Liejeve grupe

Liejeve grupe

(1) Ortogonalna in specialna ortogonalna grupa sta definirani s pogojema:

$$\mathrm{O}(n) = \{Q \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \,|\, Q^T Q = \mathrm{I}\},$$
$$\mathrm{SO}(n) = \{Q \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \,|\, Q^T Q = \mathrm{I},\, \det(Q) = 1\}.$$

(a) Poišči izomorfizem Liejevih grup $\mathrm{O}(3)$ in $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(3)$.

(b) Pokaži, da grupi $\mathrm{O}(2)$ in $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2)$ nista izomorfni.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo študirali razcep Liejevih grup na grupo komponent in pa na komponento enote.

Spomnimo se, da je gladka mnogoterost M *povezana*, če za poljubna $p, q \in M$ lahko najdemo pot $\gamma : [0,1] \to M$, za katero je $\gamma(0) = p$ in $\gamma(1) = q$. Če M ni povezana, označimo s $\pi_0(M)$ množico povezanih komponent M.

Liejevo grupo lahko razcepimo na povezan in pa na diskreten del. Komponenta enote grupe G je zmeraj edinka v G, ki jo označimo z G_e. Grupo komponent $\pi_0(G)$ Liejeve grupe G nato dobimo kot faktorsko grupo G/G_e. Poleg izomorfnostnih tipov teh dveh grup je pomemben tudi podatek, kako iz njiju konstruiramo celo grupo G. V večini zanimivih primerov je Liejeva grupa direktni ali pa semidirektni produkt komponente enote in pa grupe komponent.

Liejeva grupa ortogonalnih matrik $\mathrm{O}(n)$ ima dve komponenti. Od tod sledi, da je grupa komponent $\pi_0(\mathrm{O}(n))$ izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2$. Komponenta enote je grupa $\mathrm{SO}(n)$, ki vsebuje matrike z determinanto 1, medtem ko so v drugi komponenti matrike z determinanto -1.

(a) Elemente grupe $\mathrm{O}(3)$ lahko geometrijsko interpretiramo na naslednja dva načina:

1. Če je $\det(Q) = 1$, predstavlja matrika Q rotacijo za nek kot okoli neke osi v prostoru.

   · Lastne vrednosti matrike Q so $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = e^{\pm i\phi}$ za nek $\phi \in [0, 2\pi)$.
   · Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju Q, ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = 1$.
   · Kot vrtenja je $\pm\phi$, odvisno od orientacije osi.

2. Če je $\det(Q) = -1$, predstavlja matrika Q kompozicijo rotacije za nek kot okoli neke osi v prostoru in pa zrcaljenja preko ravnine, ki ima to os za normalo.

   · Lastne vrednosti matrike Q so $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = e^{\pm i\phi}$ za nek $\phi \in [0, 2\pi)$.
   · Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju Q, ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = -1$.
   · Kot vrtenja je $\pm\phi$, odvisno od orientacije osi.
   · Normala ravnine zrcaljenja kaže v smeri osi vrtenja.

Sedaj bomo eksplicitno konstruirali izomorfizem Liejevih grup

$$\alpha : \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{O}(3),$$

ki bo elemente oblike $(0, R)$ preslikal v rotacije, elemente oblike $(1, R)$ pa v zrcaljenja. Eksplicitno je definiran s predpisom

$$\alpha(k, R) = (-\mathrm{I})^k R.$$

Pokažimo najprej, da je tako definirana preslikava α homomorfizem grup. To sledi iz enakosti:

$$\begin{aligned}\alpha((k_1, R_1)(k_2, R_2)) &= \alpha(k_1 + k_2, R_1R_2) = (-\mathrm{I})^{k_1+k_2} R_1R_2,\\ \alpha(k_1, R_1)\alpha(k_2, R_2) &= (-\mathrm{I})^{k_1} R_1(-\mathrm{I})^{k_2} R_2 = (-\mathrm{I})^{k_1+k_2} R_1R_2.\end{aligned}$$

Jedro homomorfizma α je trivialno, zato moramo pokazati samo še, da je surjektiven. Izberimo poljuben $Q \in \mathrm{O}(3)$. Če je $\det(Q) = 1$, je $Q \in \mathrm{SO}(3)$ in velja $Q = \alpha(0, Q)$. Če pa je $\det(Q) = -1$, pa je $-Q \in \mathrm{SO}(3)$ in velja $Q = \alpha(1, -Q)$.

To pomeni, da je grupa $\mathrm{O}(3)$ izomorfna direktnemu produktu komponente enote in pa grupe komponent

$$\mathrm{O}(3) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(3).$$

(b) Sedaj bomo pokazali, da analogen izomorfizem ne obstaja v dveh dimenzijah.

Grupa $\mathrm{O}(2)$ ima dve komponenti. V komponenti enote $\mathrm{SO}(2)$ so rotacije, v preostali komponenti pa zrcaljenja.

Rotacijo za kot $\phi \in [0, 2\pi]$ v pozitivni smeri lahko predstavimo z rotacijsko matriko

$$R_\phi = \begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}.$$

Rotacijske matrike imajo determinanto enako 1.

Zrcaljenje čez premico skozi izhodišče, ki seka abscisno os pod kotom ϕ, pa lahko po drugi strani predstavimo z matriko

$$Z_\phi = \begin{bmatrix}\cos 2\phi & \sin 2\phi\\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi\end{bmatrix}.$$

Te matrike imajo determinanto enako -1.

Da grupi $\mathrm{O}(2)$ in $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2)$ nista izomorfni, sledi iz dejstva, da je $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2)$ komutativna, $\mathrm{O}(2)$ pa nekomutativna grupa. Rotacije sicer komutirajo med sabo, medtem ko za zrcaljenja velja zveza

$$Z_{\phi_2} \circ Z_{\phi_1} = R_{2(\phi_2-\phi_1)}.$$

Dve različni zrcaljenji torej nikoli ne komutirata.

Čeprav grupi $\mathrm{O}(2)$ in $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2)$ nista izomorfni, pa sta med sabo difeomorfni. Eksplicitni difeomorfizem je na primer preslikava $\alpha : \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{O}(2)$, ki je definirana s predpisom

$$\alpha(k, R) = (Z_{\pi/4})^k R.$$

Matrika

$$Z_{\pi/4} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

zamenja med sabo vlogo x in y koordinate, kar pomeni, da je $(Z_{\pi/4})^2 = \mathrm{I}$. Označimo z $\mathbb{Z}_2$ podgrupo $\mathrm{O}(2)$, ki vsebuje matriki I in $(Z_{\pi/4})^2$. Potem imata podgrupi $\mathbb{Z}_2$ in $\mathrm{SO}(2)$ grupe $\mathrm{O}(2)$ naslednje lastnosti:

- $\mathrm{SO}(2)$ je edinka, $\mathbb{Z}_2$ pa podgrupa,
- $\mathrm{SO}(2) \cap \mathbb{Z}_2 = \{\mathrm{I}\}$,
- $\mathbb{Z}_2 \cdot \mathrm{SO}(2) = \mathrm{O}(2)$.

Kadar v splošnem dve podgrupi dane grupe zadoščata tem lastnostim, rečemo, da je grupa semidirektni produkt teh dveh podgrup in to označimo

$$\mathrm{O}(2) = \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathrm{SO}(2).$$

Opomba: Za $n > 3$ lahko na analogen način pokažemo, da velja:

- če je n sod, je $\mathrm{O}(n) \cong \mathbb{Z}_n \ltimes \mathrm{SO}(n)$,
- če je n lih, je $\mathrm{O}(n) \cong \mathbb{Z}_n \times \mathrm{SO}(n)$.

