# Liejeve grupe

## Reprezentacije Liejevih grup

V tem poglavju bomo študirali reprezentacije Liejevih grup in Liejevih algeber. Naj bo $G$ Liejeva grupa in $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra.

- Kompleksna oziroma realna reprezentacija Liejeve grupe $G$ je homomorfizem Liejevih grup $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, kjer je $V$ kompleksen oziroma realen vektorski prostor.
- Kompleksna oziroma realna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je homomorfizem realnih Liejevih algeber $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, kjer je $V$ kompleksen oziroma realen vektorski prostor.

Študirali bomo predvsem kompleksne končno dimenzionalne reprezentacije Liejevih grup in Liejevih algeber. Ker je obseg $\mathbb{C}$ algebraično zaprt, je po eni strani klasifikacija nerazcepnih kompleksnih reprezentacij dane Liejeve grupe lažja kot pa v realnem primeru. Po drugi strani pa lahko iz klasifikacije kompleksnih reprezentacij z nekaj dela izpeljemo klasifikacijo realnih reprezentacij.

Klasifikacija nerazcepnih kompleksnih reprezentacij $G$ je tesno povezana s kompleksifikacijo $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, ki jo bomo podrobneje opisali kasneje. Na tem mestu omenimo samo, da je $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ kompleksna Liejeva algebra in da homomorfizmom $\rho : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{gl}(V)$ kompleksnih Liejevih algeber, kjer je $V$ kompleksen vektorski prostor, rečemo kompleksno linearne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Če je grupa $G$ enostavno povezana, imamo korespondenco:

$$\{\text{kompleksne reprezentacije Liejeve grupe } G\}$$
$$\updownarrow$$
$$\{\text{kompleksne reprezentacije Liejeve algebre } \mathfrak{g}\}$$
$$\updownarrow$$
$$\{\text{kompleksno linearne reprezentacije Liejeve algebre } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\}.$$

Če grupa $G$ ni enostavno povezana, jo lahko zapišemo v obliki $G = \tilde{G}/\Gamma$, kjer je $\tilde{G}$ univerzalni krov $G$ in $\Gamma \subset \tilde{G}$ diskretna podgrupa edinka. Reprezentacije grupe $G$ potem ustrezajo tistim reprezentacijam grupe $\tilde{G}$, ki imajo podgrupo $\Gamma$ vsebovano v jedru reprezentacije. Izomorfnostni razredi reprezentacij $G$ torej tvorijo podmnožico izomorfnostnih razredov reprezentacij $\tilde{G}$.

(1) Za bazo kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ vzemimo matrike

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Na vektorskem prostoru $V_n = \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ definirajmo linearne preslikave $E$, $F$ in $H$ s predpisi:

$$\begin{aligned} Ev_k &= (n + 1 - k)v_{k-1}, \text{ za } 1 \le k \le n, \; Ev_0 = 0, \\ Fv_k &= (k + 1)v_{k+1}, \text{ za } 0 \le k \le n - 1, \; Fv_n = 0, \\ Hv_k &= (n - 2k)v_k, \text{ za } 0 \le k \le n. \end{aligned}$$

Pokaži, da na ta način $V_n$ postane nerazcepna kompleksno linearna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

(b) Pokaži, da je vsaka nerazcepna kompleksno linearna reprezentacija $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ izomorfna eni izmed $V_n$.

*Rešitev:* (a) Matrike $E$, $F$ in $H$ tvorijo bazo kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, zadoščajo pa komutacijskim relacijam:

$$\begin{aligned}
[E,F] &= H,\\
[H,E] &= 2E,\\
[H,F] &= -2F.
\end{aligned}$$

Dani pogoji:

$$\begin{aligned}
Ev_k &= (n+1-k)v_{k-1}, \text{ za } 1 \le k \le n,\ Ev_0 = 0,\\
Fv_k &= (k+1)v_{k+1}, \text{ za } 0 \le k \le n-1,\ Fv_n = 0,\\
Hv_k &= (n-2k)v_k, \text{ za } 0 \le k \le n
\end{aligned}$$

