

Dodatne vaje iz Liejevih grup

Gladke mnogoterosti

- (1) Konstruiraj gladek atlas na projektivnem prostoru $\mathbb{R}P^n$.
- (2) Konstruiraj gladek atlas na torusu $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n$.
- (3) Naj bo G množica orientacijo ohranjajočih izometrij Evklidske ravnine \mathbb{R}^2 . Poišči bijekcijo med G in $S^1 \times \mathbb{R}^2$ in nato konstruiraj atlas na G .
- (4) Dana je Liejeva grupa $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.
 - (a) Konstruiraj atlas na $SL(2, \mathbb{R})$.
 - (b) Poišči difeomorfizem med $SL(2, \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^2 \times S^1$.

- (5) Dana je preslikava $\phi : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ s predpisom

$$\phi([x : y : z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (xy, xz, y^2 - z^2, 2yz).$$

Pokaži, da je ϕ gladka imerzija.

- (6) Izračunaj tokova in komutator naslednjih vektorskih polj na \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} X &= (-12x + 21y) \frac{\partial}{\partial x} + (-10x + 17y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ Y &= (-x + y) \frac{\partial}{\partial x} + (-4x + 3y) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

- (7) Naj bo $SO(3) = \{Q \in \text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid Q^T Q = I, \det(Q) = 1\}$ grupa rotacij Evklidskega prostora \mathbb{R}^3 in $\rho : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ njeno delovanje na \mathbb{R}^3 , ki je definirano s predpisom $\rho(Q, \vec{r}) = Q\vec{r}$. Tangentni prostor $T_e SO(3)$ lahko identificiramo z antisimetričnimi matrikami

$$T_e SO(3) = \{W \in \text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid W^T + W = 0\}.$$

Vsaka taka matrika je oblike

$$W(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

za neko trojico $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Antisimetrični matriki W priredimo vektorsko polje $X(W)$ na \mathbb{R}^3 , ki je podano s predpisom

$$X(W)_{\vec{r}} = d\rho_{(e, \vec{r})}(W, 0).$$

- (a) Poišči ekspliciten predpis za vektorsko polje $X(W)$.
- (b) Opiši tok vektorskega polja $X(W)$.
- (c) Pokaži, da za vsaki matriki $W_1, W_2 \in T_e \text{SO}(3)$ velja

$$[X(W_1), X(W_2)] = -X([W_1, W_2]),$$

kjer je $[W_1, W_2] = W_1W_2 - W_2W_1$ komutator matrik.

- (8) Naj bo G Liejeva grupa z množenjem $\mu : G \times G \rightarrow G$ in inverzom $\iota : G \rightarrow G$. Izračunaj odvoda preslikav μ in ι v poljubnih točkah.