Za splošno Liejevo grupo G pa imamo zmeraj kratko eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow G_e \longrightarrow G \longrightarrow \pi_0(G) \longrightarrow 0,$$

kjer je G_e povezana komponenta enote, $\pi_0(G)$ pa diskretna grupa komponent grupe G. Liejeva grupa G je izomorfna semidirektnemu produktu komponente enote in pa grupe komponent natanko takrat, ko je zgornje eksaktno zaporedje razcepno. To pomeni, da lahko v grupi G najdemo izomorfno kopijo grupe $\pi_0(G)$, ki vsebuje natanko en element iz vsake komponente grupe G. Če je ta kopija grupe komponent hkrati edinka v G, dobimo direktni produkt. $\square$

(2) Opiši strukturo Lorentzove grupe $\mathrm{O}(1,1)$.

Rešitev: V Lorentzovi grupi $\mathrm{O}(1,1)$ so matrike oblike

$$\mathrm{O}(1,1) = \{A \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R}) \mid A^T\, \mathrm{I}_{1,1}\, A = \mathrm{I}_{1,1}\},$$

kjer je

$$\mathrm{I}_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrika, ki na $\mathbb{R}^2$ porodi Lorentzovo metriko. Če koordinate na $\mathbb{R}^2$ označimo s (t, x), so v grupi $\mathrm{O}(1,1)$ ravno matrike A, za katere velja

$$(t')^2 - (x')^2 = t^2 - x^2.$$

Pri tem smo označili $\vec{r}\,' = A\vec{r}$.

Zapišimo sedaj poljubno matriko $A \in \mathrm{O}(1,1)$ v obliki

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}.$$

Pogoj $A^T\, \mathrm{I}_{1,1}\, A = \mathrm{I}_{1,1}$ se potem prevede v sistem enačb:

$$\begin{aligned} x_{11}^2 - x_{21}^2 &= 1, \\ x_{11}x_{12} - x_{21}x_{22} &= 0, \\ x_{22}^2 - x_{12}^2 &= 1. \end{aligned}$$

Prva in tretja enačba nam povesta, da velja $|x_{11}| \geq 1$ in $|x_{22}| \geq 1$. Če to upoštevamo, lahko dani sistem prepišemo v obliko:

$$\begin{aligned} x_{11}^2 &= 1 + x_{21}^2, \\ \tfrac{x_{12}}{x_{22}} &= \tfrac{x_{21}}{x_{11}}, \\ x_{22}^2 &= 1 + x_{12}^2. \end{aligned}$$

Poleg tega iz pogoja $A^T \, \mathrm{I}_{1,1} \, A = \mathrm{I}_{1,1}$ avtomatično sledi, da je $\det(A) = \pm 1$. V nadaljevanju bomo opisali komponento enote Lorenztove grupe, ki jo označimo z $\mathrm{SO}^+(1,1)$, nato pa še grupo komponent.

Komponenta enote:

V komponenti enote $\mathrm{SO}^+(1,1)$ Lorentzove grupe so matrike, ki jih lahko povežemo s potjo v Lorentzovi grupi do identične matrike. Po eni strani to pomeni, da imajo vse matrike v komponenti enote determinanto enako 1, ker pa velja $|x_{11}| \geq 1$ in $|x_{22}| \geq 1$, pa mora za vse te matrike veljati še $x_{11} \geq 1$ in $x_{22} \geq 1$.

Izkaže se, da je Lorentzove matrike pametno parametrizirati s hiperboličnimi funkcijami. Ker hiperbolični sinus predstavlja difeomorfizem $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, lahko definiramo:

$$\begin{aligned} x_{21} &= \mathrm{sh}\, \alpha, \\ x_{12} &= \mathrm{sh}\, \alpha' \end{aligned}$$

za neka enolično določena $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Iz enačb $x_{11}^2 = 1 + x_{21}^2$ in $x_{22}^2 = 1 + x_{12}^2$ potem z upoštevanjem neenakosti $x_{11} \geq 1$ in $x_{22} \geq 1$ sledi:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \mathrm{ch}\, \alpha, \\ x_{22} &= \mathrm{ch}\, \alpha'. \end{aligned}$$

Enakost $\frac{x_{12}}{x_{22}} = \frac{x_{21}}{x_{11}}$ se potem prepiše v obliko $\mathrm{th}\, \alpha' = \mathrm{th}\, \alpha$. Ker je hiperbolični tangens bijektivna funkcija, od tod sledi $\alpha' = \alpha$. To pomeni, da je vsaka matrika $A \in \mathrm{SO}^+(1,1)$ oblike

$$A = H_\alpha = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\, \alpha & \mathrm{sh}\, \alpha \\ \mathrm{sh}\, \alpha & \mathrm{ch}\, \alpha \end{bmatrix}$$

za nek enolično določen $\alpha \in \mathbb{R}$. Po analogiji z rotacijami Evklidske ravnine rečemo matriki H_α hiperbolična rotacija. Kotu α včasih v povezavi s specialno teorijo relativnosti rečemo rapidnost. Če namreč koordinatna sistema (t', x') in (t, x) predstavljata dva opazovalca, ki se gibljeta z relativno hitrostjo v, potem v enotah, v katerih je $c = 1$, velja:

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}\, \alpha &= \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ \mathrm{ch}\, \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ \mathrm{th}\, \alpha &= v. \end{aligned}$$

Preverimo lahko, da velja $H_{\alpha_1} \circ H_{\alpha_2} = H_{\alpha_1 + \alpha_2}$, od koder sledi, da imamo izomorfizem

$$\mathrm{SO}^+(1,1) \cong \mathbb{R}.$$

Matrikam v $\mathrm{SO}^+(1,1)$ rečemo prave, ortokrone Lorentzove transformacije.

Grupa komponent:

Parametra, ki določata, v kateri komponenti leži Lorentzova matrika, sta predznaka členov x_{11} in x_{22}. Označimo matrike

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{PT} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poljubno Lorentzovo matriko lahko s potjo povežemo do tiste izmed teh štirih matrik, ki ima isto predznačena diagonalna člena. Zaradi pogojev na diagonalna člena je tudi jasno, da nobenih dveh izmed teh matrik ne moremo povezati s potjo. Od tod sledi, da ima Lorentzova grupa štiri komponente, katerih predstavniki so zgornje štiri matrike.

Kot smo že omenili, so v komponenti enote prave, ortokrone Lorentzove transformacije. V komponenti matrike P so matrike, ki obrnejo orientacijo prostora, v komponenti T so matrike, ki obrnejo smer časa, medtem ko so v komponenti matrike PT tiste matrike, ki obrnejo orientacijo prostora in smer časa.

Te štiri matrike tvorijo podgrupo Lorentzove grupe, ki je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Podobno kot pri grupi $\mathrm{O}(2)$ lahko pokažemo, da velja

$$\mathrm{O}(1,1) \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \ltimes \mathrm{SO}^+(1,1).$$

□

(3) Naj bo $\mathrm{O}(n, \mathrm{B}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \,|\, A^T \mathrm{B} A = \mathrm{B}\}$, kjer je $\mathrm{B} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ obrnljiva simetrična ali pa antisimetrična matrika. Pokaži, da je $\mathrm{O}(n, \mathrm{B})$ Liejeva grupa.