enolično definirajo neko kompleksno linearno preslikavo $\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V_n)$, radi pa bi pokazali, da na ta način v bistvu dobimo homomorfizem Liejevih algeber. Če bi bili natančni, bi morali povsod pisati $\rho(E)$, $\rho(F)$ in $\rho(H)$, a bomo zaradi enostavnosti raje uporabljali isto oznako za elemente Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ in pa njihove slike v dani reprezentaciji. Zavedati pa se moramo, da imamo opravka z dvema različnima vlogama elementov $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Da je $\rho$ reprezentacija, sledi iz računov:

$$\begin{aligned}
(EF-FE)v_k &= E(k+1)v_{k+1} - F(n+1-k)v_{k-1} = (k+1)(n-k)v_k - (n+1-k)kv_k,\\
&= (n-2k)v_k = Hv_k,\\
(HE-EH)v_k &= H(n+1-k)v_{k-1} - E(n-2k)v_k,\\
&= (n+1-k)(n-2k+2)v_{k-1} - (n-2k)(n+1-k)v_{k-1},\\
&= 2(n+1-k)v_{k-1} = 2Ev_k,\\
(HF-FH)v_k &= H(k+1)v_{k+1} - F(n-2k)v_k = (k+1)(n-2k-2)v_{k+1} - (n-2k)(k+1)v_{k+1},\\
&= -2(k+1)v_{k+1} = -2Fv_k,
\end{aligned}$$

ki veljajo za $1 \le k \le n-1$. Za $v_0$ in $v_n$ pa lahko preverimo posebej.

Dokažimo sedaj še, da je reprezentacija $V_n$ nerazcepna. Denimo, da je $W \subset V_n$ netrivialen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-invarianten podprostor in naj bo

$$v = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \in W.$$

Pri tem smo predpostavili, da je $\lambda_k \neq 0$ zadnji neničelni koeficient v razvoju vektorja $v$ po bazi $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ prostora $V_n$. Zaradi $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-invariantnosti je potem

$$E^k v = \lambda_k E^k v_k = \alpha v_0 \in W,$$

kar pa pomeni, da je $v_0 \in W$. Ker je $v_k || F^k v_0$, je torej $W = V_n$.

(b) Denimo sedaj, da je $V$ nerazcepna kompleksno linearna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ dimenzije $\dim(V) = n+1$. Pokazali bomo, da je potem $V \cong V_{n+1}$.

Preslikava $H : V \to V$ je kompleksno linearna, zato obstaja lastni vektor $w \in V$ za $H$, tako da velja

$$Hw = \lambda w$$

za nek $\lambda \in \mathbb{C}$. Iz komutacijskih relacij med $E$, $F$ in $H$ potem sledi $HE = EH + 2E$ in $HF = FH - 2F$, kar nam da:

$$\begin{aligned} H(Ew) &= (EH + 2E)w = EHw + 2Ew = \lambda Ew + 2Ew = (\lambda + 2)Ew, \\ H(Fw) &= (FH - 2F)w = FHw - 2Fw = \lambda Fw - 2Fw = (\lambda - 2)Fw. \end{aligned}$$

Vidimo, da je torej $Ew$ lastni vektor $H$ pri lastni vrednosti $\lambda + 2$, $Fw$ pa lastni vektor $H$ pri lastni vrednosti $\lambda - 2$. Induktivno lahko na podoben način pokažemo, da je $E^k w$ lastni vektor pri lastni vrednosti $\lambda + 2k$, $F^k w$ pa lastni vektor pri lastni vrednosti $\lambda - 2k$. Ker so vse te lastne vrednosti različne, so tudi lastni vektorji linearno neodvisni, v kolikor so neničelni. Naj bo $W$ linearni podprostor, ki je napet na neničelne lastne vektorje $H$, ki jih dobimo po zgornjem postopku

$$W = \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}\{F^l w, F^{l-1} w, \ldots, Fw, w, Ew, \ldots, E^{k-1} w, E^k w\}.$$

To pomeni, da so vsi vektorji v tej verigi neničelni, hkrati pa velja $F^{l+1} w = E^{k+1} w = 0$. Iz konstrukcije je potem jasno, da smo konstruirali $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-invarianten podprostor $W \subset V$, zaradi nerazcepnosti $V$ pa od tod dodatno sledi še, da je $W = V$.

