Dodatne vaje iz Liejevih grup

Liejeve grupe

(1) Na prostoru $\mathbb{R}^{2n}$ imamo evklidsko, simplektično in kompleksno strukturo. Grupi $\mathrm{O}(2n)$ in $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ sta naravno vloženi v grupo $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$, medtem ko lahko grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ v $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ vložimo s predpisom

$$\phi(A+iB) = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix},$$

kjer sta $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ taki, da je $A+iB \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Pokaži, da velja

$$\mathrm{U}(n) = \mathrm{SO}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(2n) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}).$$

To pomeni, da so unitarne matrike natanko tiste matrike, ki na $\mathbb{R}^{2n}$ hkrati ohranjajo evklidsko, simplektično in kompleksno strukturo.

(2) Poišči center Lorentzove grupe

$$\mathrm{O}(p,q) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \mid A^T\, \mathrm{I}_{p,q}\, A = \mathrm{I}_{p,q}\},$$

kjer je $I_{p,q} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ matrika, ki jo lahko zapišemo v bločni obliki

$$\mathrm{I}_{p,q} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_q \end{bmatrix}.$$

(3) Na prostoru $\mathbb{R}^3$ definirajmo operacijo

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)).$$

Liejevi grupi, ki jo tako dobimo, rečemo Heisenbergova grupa.

(a) Poišči center Heisenbergove grupe.

(b) Poišči zvesto matrično reprezentacijo Heisenbergove grupe.

(c) Dokaži, da je v primeru Heisenbergove grupe eksponentna preslikava difeomorfizem (bolj splošno je eksponentna preslikava difeomorfizem pri vsaki enostavno povezani nilpotentni Liejevi grupi).

(4) Poišči vse homomorfizme iz grupe $\mathbb{R}$ v grupe $\mathbb{R}^2$, T^2, $\mathrm{SO}(3)$ in S^3.

(5) Naj bo $U \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ Liejeva grupa zgornje trikotnih matrik s pozitivnimi lastnimi vrednostmi in $P \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ množica pozitivno definitnih simetričnih matrik. Pokaži, da matrično množenje porodi difeomorfizma:

$$\mathrm{O}(n) \times U \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),$$
$$\mathrm{O}(n) \times P \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}).$$

(6) Klasificiraj vse povezane komutativne Liejeve grupe dimenzije n.

(7) Naj bo $L = \mathrm{Lin}\{X, Y\}$ dvodimenzionalna Liejeva algebra z edino netrivialno komutacijsko relacijo $[X, Y] = Y$.

(a) Pokaži, da je vsaka dvodimenzionalna Liejeva algebra bodisi komutativna bodisi izomorfna Liejevi algebri L.

(b) Klasificiraj vse povezane dvodimenzionalne Liejeve grupe.

(8) Naj bo $H = \mathbb{R}^3$ Heisenbergova grupa z operacijo

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1))$$

in $\Gamma = \{(0, 0, k) \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ diskretna podgrupa edinka Heisenbergove grupe. Pokazali bomo, da je H/Γ Liejeva grupa, ki ni matrična Liejeva grupa.

(a) Označimo z X, Y in Z levo invariantna vektorska polja na H, za katere velja $X_e = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y_e = \frac{\partial}{\partial y}$ in $Z_e = \frac{\partial}{\partial z}$, kjer je $e = (0, 0, 0)$. Pokaži, da velja:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= Z, \\ [X, Z] &= 0, \\ [Y, Z] &= 0. \end{aligned}$$

(b) Naj bo $\Phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ poljubna reprezentacija Heisenbergove Liejeve algebre. Pokaži, da je potem $\Phi(Z)$ nilpotentna matrika.

(c) Naj bo $L = \mathrm{Lin}\{Z\}$ enodimenzionalna centralna Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$. Pokaži, da je

$$\exp(tZ) = (0, 0, t).$$

(d) Naj bo $N \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ nilpotentna matrika. Pokaži, da je $e^N = \mathrm{I}$ natanko takrat, ko je $N = 0$.

(e) Pokaži, da H/Γ ni matrična Liejeva grupa.

(9) Grassmannova mnogoterost $G_k(\mathbb{R}^n)$ kot množica sestoji iz k-dimenzionalnih vektorskih podprostorov v $\mathbb{R}^n$. Pokaži, da je $G_k(\mathbb{R}^n)$ homogen $\mathrm{O}(n)$-prostor in na ta način definiraj gladko strukturo na $G_k(\mathbb{R}^n)$.

(10) Poišči univerzalni krov $\widetilde{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})}$ Liejeve grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ in ekspliciten predpis $\omega : \widetilde{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.