Rešitev: Grupa $\mathrm{O}(n, \mathrm{B})$ je grupa matrik, ki ohranjajo strukturo, ki jo na prostoru $\mathbb{R}^n$ določa matrika B. Do izomorfizma natančno dobimo na ta način naslednje grupe:

(1) V primeru, ko je $B = \mathrm{I}_n$, dobimo grupo

$$\mathrm{O}(n) = \{Q \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \,|\, Q^T Q = \mathrm{I}\}$$

ortogonalnih matrik. To so linearne izometrije Evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$. Kot smo že videli, ima grupa $\mathrm{O}(n)$ dve komponenti, komponenta enote pa je grupa $\mathrm{SO}(n)$. Dimenzija grupe $\mathrm{O}(n)$ je enaka $\frac{n(n-1)}{2}$.

(2) V primeru, ko je $B = \mathrm{I}_{p,q}$, kjer je $n = p + q$, dobimo posplošeno Lorentzovo grupo

$$\mathrm{O}(p, q) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \,|\, A^T \, \mathrm{I}_{p,q} \, A = \mathrm{I}_{p,q}\}.$$

Pri tem smo upoštevali, da je $I_{p,q}$ matrika, ki jo lahko zapišemo v bločni obliki

$$\mathrm{I}_{p,q} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_q \end{bmatrix}.$$

Te matrike ohranjajo Lorentzovo psevdometriko na prostoru $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, ki ima p časovnih in q prostorskih dimenzij. Grupa $\mathrm{O}(p, q)$ ima štiri komponente, komponenta enote $\mathrm{SO}^+(p, q)$ pa sestoji iz matrik, ki ohranjajo tako orientacijo časa kot orientacijo prostora. Dimenzija grupe $\mathrm{O}(p, q)$ je enaka $\frac{n(n-1)}{2}$.

(3) Naj bo sedaj Ω standardna simplektična matrika, ki jo zapišemo v obliki

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Simplektična grupa

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(2n \times 2n, \mathbb{R}) \,|\, A^T \Omega A = \Omega\}$$

potem sestoji iz matrik, ki ohranjajo simplektično formo na prostoru $\mathbb{R}^{2n}$. To so ravno matrike, ki ohranjajo strukturo hamiltonskih enačb. Simplektična grupa je povezana, njena dimenzija pa je $2n^2 + n$.

Da je poljubna grupa $\mathrm{O}(n, \mathrm{B})$ izomorfna eni izmed teh, sledi iz naslednje opazke:

· Če je $\mathrm{B} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ simetrična, obrnljiva matrika, je po Sylvestrovem izreku o inerciji kongruentna diagonalni matriki oblike $\mathrm{I}_{p,q}$. To pomeni, da obstaja matrika P, da velja

$$\mathrm{B} = P^T \, \mathrm{I}_{p,q} \, P.$$

· Če je $\mathrm{B} \in \mathrm{Mat}(2n \times 2n, \mathbb{R})$ antisimetrična, obrnljiva matrika, je kongruentna matriki Ω. Torej obstaja matrika P, da velja

$$\mathrm{B} = P^T \Omega P.$$

Opomnimo še, da je v lihih dimenzijah vsaka antisimetrična matrika izrojena, zato so za nas zanimive samo sode dimenzije.

Dokaza, da je $\mathrm{O}(n, \mathrm{B})$ Liejeva grupa, sta v primerih, ko je B simetrična ali pa antisimetrična, analogna. Zato denimo, da je $\mathrm{B} \in \mathrm{Mat}(2n \times 2n, \mathbb{R})$ antisimetrična, obrnljiva matrika in naj velja $\mathrm{B} = P^T \Omega P$. Vzemimo poljuben $A \in \mathrm{O}(n, \mathrm{B})$. Po definiciji je potem $A^T \mathrm{B} A = \mathrm{B}$. Če upoštevamo zvezo $\mathrm{B} = P^T \Omega P$, od tod sledi:

$$\begin{aligned} A^T (P^T \Omega P) A &= P^T \Omega P, \\ P^{-T} A^T P^T \Omega P A P^{-1} &= \Omega, \\ (PAP^{-1})^T \Omega P A P^{-1} &= \Omega. \end{aligned}$$

Vidimo, da je torej $PAP^{-1} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Konjugiranje z obrnljivo matriko P je torej gladek izomorfizem Liejeve grupe $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$, ki grupo $\mathrm{O}(n, \mathrm{B})$ preslika na simplektično grupo $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Ker je simplektična grupa Liejeva grupa, je torej tudi $\mathrm{O}(n, \mathrm{B})$ Liejeva grupa. Eksplicitno pa velja

$$\mathrm{O}(n, \mathrm{B}) = P^{-1} \cdot \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cdot P.$$

Analogen sklep deluje tudi v primeru, ko je matrika B simetrična. □

(4) Poišči centre grup $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ in $\mathrm{SU}(n)$.

Rešitev: Center Liejeve grupe G je zaprta Liejeva podgrupa edinka grupe G, ki je določena s pogojem

$$\mathrm{Z}(G) = \{a \in G \,|\, ag = ga, \, \forall g \in G\}.$$

Za nas bodo centri Liejevih grup zanimivi pri klasifikaciji Liejevih grup, ki imajo izomorfne Liejeve algebre. Vsaka povezana Liejeva grupa je namreč kvocient neke enostavno povezane Liejeve grupe po neki diskretni podgrupi centra.

Centre danih grup bomo izračunali v dveh korakih. Najprej bomo pokazali, da je vsaka matrika v centru kar večkratnik identitete, nato pa preverili, kateri večkratniki identitete pridejo v poštev v vsaki izmed grup.

Zaradi enostavnosti se bomo najprej omejili na primer, ko je $n \geq 3$, ker lahko tako hkrati obravnavamo vse dane grupe.

1. korak: vsaka matrika $A \in \mathrm{Z}(G)$ je oblike $A = a\,\mathrm{I}$ za nek $a \in \mathbb{F}$:

Vzemimo poljubno matriko A iz centra in naj bo oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Naš cilj bo najti primerne matrike R_i, tako da bomo iz pogoja $AR_i = R_iA$ dobili čimveč enačb za koeficiente matrike A. Vzemimo za začetek matriko R_1, ki je oblike

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & \mathrm{I}_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Ta matrika predstavlja rotacijo v ravnini prvih dveh koordinatnih smeri. Sledi

$$AR_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & \mathrm{I}_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,2} & -a_{1,1} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & -a_{2,1} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & -a_{3,1} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & -a_{n,1} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Množenje z matriko R_1 z desne zamenja prva dva stolpca (in zamenja predznak), vse ostale stolpce pa pusti pri miru. Podobno dobimo

$$R_1A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & \mathrm{I}_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & \cdots & -a_{2,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Tokrat se zamenjata prvi dve vrstici, ostale vrstice pa ostanejo pri miru.

Iz pogoja $AR_1 = R_1A$ sedaj dobimo, da velja $a_{1,1} = a_{2,2}$ in $a_{2,1} = -a_{1,2}$. Poleg tega pa za vsak $3 \leq k \leq n$ velja še

$$a_{k,2} = a_{k,1}, \quad a_{k,2} = -a_{k,1}, \quad a_{1,k} = -a_{2,k}, \quad a_{2,k} = a_{1,k}.$$

Torej so vsi ti členi enaki nič, matrika A pa je oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{1,2} & a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \text{A'} & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix},$$

kjer je A' spodnji desni kot matrike A. V naslednjem koraku bomo vzeli matriko

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \mathrm{I}_{n-3} \end{bmatrix}.$$

Če zapišemo pogoj $AR_2 = R_2A$ s sistemom enačb, vidimo, da morajo biti elementi matrike A v tretji vrstici in tretjem stolpcu ničelni. Izjema je diagonalni člen, ki zadošča pogoju $a_{3,3} = a_{2,2}$. Poleg tega dobimo še, da velja $a_{1,2} = a_{2,1} = 0$.