Definirajmo sedaj $v_0 = E^k w \in V$. Vektor $v_0$ je potem lastni vektor $H$ za neko lastno vrednost, ki jo zaenkrat imenujmo $\mu$. Velja torej $Hv_0 = \mu v_0$. Če definiramo še

$$v_k = \frac{1}{k!} F^k v_0,$$

dobimo bazo $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ prostora $V$, ki sestoji iz lastnih vektorjev preslikave $H$. Ti vektorji se do skalarnih večkratnikov natančno ujemajo z bazo prostora $W$, ki smo jo konstruirali zgoraj. Iz definicije in zgornjega razmisleka takoj sledi, da velja:

$$\begin{aligned} Hv_k &= (\mu - 2k)v_k, \\ Fv_k &= (k + 1)v_{k+1}. \end{aligned}$$

Nadalje velja tudi $Ev_0 = 0$ in:

$$\begin{aligned} Ev_1 &= EFv_0 = (H + FE)v_0 = \mu v_0, \\ Ev_2 &= \frac{1}{2} EFv_1 = \frac{1}{2}(H + FE)v_1 = \frac{1}{2}(\mu - 2 + \mu)v_1 = (\mu - 1)v_1. \end{aligned}$$

Induktivno lahko sedaj pokažemo, da je

$$Ev_k = (\mu + 1 - k)v_{k-1}$$

za $1 \leq k \leq n$. V posebnem je torej $Ev_n = (\mu + 1 - n)v_{n-1}$. Pokazali bi radi še, da je $\mu = n$. V ta namen si poglejmo enakosti

$$Hv_n = (EF - FE)v_n = -F(\mu + 1 - n)v_{n-1} = -n(\mu + 1 - n)v_n.$$

Ker je po drugi strani $Hv_n = (\mu - 2n)v_n$, od tod sledi:

$$\begin{aligned} \mu - 2n &= -n(\mu + 1 - n), \\ \mu - 2n &= n^2 - n\mu - n, \\ \mu(n + 1) &= n(n + 1), \\ \mu &= n. \end{aligned}$$

Torej je

$$Ev_k = (n+1-k)v_{k-1},$$

kar pa pomeni, da smo konstruirali ekspliciten izomorfizem $V \cong V_n$.

Za konec si poglejmo nekaj konkretnih primerov reprezentacij iz te naloge. Reprezentaciji $V_n$ rečemo spin-$\frac{n}{2}$ reprezentacija. To ime je dobila po svoji aplikaciji v kvantni mehaniki, kjer preslikave $E$, $F$ in $H$ interpretiramo na naslednji način:

$$\begin{aligned}
S_z &= \tfrac{\hbar}{2}H && \text{operator spina v } z\text{-smeri,}\\
S_+ &= \hbar E && \text{kreacijski operator,}\\
S_- &= \hbar F && \text{anihilacijski operator.}
\end{aligned}$$

Vektorji $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ so potem lastni vektorji operatorja spina in ustrezajo stanjem, v katerih ima spin točno določeno vrednost. Glede na to bazo ustrezajo v reprezentaciji $V_n$ elementom $E$, $F$ in $H$ Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ matrike

$$E = \begin{bmatrix} 0 & n & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & 2 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & n & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -n+2 & \\ & & & & -n \end{bmatrix}.$$

V primeru $n = 0$ imamo opravka s trivialno reprezentacijo, za katero je

$$E = F = H = [0].$$

V primeru $n = 1$ ustrezajo elementom $E$, $F$ in $H$ matrike

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

kar pomeni, da je reprezentacija $V_1$ izomorfna standardni reprezentaciji $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ na $\mathbb{C}^2$.

V primeru $n = 2$ dobimo matrike

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Reprezentacija $V_2$ je izomorfna adjungirani reprezentaciji $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Ekspliciten izomorfizem je podan s predpisom, ki bazo $\{v_0, v_1, v_2\}$ prostora $V_2$ preslika v bazo $\{E, -H, -F\}$ Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. $\square$

(2) Na prostoru $\mathcal{V}_n = \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}\{z_1^n, z_1^{n-1}z_2, \ldots, z_1 z_2^{n-1}, z_2^n\}$ homogenih kompleksnih polinomov stopnje $n$ v dveh spremenljivkah $z_1$ in $z_2$ definirajmo reprezentacijo grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ s predpisom

$$(A \cdot p)(z_1, z_2) = p([z_1, z_2]\, A),$$

kjer je $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Izračunaj odvod te reprezentacije.

