondenca enolična, saj ima veliko poti isto hitrost.

Podobno kot pri preslikavah med Evklidskimi prostori lahko tudi za poljubno gladko preslikavo $g : M \rightarrow N$ med gladkima mnogoterostima definiramo odvod. Odvod preslikave g v točki $p \in M$ je linearna preslikava $dg_p : T_p M \rightarrow T_{g(p)} N$, ki je definirana s predpisom

$$dg_p(v)(f) = v(f \circ g)$$

za poljuben $v \in T_p M$ in poljubno $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$. Geometrično nam odvod dg hitrost poti γ preslika v hitrost poti $g \circ \gamma$ oziroma

$$dg_p(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(\gamma(t)),$$

kjer je $v = \dot{\gamma}(0)$.

V nadaljevanju bomo spoznali abstraktno verzijo Leibnizeve formule za odvod produkta, ki nam pogosto pride prav pri študiju Liejevih grup ter njihovih delovanj in reprezentacij.

Začeli bomo s strukturo tangentnega prostora produkta mnogoterosti. Naj bosta M in N gladki mnogoterosti ter $p \in M$ in $q \in N$. Potem obstaja naravni izomorfizem

$$T_p M \times T_q N \cong T_{(p,q)}(M \times N).$$

Eksplicitno ga lahko podamo na naslednji način. Označimo z $\iota_{M,q} : M \rightarrow M \times N$ in $\iota_{N,p} : N \rightarrow M \times N$ vložitvi, ki M in N vložita v produkt $M \times N$ na rezini skozi točko (p, q) . Eksplicitno to pomeni, da je:

$$\begin{aligned} \iota_{M,q}(x) &= (x, q), \\ \iota_{N,p}(x) &= (p, x). \end{aligned}$$

Zgornji izomorfizem je potem podan s korespondenco

$$(v, w) \longleftrightarrow (d\iota_{M,q})_p(v) + (d\iota_{N,p})_q(w),$$

kjer je $v \in T_p M$ in $w \in T_q N$. Lažje kot s formulo si lahko ta izomorfizem zapomnimo geometrično. Pove namreč, da nam par gladkih poti v M in N predstavlja pot v produktu $M \times N$ in obratno. Za hitrosti poti torej velja

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\gamma(t), \zeta(t)) = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma(t), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\zeta(t)\right).$$

Naj bo sedaj $g : M \times N \rightarrow Q$ gladka preslikava. Z uporabo zgornje identifikacije dobimo naslednjo enakost

$$dg_{(p,q)}(v, w) = dg_{(p,q)}((d\iota_{M,q})_p(v) + (d\iota_{N,p})_q(w)) = d(g \circ \iota_{M,q})_p(v) + d(g \circ \iota_{N,p})_q(w).$$

Denimo sedaj, da $v \in T_p M$ ustreza poti γ , $w \in T_q N$ pa poti ζ . V jeziku poti lahko to enakost potem zapišemo v obliki

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}g(\gamma(t), \zeta(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}g(\gamma(t), q) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}g(p, \zeta(t)).$$

Ta formula je v resnici le abstraktna verzija Leibnizevega pravila za odvod produkta. Poglejmo si nekaj znanih primerov:

- (1) Če je $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ množenje, dobimo znano formulo $(fh)' = f'h + f\dot{h}$.
- (2) Če je $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ skalarni produkt, dobimo formulo $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \dot{\vec{r}}_1 \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2$.
- (3) Če je $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorski produkt, dobimo $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \dot{\vec{r}}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_2$.

S pomočjo te formule bomo sedaj izračunali odvod množenja in inverza v Liejevi grupi.

Odvod množenja $\mu : G \times G \rightarrow G$:

Zanima nas odvod množenja μ v točki (e, e) . Izberimo tangentna vektorja $X, Y \in T_e G$ in ju predstavimo s potema γ in ζ . Ker je e enota, je $\mu(\gamma(t), e) = \gamma(t)$ in $\mu(e, \zeta(t)) = \zeta(t)$. Od tod sledi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(\gamma(t), \zeta(t)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(\gamma(t), e) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(e, \zeta(t)), \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma(t) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\zeta(t), \\ &= X + Y, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je

$$d\mu_{(e,e)}(X, Y) = X + Y.$$

Odvod inverza $\iota : G \rightarrow G$:

Za izračun odvoda inverza v Liejevi grupi ne moremo direktno uporabiti zgornje formule. Zato si bomo najprej pogledali kompozitum $\mu \circ (\text{id}, \iota) : G \rightarrow G$ preslikav $(\text{id}, \iota) : G \rightarrow G \times G$ in $\mu : G \times G \rightarrow G$. Iz definicije inverza in množenja v Liejevi grupi sledi, da je ta preslikava konstantna, zato je njen odvod enak nič. To pomeni, da za vsak $X \in T_e G$ velja

$$d(\mu \circ (\text{id}, \iota))_e(X) = 0.$$

Če uporabimo verižno pravilo za odvod, od tod sledi

$$d\mu_{(e,e)}(d(\text{id}, \iota)_e(X)) = 0.$$

Sedaj upoštevamo dejstvo, da je odvod para preslikav v bistvu par odvodov

$$d(\text{id}, \iota)_e(X) = (d\text{id}_e(X), d\iota_e(X)) = (X, d\iota_e(X)).$$

Pri tem smo uporabili identifikacijo tangentnega prostora produkta s produktom tangentnih prostorov. Za konec uporabimo že izračunan odvod preslikave μ , da dobimo enakost

$$d\mu_{(e,e)}(X, dt_e(X)) = X + dt_e(X) = 0.$$

To pomeni, da je

$$dt_e(X) = -X.$$

Geometrično ta rezultat pomeni, da invertiranje poti v grupi obrne smer poti. Najlažje si to predstavljamo na poteh v Evklidskem prostoru ali pa v grupi rotacij $SO(3)$, kjer invertiranje obrne smer rotacije.

Opomba: V zgornji izpeljavi smo uporabili dejstvo, da je odvod para preslikav par odvodov. To lahko eksplicitno pokažemo, če delamo v lokalnih koordinatah, geometrična ideja dokaza pa je naslednja.

Denimo, da imamo preslikavo $h = (h_1, h_2) : P \rightarrow M \times N$ in naj bo $x \in P$ ter $h(x) = (p, q)$. Izberimo še tangentni vektor $v \in T_x P$ in ga predstavimo s potjo $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow P$, za katero je $v = \dot{\gamma}(0)$. Po definiciji odvoda gladke preslikave je potem

$$dh_x(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(\gamma(t)).$$

Pot $h(\gamma(t))$ je pot v produktu $M \times N$ skozi točko (p, q) , ki jo lahko zapišemo tudi v obliki

$$h(\gamma(t)) = (h_1(\gamma(t)), h_2(\gamma(t))).$$

Če uporabimo identifikacijo $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p M \times T_q N$, potem od tod sledi

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(\gamma(t)) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h_1(\gamma(t)), \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h_2(\gamma(t)) \right).$$

Ker je:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h_1(\gamma(t)) &= (dh_1)_x(v), \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h_2(\gamma(t)) &= (dh_2)_x(v), \end{aligned}$$

je torej

$$dh_x(v) = ((dh_1)_x(v), (dh_2)_x(v)).$$

□