Sedaj postopek ponovimo z matrikami $R_3, \ldots, R_{n-1}$, ki so definirane na analogen način. Kot rezultat dobimo, da je matrika A diagonalna in da so vsi elementi diagonale enaki. Torej je $A = a\,\mathrm{I}$ za neko število a. Zaenkrat še ni bilo pomembno, katero grupo študiramo, saj matrike R_i ležijo v vseh naših grupah.

2. korak: izračun centrov:

Dokazali smo že, da so v centru danih grup le matrike oblike $A = a\,\mathrm{I}$. Možne vrednosti števila a so odvisne od grupe.

Ker je za poljuben $a \in \mathbb{R}^\times$ matrika $a\,\mathrm{I} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, je

$$\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) = \{a\,\mathrm{I} \mid a \in \mathbb{R}^\times\} \cong \mathbb{R}^\times.$$

Če hočemo, da bo $\det(a\,\mathrm{I}) = 1$, mora biti $a^n = 1$. V realnem tako dobimo le dve možnosti

$$\mathrm{Z}(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})) = \begin{cases} \{\mathrm{I}\} & ;\ n \text{ lih}, \\ \{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\} & ;\ n \text{ sod.} \end{cases}$$

Podobno dobimo:

$$\mathrm{Z}(\mathrm{O}(n)) = \{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\},$$
$$\mathrm{Z}(\mathrm{SO}(n)) = \begin{cases} \{\mathrm{I}\} & ;\ n \text{ lih}, \\ \{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\} & ;\ n \text{ sod.} \end{cases}$$

Matrika $a\,\mathrm{I}$ je unitarna matrika, če je $|a| = 1$ oziroma $a \in S^1$. Sledi

$$\mathrm{Z}(\mathrm{U}(n)) = \{a\,\mathrm{I} \mid |a| = 1\} \cong S^1.$$

Če hočemo, da ima takšna unitarna matrika determinanto enako ena, mora veljati še $a^n = 1$. Tej enačbi zadoščajo n-ti koreni enote

$$\mathrm{Z}(\mathrm{SU}(n)) = \{a\,\mathrm{I} \mid a^n = 1\} \cong \mathbb{Z}_n.$$

Posebej moramo preveriti še primer $n = 2$. V tem primeru lahko izvedemo samo en korak zgornjega postopka, da dobimo pogoj, da je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

za neki števili a in b. Izkaže se, da je rezultat enak kot v primerih $n \geq 3$, razen pri grupi $\mathrm{SO}(2)$, ki je komutativna, kar pomeni, da je

$$\mathrm{Z}(\mathrm{SO}(2)) = \mathrm{SO}(2).$$

V preostalih primerih lahko pokažemo, da mora biti $b = 0$, če izračunamo komutatorje z matrikami :

· $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ za grupi $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$,

· $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ za grupi $\mathrm{O}(2)$ in $\mathrm{U}(2)$,

· $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ za grupo $\mathrm{SU}(2)$.

□

(5) Poišči zveste matrične reprezentacije grup $\mathbb{R}^n$ in $\mathrm{E}(3)$.

Rešitev: Včasih imamo opravka z grupami, katere elementi niso matrike. V takih primerih nas zanima, ali lahko grupni operaciji prevedemo na matrično množenje in invertiranje, kar pomeni, da iščemo injektiven homomorfizem

$$\phi : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

dane grupe G v neko matrično Liejevo grupo. Če znamo dano grupo vložiti v matrično grupo, lahko nato s pridom uporabljamo vse rezultate, ki veljajo v matričnih grupah in ki nam včasih olajšajo računanje.

Obstajajo primeri grup, ki jih ne moremo vložiti v nobeno matrično grupo. Ena izmed takšnih grup je univerzalni krov grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Po drugi strani pa po Peter-Weylovem izreku lahko vsako kompaktno Liejevo grupo vložimo v neko matrično grupo.

Zvesta reprezentacija grupe $\mathbb{R}^n$:

Najprej si poglejmo primer $n = 1$. Grupo $(\mathbb{R}, +)$ realnih števil za seštevanje bi radi predstavili z matričnim množenjem. Definirajmo preslikavo $\phi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ s predpisom

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta preslikava je gladka, velja pa še

$$\phi(x)\phi(y) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x + y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \phi(x + y),$$

kar pomeni, da je homomorfizem grup. Jasno je tudi, da je injektivna.

Za splošen n vzamemo n takšnih kosov in jih zložimo v bločno diagonalno matriko. Tako dobimo injektiven homomorfizem $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$, ki je definiran s predpisom

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & 1 & x_2 & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & x_n \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zvesta reprezentacija grupe E(3):
Evklidska grupa E(3) je grupa vseh izometrij Evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$. Vsaka izometrija $\tau \in \mathrm{E}(3)$ je oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a}$$

za neko matriko $Q \in \mathrm{O}(3)$ in nek vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Matrika Q predstavlja rotacijski del, vektor $\vec{a}$ pa translacijski del izometrije. Čeprav lahko vsako izometrijo τ predstavimo kot par $(Q, \vec{a})$, pa grupna struktura ni produktna. Kompozitum dveh takih izometrij je namreč

$$(\tau_2 \circ \tau_1)(\vec{x}) = \tau_2(Q_1\vec{x} + \vec{a}_1) = Q_2Q_1\vec{x} + (Q_2\vec{a}_1 + \vec{a}_2).$$

Enota grupe E(3) je identična preslikava, za inverz pa velja

$$(Q, \vec{a})^{-1} = (Q^{-1}, -Q^{-1}\vec{a}).$$

Preveriti se da, da je grupa ortogonalnih transformacij O(3) podgrupa grupe E(3), grupa translacij $\mathbb{R}^3$ pa podgrupa edinka grupe E(3). Zato imamo izomorfizem

$$\mathrm{E}(3) \cong \mathrm{O}(3) \ltimes \mathbb{R}^3.$$

Evklidsko grupo lahko vložimo v grupo $\mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ s predpisom

$$(Q, \vec{a}) \mapsto \begin{bmatrix} Q & \vec{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da je tako dobljena preslikava $\phi : \mathrm{E}(3) \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ homomorfizem grup, sledi iz enakosti:

$$\phi\left((Q_2, \vec{a}_2)(Q_1, \vec{a}_1)\right) = \begin{bmatrix} Q_2Q_1 & Q_2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\phi(Q_2, \vec{a}_2)\phi(Q_1, \vec{a}_1) = \begin{bmatrix} Q_2 & \vec{a}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & \vec{a}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_2Q_1 & Q_2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

(6) Izračunaj eksponentno preslikavo $\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{SO}(3)$.