*Rešitev:* Če pišemo

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

lahko dano reprezentacijo definiramo s predpisom

$$(A \cdot p)(z_1, z_2) = p(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2)$$

za poljuben $p \in \mathcal{V}_n$. Reprezentacija $\mathcal{V}_0$ je izomorfna trivialni reprezentaciji, reprezentacija $\mathcal{V}_1$ pa standardni reprezentaciji grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ na $\mathbb{C}^2$. To lahko eksplicitno vidimo na naslednji način. Za bazo $\mathcal{V}_1$ izberimo linearna polinoma $\{z_1, z_2\}$. Matrika $A$ potem na teh dveh polinomih deluje kot:

$$\begin{aligned} (A \cdot z_1) &= az_1 + cz_2, \\ (A \cdot z_2) &= bz_1 + dz_2. \end{aligned}$$

Vidimo torej, da se matrika, ki ustreza $A$ pri reprezentaciji $\mathcal{V}_1$ v bazi $\{z_1, z_2\}$ kar ujema z matriko $A$. Na podoben način bi lahko zapisali matrike, ki ustrezajo $A$ pri reprezentaciji $\mathcal{V}_n$ glede na dano bazo. Dobili bi matrike velikosti $(n+1) \times (n+1)$, katere koeficienti so polinomi stopnje $n$ v spremenljivkah $a$, $b$, $c$ in $d$.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je odvod reprezentacije $\mathcal{V}_n$ izomorfen reprezentaciji $V_n$, ki smo jo spoznali v prejšnji nalogi. Če imamo dano reprezentacijo Liejeve grupe $G$ na vektorskem prostoru $V$, je njen odvod reprezentacija $\mathfrak{g}$ na $V$, ki je definirana s predpisom

$$Xv = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX} v$$

za $X \in \mathfrak{g}$ in $v \in V$.

V našem primeru nas zanima, kako na polinomih delujejo elementi $E, F, H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Zanje velja:

$$\begin{aligned} E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &\Longrightarrow e^{tE} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &\Longrightarrow e^{tF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \\ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} &\Longrightarrow e^{tH} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned} (Ep)(z_1, z_2) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (e^{tE} \cdot p)(z_1, z_2) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p(z_1, tz_1 + z_2) = z_1 \tfrac{\partial p}{\partial z_2}, \\ (Fp)(z_1, z_2) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (e^{tF} \cdot p)(z_1, z_2) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p(z_1 + tz_2, z_2) = z_2 \tfrac{\partial p}{\partial z_1}, \\ (Hp)(z_1, z_2) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (e^{tH} \cdot p)(z_1, z_2) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p(e^t z_1, e^{-t} z_2) = z_1 \tfrac{\partial p}{\partial z_1} - z_2 \tfrac{\partial p}{\partial z_2}. \end{aligned}$$

Strnjeno lahko to zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned} E &= z_1 \tfrac{\partial}{\partial z_2}, \\ F &= z_2 \tfrac{\partial}{\partial z_1}, \\ H &= z_1 \tfrac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \tfrac{\partial}{\partial z_2}, \end{aligned}$$

kar pomeni, da delujejo elementi Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ na prostoru polinomov $\mathcal{V}_n$ kot linearni diferencialni operatorji reda ena.

Izomorfizem reprezentacij $\mathcal{V}_n$ in $V_n$:

Definirajmo bazo $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ prostora $\mathcal{V}_n$ s predpisi

$$v_k = \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k$$

za $0 \leq k \leq n$. Potem velja:

$$\begin{aligned}
Ev_k &= \binom{n}{k} z_1^{n-k+1} k z_2^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} z_1^{n-k+1} z_2^{k-1} = (n-k+1)v_{k-1}, \\
Fv_k &= \binom{n}{k} (n-k) z_1^{n-k-1} z_2^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} z_1^{n-k-1} z_2^{k+1} = (k+1)v_{k+1}, \\
Hv_k &= \binom{n}{k} \big((n-k) z_1^{n-k} z_2^k - k z_1^{n-k} z_2^k\big) = (n-2k)v_k,
\end{aligned}$$

kar pa se ujema s predpisi pri reprezentaciji $V_n$. Torej smo našli kompleksne reprezentacije Liejeve grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, ki integrirajo nerazcepne kompleksno linearne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. $\square$

(3) Klasificiraj nerazcepne kompleksne reprezentacije grup $\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{O}(3)$ in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

*Rešitev:* Pri klasifikaciji nerazcepnih kompleksnih reprezentacij dane Liejeve grupe igra pomembno vlogo kompleksifikacija njene Liejeve algebre. Kompleksifikacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, ki je definirana s predpisom

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}.$$

Če je $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ baza $\mathfrak{g}$, lahko isto množico vzamemo tudi za bazo $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, le da pri $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ vzamemo vse kompleksne linearne kombinacije teh elementov namesto realnih. Vsak element $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ lahko enolično zapišemo v obliki $X + iY$, kjer sta $X, Y \in \mathfrak{g}$. Komutator dveh takšnih elementov je potem

$$[X + iY, X' + iY'] = ([X, X'] - [Y, Y']) + i([X, Y'] + [Y, X']).$$

Glede na ta razcep lahko na $\mathfrak{g}$ gledamo kot na realno Liejevo podalgebro $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Pogosto pa je zanimivo vprašanje, kdaj je neka kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ kompleksifikacija neke svoje realne podalgebre $\mathfrak{g}$. To je res natanko takrat, ko imamo razcep $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ v smislu realnih vektorskih prostorov.

Za klasifikacijo nerazcepnih kompleksnih reprezentacij grup $\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{O}(3)$ in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ je pomembna kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Razcepimo jo lahko kot:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) &= \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus i\,\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}), \\
A &= \mathrm{Re}(A) + i\mathrm{Im}(A),
\end{aligned}$$

ali pa tudi kot:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) &= \mathfrak{su}(2) \oplus i\,\mathfrak{su}(2), \\
A &= \frac{A - A^H}{2} + \frac{A + A^H}{2}.
\end{aligned}$$

Vidimo, da je Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ kompleksifikacija dveh svojih podalgeber $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ in $\mathfrak{su}(2)$, ki sta sicer kot realni Liejevi algebri neizomorfni. To pomeni, da sta kategoriji kompleksnih reprezentacij $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ in $\mathfrak{su}(2)$ ekvivalentni. Imamo namreč korespondenco

$$\{\text{kompleksne reprezentacije Liejeve algebre } \mathfrak{g}\}$$
$$\updownarrow$$
$$\{\text{kompleksno linearne reprezentacije Liejeve algebre } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\}.$$

Po eni strani je zožitev vsake kompleksno linearne reprezentacije $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ na $\mathfrak{g}$ kompleksna reprezentacija $\mathfrak{g}$. Če pa imamo kompleksno reprezentacijo $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, pa s predpisom $\rho(X+iY) = \rho(X) + i\rho(Y)$ dobimo kompleksno linearno reprezentacijo $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ na $V$. Pri tej korespondenci ustrezajo nerazcepnim reprezentacijam nerazcepne reprezentacije.

Nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe SU(2):

Liejeva grupa SU(2) je enostavno povezana, zato imamo bijektivno korespondenco med kompleksnimi reprezentacijami Liejeve grupe $SU(2)$ in kompleksnimi reprezentacijami njene Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$. Kompleksne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ pa po drugi strani ustrezajo kompleksno linearnim reprezentacijam kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Od tod sledi, da lahko nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe SU(2) parametriziramo z nenegativnimi celimi števili, eksplicitno pa so to reprezentacije

$$\{\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots\}$$

na homogenih polinomih stopnje $n$ v dveh kompleksnih spremenljivkah. Poljubno matriko $Q \in \mathrm{SU}(2)$ lahko zapišemo v obliki

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix},$$

kjer sta $a$ in $b$ kompleksni števili, ki zadoščata enakosti $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Matrika $Q$ potem deluje na polinomu $p \in \mathcal{V}_n$ s predpisom

$$(Q \cdot p)(z_1, z_2) = p(az_1 - \bar{b}z_2, bz_1 + \bar{a}z_2).$$

Nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe SO(3):