Rešitev: Liejeva algebra $\mathfrak{so}(3)$ Liejeve grupe SO(3) sestoji iz antisimetričnih matrik

$$\mathfrak{so}(3) = \{W \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) \,|\, W^T + W = 0\}.$$

Vsaka taka matrika je oblike

$$W(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

za nek enolično določen vektor $\vec{\omega} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Izkaže se, da preslikava $W : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$, ki jo tako dobimo, ni samo izomorfizem vektorskih prostorov, pač pa tudi izomorfizem Liejevih algeber $(\mathbb{R}^3, \times)$ in $\mathfrak{so}(3)$. Po eni strani je:

$$[W(\vec{\omega}_1), W(\vec{\omega}_2)] = \begin{bmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z_2 & y_2 \\ z_2 & 0 & -x_2 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -z_2 & y_2 \\ z_2 & 0 & -x_2 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & y_1x_2 - x_1y_2 & z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 & 0 & z_1y_2 - y_1z_2 \\ x_1z_2 - z_1x_2 & y_1z_2 - z_1y_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Po drugi strani pa je

$$W(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) = \begin{bmatrix} 0 & -(x_1y_2 - y_1x_2) & z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 & 0 & -(y_1z_2 - z_1y_2) \\ -(z_1x_2 - x_1z_2) & y_1z_2 - z_1y_2 & 0 \end{bmatrix},$$

od koder dobimo

$$W(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) = [W(\vec{\omega}_1), W(\vec{\omega}_2)].$$

Izračunajmo sedaj eksponentno preslikavo $\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{SO}(3)$. Vzemimo poljubno matriko $W(\vec{\omega})$ in najprej izračunajmo njen karakteristični polinom. Velja

$$\det(W(\vec{\omega}) - \lambda\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -z & y \\ z & -\lambda & -x \\ -y & x & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2).$$

Če je $|\vec{e}| = 1$, dobimo po Cayley-Hamiltonovem izreku enakost

$$W(\vec{e})^3 = -W(\vec{e}).$$

Poljuben neničeln $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ pa lahko zapišemo v obliki $\vec{\omega} = \phi\vec{e}$, kjer je $\phi = |\vec{\omega}|$ in $\vec{e} = \frac{\vec{\omega}}{\phi}$. Od tod sledi $W(\vec{\omega}) = \phi W(\vec{e})$. Če označimo $W = W(\vec{e})$, je torej $W^3 = -W$ in

$$\begin{aligned} e^{\phi W} &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(\phi W)^k}{k!} = \mathrm{I} + \phi W + \tfrac{\phi^2 W^2}{2} - \tfrac{\phi^3 W}{3!} - \tfrac{\phi^4 W^2}{4!} + \tfrac{\phi^5 W}{5!} + \tfrac{\phi^6 W^2}{6!} + \ldots, \\ &= \mathrm{I} + W(\phi - \tfrac{\phi^3}{3!} + \tfrac{\phi^5}{5!} - \tfrac{\phi^7}{7!} + \ldots) + W^2(\tfrac{\phi^2}{2} - \tfrac{\phi^4}{4!} + \tfrac{\phi^6}{6!} - \tfrac{\phi^8}{8!} + \ldots), \\ &= \mathrm{I} + \sin\phi W + (1 - \cos\phi) W^2. \end{aligned}$$

Tako smo izpeljali formulo

$$e^{W(\vec{\omega})} = \mathrm{I} + \sin\phi\, W(\vec{e}) + (1 - \cos\phi)\, W(\vec{e})^2 = \mathrm{I} + \tfrac{\sin\phi}{\phi}\, W(\vec{w}) + \tfrac{(1-\cos\phi)}{\phi^2}\, W(\vec{\omega})^2.$$

To preslikavo smo že spoznali, ko smo študirali osno-kotne koordinate na Liejevi grupi SO(3). Eksponentna preslikava

$$\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{SO}(3)$$

je gladka surjekcija. Če je zožimo na odprto kroglo $B(0, \pi) \subset \mathfrak{so}(3)$, dobimo injektivno submerzijo, medtem ko dve antipodni točki s sfere $S(0, \pi)$ eksponentna preslikava preslika v isto rotacijo.

Opomba: Liejeva algebra $\mathfrak{so}(3)$ in Liejeva grupa SO(3) sta pomembni pri matematični formulaciji dinamike togega telesa. Elementi grupe SO(3) ustrezajo orientacijam togega telesa v prostoru, elementi Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$ pa kotnim hitrostim vrtenja togega telesa.

Vrtenje togega telesa lahko opišemo z gladko potjo

$$Q : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3).$$

Odvod te preslikave $\dot{Q}(t)$ je potem neka matrika, ki leži v tangentnem prostoru $T_{Q(t)}\,\mathrm{SO}(3)$. Ker se tangentni prostori grupe SO(3) od točke do točke razlikujejo med sabo, tangentnih vektorjev v različnih točkah ne moremo neposredno primerjati med sabo. Lahko pa jih primerjamo posredno, tako da jih prenesemo v tangentni prostor $T_{\mathrm{I}}\,\mathrm{SO}(3) = \mathfrak{so}(3)$ z levo ali pa desno translacijo. Eksplicitno tako dobimo elementa

$$Q(t)^T\dot{Q}(t),\ \dot{Q}(t)Q(t)^T \in \mathfrak{so}(3).$$

Ta primerjava nam omogoča, da hitrost vrtenja enačimo z neko antisimetrično matriko. Če nadalje uporabimo še izomorfizem W, pa lahko hitrost vrtenja enačimo kar z vektorji v $\mathbb{R}^3$. Izkaže se, da se ta identifikacija ujema z geometrično definicijo vektorja kotne hitrosti. Vektorja

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_s(t) &= W^{-1}\left(\dot{Q}(t)Q(t)^T\right),\\ \vec{\omega}_b(t) &= W^{-1}\left(Q(t)^T\dot{Q}(t)\right)\end{aligned}$$

sta namreč ravno vektorja kotne hitrosti vrtenja v prostorski in v telesni bazi.

Za konec si poglejmo še interpretacijo eksponentne preslikave. Če si izberemo matriko $W(\vec{\omega}) \in \mathfrak{so}(3)$, nam pot

$$t \mapsto e^{tW(\vec{\omega})}$$

predstavlja enakomerno vrtenje togega telesa s kotno hitrostjo $\vec{\omega}$. V posebnem primeru je $e^{W(\vec{\omega})}$ rotacija, ki jo dobimo če se za eno časovno enoto vrtimo s kotno hitrostjo $\vec{\omega}$. To pa je ravno rotacija za kot ϕ okoli osi $\vec{e}$, kjer sta ϕ in $\vec{e}$ definirana kot v nalogi. $\square$

(7) Poišči vse povezane Liejeve podgrupe Liejevih grup $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{SO}(3)$ in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Rešitev: Naj bo G Liejeva grupa in $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Spomnimo se, da je vektorski podprostor $L \subset \mathfrak{g}$:

- *Liejeva podalgebra* $\mathfrak{g}$, če velja $[L, L] \subset L$,
- *ideal* $\mathfrak{g}$, če velja $[L, \mathfrak{g}] \subset L$.

V vsaki Liejevi grupi G imamo bijektivno korespondenco

$$\{\text{povezane Liejeve podgrupe } G\} \longleftrightarrow \{\text{Liejeve podalgebre } \mathfrak{g}\},$$

kjer podgrupam edinkam Liejeve grupe G ustrezajo ideali Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Opomnimo še, da je iz desne v levo preslikava definirana s pomočjo eksponentne preslikave. Če torej želimo klasificirati vse povezane podgrupe grupe G, je dovolj najti vse podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ in nato izračunati njihove slike pri eksponentni preslikavi.

Povezane podgrupe grupe $G = \mathbb{R}^2$:

Liejeva grupa $G = \mathbb{R}^2$ je hkrati vektorski prostor, zato jo lahko identificiramo z njeno Liejevo algebro $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$. Ker je grupa komutativna, je tudi njena algebra komutativna, kar pomeni, da je komutator poljubnih dveh elementov enak nič. Med drugim to pomeni, da je vsak vektorski podprostor $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$ avtomatično podalgebra in hkrati ideal.

Ker je $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, so zanimivi samo podprostori $L \subset \mathbb{R}^2$ dimenzije $\dim(L) = 1$. Vsak tak je oblike $L = \mathrm{Lin}\{v\}$ za nek $v \neq 0$. Pridružena eksponentna preslikava $\exp : L \to \mathbb{R}^2$ je potem zelo preproste oblike

$$\exp(tv) = tv.$$

Slika $\exp(L)$ je povezana enodimenzionalna Liejeva podgrupa $\mathbb{R}^2$, ki jo lahko enačimo z L. Vse te podgrupe so zaradi komutativnosti $\mathbb{R}^2$ avtomatično edinke in so izomorfne $\mathbb{R}$.

Povezane podgrupe grupe $G = \mathrm{SO}(3)$:

Spomnimo se, da je vsaka matrika $W \in \mathfrak{so}(3) = \{W \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{R}) \,|\, W^T + W = 0\}$ oblike

$$W = W(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

za nek enolično določen vektor $\vec{\omega} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ker je $\dim(\mathrm{SO}(3)) = 3$, moramo klasificirati eno in dvodimenzionalne Liejeve podalgebre L Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$.

$\dim(L) = 1$:

Vsak enodimenzionalen vektorski podprostor $L \subset \mathfrak{so}(3)$ je avtomatično komutativna Liejeva podalgebra $\mathfrak{so}(3)$. Zapišemo ga lahko v obliki $L = \mathrm{Lin}\{W(\vec{\omega})\}$ za nek neničeln $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Izračunali smo že, da je eksponentna preslikava $\exp : L \to \mathrm{SO}(3)$ definirana s predpisom

$$\exp(tW(\vec{\omega})) = e^{tW(\vec{\omega})} = R(\vec{e}, t|\vec{\omega}|),$$

kjer je $\vec{e} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$. Slika $\exp(L)$ je komutativna povezana podgrupa grupe $\mathrm{SO}(3)$, ki sestoji iz vseh rotacij okoli osi $\vec{e}$ in je izomorfna grupi S^1.

Če vzamemo poljuben $W(\vec{\omega}')$, ki ni večkratnik $W(\vec{\omega})$, iz enakosti

$$[W(\vec{\omega}), W(\vec{\omega}')] = W(\vec{\omega} \times \vec{\omega}') \notin L$$

sledi, da L ni ideal $\mathfrak{so}(3)$. To pomeni, da grupa $\mathrm{SO}(3)$ nima povezanih enodimenzionalnih podgrup edink.

$\dim(L) = 2$:

Denimo, da je $L = \mathrm{Lin}\{W(\vec{\omega}_1), W(\vec{\omega}_2)\}$ dvodimenzionalna Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$. Potem iz enakosti

$$[W(\vec{\omega}_1), W(\vec{\omega}_2)] = W(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$$

sledi, da je $L = \mathfrak{so}(3)$, kar pa je v protislovju s predpostavko o dimenziji L. Torej grupa $\mathrm{SO}(3)$ nima povezanih dvodimenzionalnih Liejevih podgrup. Pokazali smo, da $\mathrm{SO}(3)$ nima netrivialnih povezanih podgrup edink. Takšnim grupam rečemo enostavne grupe.

Povezane podgrupe grupe $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$:

Liejeva algebra grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sestoji iz vseh matrik z ničelno sledjo

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R}) \,|\, \mathrm{sl}(A) = 0\}.$$

Vsaka taka matrika je oblike

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

za neka realna števila a, b in c. Za bazo Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ pogosto vzamemo matrike

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

ki zadoščajo komutacijskim relacijam:

$$\begin{aligned} [E,F] &= H, \\ [H,E] &= 2E, \\ [H,F] &= -2F. \end{aligned}$$

Karakteristični polinom matrike A je

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & -a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \det(A).$$

Po Cayley-Hamiltonovem izreku je $A^2 = -\det(A)\,\mathrm{I}$, od koder lahko izpeljemo formulo

$$e^A = \operatorname{ch}\alpha\,\mathrm{I} + \tfrac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha}A.$$

Pri tem smo uporabili oznako $\alpha = \sqrt{a^2+bc} = \sqrt{-\det(A)}$.

$\dim(L) = 1$:

Linearna ogrinjača matrike $A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ je enodimenzionalna Liejeva podalgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Izkaže pa se, da pridružene povezane Liejeve podgrupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ niso vse izomorfne, kot je bilo to v primerih grup $\mathbb{R}^2$ in $\mathrm{SO}(3)$. Zato nas bodo zanimali konjugiranostni razredi enodimenzionalnih podgrup. Poljubna matrika $A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ima bodisi dve neničelni realni lastni vrednosti, dvojno ničelno lastno vrednost ali pa dve konjugirani imaginarni lastni vrednosti. Po pretvorbi v Jordanovo ali pa realno Schurovo formo lahko za bazo enodimenzionalne Liejeve algebre L vzamemo eno izmed matrik

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Če je $L = \{tA \,|\, t \in \mathbb{R}\}$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, je $e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. To pomeni, da je pridružena povezana enodimenzionalna podgrupa

$$\exp(L) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

izomorfna grupi $\mathbb{R}$.

(b) Če je $L = \{tA \,|\, t \in \mathbb{R}\}$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, je $e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$. Pridružena povezana podgrupa

$$\exp(L) = \left\{ \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

je spet izomorfna $\mathbb{R}$. Je pa v določenem smislu različna od prejšnje grupe, saj so slike njenih elementov v adjungirani reprezentaciji diagonalizabilne.

(c) Če je $L = \{tA \,|\, t \in \mathbb{R}\}$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, je $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$. Pridružena povezana podgrupa

$$\exp(L) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

je tokrat kompaktna in izomorfna S^1. Sovpada s podgrupo $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Podobno kot pri grupi $\mathrm{SO}(3)$ lahko tudi tu pokažemo, da nobena izmed enodimenzionalnih podalgeber ni ideal, kar pomeni, da grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ nima povezanih enodimenzionalnih podgrup edink.

$\underline{\dim(L)=2}$:

Z nekaj računanja lahko izpeljemo, da je vsaka dvodimenzionalna Liejeva podalgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ konjugirana podalgebri

$$L = \mathrm{Lin}\{E,H\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R} \right\}.$$

Eksponent matrike $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$ je $e^A = \begin{bmatrix} e^a & b\frac{\operatorname{sh} a}{a} \\ 0 & e^{-a} \end{bmatrix}$, od koder sledi, da je

$$\exp(L) = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \,\middle|\, \lambda>0,\ \beta\in\mathbb{R} \right\}.$$

Tudi ta podgrupa ni edinka, kar pomeni, da je $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ enostavna grupa. □

(8) Heisenbergova grupa H je mnogoterost $\mathbb{R}^3$ skupaj z operacijo

$$(x,y,z)(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z'+\tfrac{1}{2}(xy'-x'y)).$$

Poišči vse povezane Liejeve grupe, ki imajo Liejevo algebro izomorfno Heisenbergovi Liejevi algebri.

Rešitev: Vsaki Liejevi grupi G pripada enolično določena Liejeva algebra $\mathfrak{g}$. Obratno pa ta trditev ne velja, saj imajo lahko neizomorfne Liejeve grupe izomorfne Liejeve algebre. Osnovna primera sta para grup $\mathbb{R}$ in S^1 ter $\mathrm{SU}(2)$ in $\mathrm{SO}(3)$. Izkaže pa se, da imamo korespondenco

$$\{\text{enostavno povezane Liejeve grupe}\} \longleftrightarrow \{\text{Liejeve algebre}\},$$

ki pove, da za vsako Liejevo algebro obstaja do izomorfizma natanko določena enostavno povezana Liejeva grupa, katere Liejeva algebra je izomorfna dani Liejevi algebri. Če je G enostavno povezana Liejeva grupa z Liejevo algebro $\mathfrak{g}$, je vsaka povezana Liejeva grupa, ki ima Liejevo algebro izomorfno Liejevi algebri $\mathfrak{g}$, oblike G/Γ za neko diskretno podgrupo $\Gamma\subset Z(G)$. Klasifikacija povezanih Liejevih grup z izomorfno Liejevo algebro se torej prevede na iskanje diskretnih podgrup centra enostavno povezane Liejeve grupe, ki pripada dani Liejevi algebri.