Liejevo grupo SO(3) lahko zapišemo kot kvocient grupe SU(2) v obliki

$$\mathrm{SO}(3) = \frac{\mathrm{SU}(2)}{\{-\mathrm{I}, I\}}.$$

Nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe SO(3) torej ustrezajo tistim reprezentacijam $\mathcal{V}_n$ grupe SU(2), pri katerih element $-\mathrm{I}$ deluje kot identiteta. Vzemimo torej poljuben polinom $p \in \mathcal{V}_n$ in ga zapišimo v obliki

$$p(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k z_2^{n-k}.$$

Potem velja

$$(-\mathrm{I} \cdot p)(z_1, z_2) = p(-z_1, -z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k (-z_1)^k (-z_2)^{n-k} = (-1)^n p(z_1, z_2).$$

Na prostoru $\mathcal{V}_n$ dobimo nerazcepno reprezentacijo grupe $\mathrm{SO}(3)$ natanko takrat, ko je $n$ sod. Grupa $\mathrm{SO}(3)$ torej nima 'polspinskih' reprezentacij pač pa samo reprezentacije

$$\{\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_4, \ldots\},$$

ki ustrezajo celoštevilskim spinom.

Nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe $\mathrm{O}(3)$:

Grupo $\mathrm{O}(3)$ lahko zapišemo v obliki produkta $\mathrm{O}(3) = \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{Z}_2$, kjer je $\mathbb{Z}_2 = \{-\mathrm{I}, \mathrm{I}\}$. Nerazcepne reprezentacije produkta dveh grup ustrezajo tenzorskim produktom nerazcepnih reprezentacij obeh faktorjev. Za grupo $\mathrm{SO}(3)$ smo ravnokar klasificirali vse nerazcepne reprezentacije, medtem ko ima grupa $\mathbb{Z}_2$ dve nerazcepni enodimenzionalni reprezentaciji na $\mathbb{C}$. Ena izmed njiju je trivialna reprezentacija, druga pa determinantna reprezentacija. Ker imamo naravno identifikacijo

$$\mathcal{V}_n \cong \mathcal{V}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C},$$

lahko vse nerazcepne reprezentacije grupe $\mathrm{O}(3)$ realiziramo na prostorih polinomov $\mathcal{V}_n$ na naslednji način. Označimo z $\rho_n : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{GL}(\mathcal{V}_n)$ nerazcepne reprezentacije grupe $\mathrm{SO}(3)$ in definirajmo homomorfizma grup

$$\rho_n^{\pm} : \mathrm{O}(3) \to \mathrm{GL}(\mathcal{V}_n)$$

s predpisoma:

$$\begin{aligned} \rho_n^{+}(R, \pm\mathrm{I}) &= \rho_n(R), \\ \rho_n^{-}(R, \pm\mathrm{I}) &= \pm\rho_n(R), \end{aligned}$$

kjer je $R \in \mathrm{SO}(3)$. Na ta način dobimo vse nerazcepne reprezentacije grupe $\mathrm{O}(3)$. Če označimo z $\mathcal{V}_n^{\pm}$ vektorski prostor $\mathcal{V}_n$, opremljen z reprezentacijo $\rho_n^{\pm}$, so nerazcepne reprezentacije grupe $\mathrm{O}(3)$

$$\{\mathcal{V}_0^{\pm}, \mathcal{V}_2^{\pm}, \mathcal{V}_4^{\pm}, \ldots\}.$$

Nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$:

Ker je $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ so nerazcepne kompleksne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ravno zožitve reprezentacij $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ na $\mathcal{V}_n$. Ker grupa $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ni enostavno povezana, je nerazcepnih reprezentacij $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ kvečjemu manj. Kot smo videli pri prejšnji nalogi, pa lahko vsako reprezentacijo $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ na $\mathcal{V}_n$ razširimo do reprezentacije grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, kjer matrika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

deluje s predpisom

$$(A \cdot p)(z_1, z_2) = p(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2)$$

za poljuben $p \in \mathcal{V}_n$. Nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ so torej

$$\{\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots\}.$$

Ravno ti prostori pa so po drugi strani tudi vse nerazcepne kompleksne reprezentacije univerzalnega krova $\widetilde{\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})}$ Liejeve grupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Od tod se da izpeljati, da grupa $\widetilde{\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})}$ ni matrična Liejeva grupa. $\square$