Heisenbergova grupa H ima enoto $e=(0,0,0)$, inverz elementa (x,y,z) pa je

$$(x,y,z)^{-1} = (-x,-y,-z).$$

Denimo sedaj, da je $(x,y,z)\in Z(H)$. Iz enakosti:

$$\begin{aligned}(x,y,z)(1,0,0) &= (x+1,y,z-\tfrac{1}{2}y),\\ (1,0,0)(x,y,z) &= (x+1,y,z+\tfrac{1}{2}y)\end{aligned}$$

sledi, da je $y=0$. Če komutiramo z elementom $(0,1,0)$, na analogen način dobimo, da je $x=0$. Torej so v centru kvečjemu elementi oblike $(0,0,z)$. Hitro pa lahko preverimo, da so vsi ti elementi dejansko centralni elementi Heisenbergove grupe, kar pomeni, da je

$$Z(H) = \{(0,0,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\}\cong\mathbb{R}.$$

Vsaka netrivialna diskretna podgrupa centra je oblike

$$\Gamma_\lambda = \{(0,0,\lambda k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

za nek $\lambda > 0$. Kvocienti H/Γ_λ bi načeloma lahko bili neizomorfne povezane Liejeve grupe, izkaže pa se, da so med sabo vsi izomorfni. To lahko pokažemo na naslednji način. Najprej označimo $\Gamma = \Gamma_1$ in definirajmo preslikavo $\alpha_\lambda : H \to H$ s predpisom

$$\alpha_\lambda(x,y,z) = (\sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}y, \lambda z).$$

Preverimo lahko, da je α_λ avtomorfizem Heisenbergove grupe, ki podgrupo Γ preslika v Γ_λ. Če s $\pi_\lambda : H \to H/\Gamma_\lambda$ označimo kvocientno projekcijo, je torej jedro preslikave $\pi_\lambda \circ \alpha_\lambda$ enako Γ, kar pomeni, da imamo komutativen diagram Liejevih grup

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\alpha_\lambda", "\cong"'] \arrow[d, "\pi"'] & H \arrow[d, "\pi_\lambda"] \\ H/\Gamma \arrow[r, "\cong"] & H/\Gamma_\lambda \end{tikzcd}$$

Do izomorfizma natančno obstajata torej samo dve povezani Liejevi grupi, katerih Liejeva algebra je izomorfna Heisenbergovi Liejevi algebri. Heisenbergova grupa H je enostavno povezana, medtem ko je grupa H/Γ izomorfna grupi $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$ z operacijo

$$(x,y,e^{2\pi i z})(x',y',e^{2\pi i z'}) = (x+x', y+y', e^{2\pi i (z+z'+\frac{1}{2}(xy'-x'y))}).$$

Grupa H/Γ je zanimiva s teoretičnega stališča, ker je preprost primer Liejeve grupe, ki ni matrična Liejeva grupa. $\square$

(9) Stiefelove mnogoterosti so definirane s predpisi

$$V_k(\mathbb{R}^n) = \{V \in \mathrm{Mat}(n \times k, \mathbb{R}) \mid V^T V = \mathrm{I}_k\}$$

za $n \in \mathbb{N}$ in $1 \leq k \leq n$. Pokaži, da so $V_k(\mathbb{R}^n)$ homogeni $\mathrm{SO}(n)$-prostori za $1 \leq k < n$.

Rešitev: Stiefelovo mnogoterost $V_k(\mathbb{R}^n)$ si predstavljamo kot množico urejenih k-teric ortonormiranih vektorjev v $\mathbb{R}^n$. Vsaka matrika $V \in V_k(\mathbb{R}^n)$ je oblike

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_k],$$

kjer so $v_i \in \mathbb{R}^n$ paroma pravokotni vektorji enotske dolžine. Posebna primera sta:

$$V_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1},$$
$$V_n(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n).$$

Mnogoterost $V_n(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n)$ je Liejeva grupa, za $k < n$ pa dobimo mnogoterosti, ki sicer niso nujno Liejeve grupe, so pa kvocienti Liejeve grupe $\mathrm{SO}(n)$ po ustreznih zaprtih Liejevih podgrupah.

Formalno takšne prostore karakteriziramo na naslednji način. Mnogoterost M je *homogen G-prostor*, kjer je G Liejeva grupa, če obstaja tranzitivno levo delovanje G na M. V tem primeru za poljuben $x \in M$ velja

$$M \cong G/G_x,$$

kjer je G_x podgrupa izotropije delovanja G na M (to je grupa vseh $g \in G$, ki fiksirajo x).

V nadaljevanju bomo pokazali, da imamo v primeru $k < n$ tranzitivno levo delovanje grupe $\mathrm{SO}(n)$ na $V_k(\mathbb{R}^n)$. Izberimo poljubna $Q \in \mathrm{SO}(n)$ in $V = [v_1, v_2, \ldots, v_k] \in V_k(\mathbb{R}^n)$ ter definirajmo delovanje Q na V s predpisom

$$Q \cdot V = Q \cdot [v_1,\, v_2,\, \ldots, v_k] = [Qv_1,\, Qv_2,\, \ldots, Qv_k] = QV.$$

Na splošno v mnogoterostih nimamo naravne izbire izhodišča, kot jo imamo v vektorskih prostorih in Liejevih grupah. Vseeno pa je dokaj naravna izbira izhodišča prostora $V_k(\mathbb{R}^n)$ matrika

$$\mathrm{I}_{n,k} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k \\ 0 \end{bmatrix},$$

ki jo določa prvih k baznih vektorjev prostora $\mathbb{R}^n$. Če hočemo pokazati, da je dano delovanje tranzitivno, moramo za vsako matriko $V \in V_k(\mathbb{R}^n)$ najti neko rotacijsko matriko $Q \in \mathrm{SO}(n)$, da bo veljalo $Q\,\mathrm{I}_{n,k} = V$. Za $V = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ definirajmo matriko

$$Q = [v_1, v_2, \ldots, v_k, w_{k+1},\, \ldots, w_n],$$

kjer smo vektorje $w_{k+1}, w_{k+2}, \ldots, w_n$ izbrali tako, da je $Q \in \mathrm{SO}(n)$. V bistvu smo ortonormirano množico $\{v_1, v_1, \ldots, v_k\}$ dopolnili do pozitivno orientirane baze prostora $\mathbb{R}^n$. To seveda lahko naredimo na veliko načinov, v vsakem primeru pa velja

$$Q\,\mathrm{I}_{n,k} = V,$$

kar pomeni, da je delovanje tranzitivno. Množico različnih načinov lahko parametriziramo z grupo izotropije. Grupa izotropije $\mathrm{SO}(n)_{\mathrm{I}_{n,k}}$ sestoji iz vseh matrik $Q \in \mathrm{SO}(n)$, za katere je $Q\,\mathrm{I}_{n,k} = \mathrm{I}_{n,k}$. Vsaka takšna matrika je bločno diagonalna in ima obliko

$$Q = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & Q' \end{bmatrix},$$

kjer je $Q' \in \mathrm{SO}(n-k)$. Od tod sledi, da je grupa izotropije $\mathrm{SO}(n)_{\mathrm{I}_{n,k}}$ enaka zaprti podgrupi

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \,\middle|\, Q \in \mathrm{SO}(n-k) \right\} \subset \mathrm{SO}(n)$$

in je izomorfna grupi $\mathrm{SO}(n-k)$. Stiefelovo mnogoterost $V_k(\mathbb{R}^n)$ lahko torej realiziramo kot kvocient

$$V_k(\mathbb{R}^n) \cong \frac{\mathrm{SO}(n)}{\mathrm{SO}(n-k)}.$$

Izomorfizem je induciran s projekcijo $p : \mathrm{SO}(n) \to V_k(\mathbb{R}^n)$ na prvih k stolpcev. □

(10) Pokaži, da je grupa $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ univerzalni krov Lorentzove grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$.

Rešitev: Spomnimo se, da je Lorentzova grupa $\mathrm{O}(1,3)$ definirana s predpisom

$$\mathrm{O}(1,3) = \{A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}) \mid A^T\,\mathrm{I}_{1,3}\,A = \mathrm{I}_{1,3}\},$$

kjer je

$$\mathrm{I}_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Če elemente prostora $\mathbb{R}^4$ označimo z $\vec{r} = (t, x, y, z)$ in pišemo $\vec{r}' = A\vec{r}$, velja

$$A \in \mathrm{O}(1,3) \Longleftrightarrow (t')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

V grupi $\mathrm{O}(1,3)$ so torej natanko tiste matrike, ki ohranjajo Lorentzovo metriko. Z $\mathrm{SO}^+(1,3)$ označimo komponento enote grupe $\mathrm{O}(1,3)$.

Grupa $\mathrm{SO}^+(1,3)$ je 6-dimenzionalna Liejeva grupa. Grupa rotacij prostorskega dela $\mathbb{R}^4$ je njena 3-dimenzionalna podgrupa, preostale 3 dimenzije pa lahko parametriziramo s hiperboličnimi rotacijami oziroma 'boosti'.

Najlepše lahko ta razcep opišemo na nivoju Liejeve algebre Lorentzove grupe. V njej so matrike

$$\mathfrak{so}^+(1,3) = \{A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}) \,|\, A^T\, \mathrm{I}_{1,3} + \mathrm{I}_{1,3}\, A = 0\}.$$

Lorentzovo Liejevo algebro $\mathfrak{so}^+(1,3)$ lahko zapišemo kot direktno vsoto dveh vektorskih podprostorov $\mathfrak{so}^+(1,3) = W \oplus H$ na naslednji način. Matrike

$$W_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tvorijo bazo Liejeve podalgebre W Lorentzove Liejeve algebre, ki se integrira v podgrupo rotacij prostorskega dela $\mathbb{R}^4$. Vektorski podprostor H pa ima po drugi strani bazo

$$H_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enoparametrične podgrupe Lorentzove grupe, ki pripadajo elementom H, ustrezajo parom koordinatnih sistemov, ki se medsebojno premikajo z neko konstantno hitrostjo. Vektorski prostor H ni Liejeva podalgebra Lorentzove algebre, kar pomeni, da hiperbolične rotacije ne tvorijo Liejeve podgrupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$, ampak samo neko podmnožico.

S pomočjo tega razcepa Lorentzove algebre bi lahko definirali izomorfizem Liejevih algeber

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}^+(1,3),$$

ki Liejevo podalgebro $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ antihermitskih matrik preslika na $W \subset \mathfrak{so}^+(1,3)$, podprostor $i\,\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ hermitskih matrik s sledjo 0 pa na $H \subset \mathfrak{so}^+(1,3)$. Ker je Liejeva grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ enostavno povezana, Lorentzova grupa $\mathrm{SO}^+(1,3)$ pa ne, od tod avtomatično sledi da je $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ univerzalni krov grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$.

V nadaljevanju si bomo pogledali eksplicitno konstrukcijo te krovne projekcije. Najprej bomo prostor $\mathbb{R}^4$ identificirali s prostorom $\mathrm{Herm}(2\times 2,\mathbb{C})$ hermitskih matrik velikosti 2×2. Za bazo tega prostora lahko vzamemo matrike

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matrike $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ so ravno Paulijeve spinske matrike. Glede na to bazo lahko definiramo izomorfizem

$$\vec{r} = (t, x, y, z) \longleftrightarrow H = \begin{bmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{bmatrix}.$$

Ker velja

$$\|\vec{r}\| = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \det(H),$$

imamo naslednjo korespondenco

$$\{\text{reprezentacije Liejeve grupe } G \text{ na } \mathbb{R}^4\text{, ki ohranjajo Lorentzovo normo}\}$$

$$\updownarrow$$

$$\{\text{Reprezentacije Liejeve grupe } G \text{ na } \mathrm{Herm}(2\times 2, \mathbb{C})\text{, ki ohranjajo determinanto}\}.$$

Naš cilj bo poiskati reprezentacijo grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ na prostoru $\mathrm{Herm}(2 \times 2, \mathbb{C})$, ki ohranja determinanto. V ta namen definirajmo preslikavo $\rho : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(\mathrm{Herm}(2 \times 2, \mathbb{C}))$ s predpisom

$$\rho(A)(H) = AHA^*,$$

kjer je $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ in $H \in \mathrm{Herm}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Zaradi enostavnosti se dogovorimo, da bomo pisali

$$\rho(A)(H) = A \cdot H.$$

Ker je $(AHA^*)^* = AHA^*$, je res $A \cdot H \in \mathrm{Herm}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Nadalje iz enakosti

$$A \cdot (B \cdot H) = A \cdot (BHB^*) = ABHB^*A^* = (AB)H(AB)^* = (AB) \cdot H$$

sledi, da je $\rho(A)\rho(B) = \rho(AB)$, kar pomeni, da je ρ reprezentacija. Iz multiplikativnosti determinante avtomatično sledi, da ρ ohranja determinanto.

Izračunajmo sedaj jedro reprezentacije ρ. Denimo, da je matrika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

v jedru ρ. Potem za vsak $H \in \mathrm{Herm}(2 \times 2, \mathbb{C})$ velja $A \cdot H = H$. Primerne izbire matrik H nam bodo dale pogoje na koeficiente matrike A.

Če vzamemo $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dobimo pogoj

$$AHA^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 & a\overline{c} \\ \overline{a}c & |c|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ki pove, da je $|a| = 1$ in $c = 0$. Podobno dobimo pri izbiri $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pogoj

$$AHA^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |b|^2 & b\overline{d} \\ \overline{b}d & |d|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ki pove, da je $|d| = 1$ in $b = 0$. Za izračun povezave med a in d pa si poglejmo še matriko $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ in upoštevajmo, da je $b = c = 0$. Sledi

$$AHA^* = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a\overline{d} \\ \overline{a}d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

kar pomeni, da je $a\overline{d} = 1$. Ker je $\det(A) = 1$, je poleg tega še $ad = 1$, vsi pogoji skupaj pa povedo, da je $a = d = \pm 1$. V jedru sta torej samo matriki $A = \pm\,\mathrm{I}$.

Imamo torej reprezentacijo $\rho : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}^+(1,3)$ z diskretnim jedrom, katere slika je povezana Liejeva podgrupa Lorentzove grupe. Ker je $\mathrm{SO}^+(1,3)$ povezana grupa in imata obe grupi isto dimenzijo, je ρ surjektivna preslikava, kar pa pomeni, da je krovna projekcija. Polarni razcep nam grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ predstavi v obliki produkta

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \approx \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SH}_+$$

Liejeve podgrupe $\mathrm{SU}(2)$ specialnih unitarnih matrik in podmnožice SH_+ pozitivno definitnih matrik z determinanto 1. Preslikava ρ podgrupo $\mathrm{SU}(2)$ preslika na podgrupo rotacij Lorenztove grupe in ustreza znani krovni projekciji $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$. Podmnožica SH_+ pa se preslika na množico hiperboličnih rotacij. Iz tega razcepa med drugim sledi tudi, da je grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ enostavno povezana in je torej univerzalni krov grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$. $\square$