

# Dodatne vaje iz Liejevih grup

---

## Reprezentacije Liejevih grup

- (1) Za vsak  $k \in \mathbb{Z}$  definirajmo kompleksno reprezentacijo  $\rho_k : S^1 \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{C})$  grupe  $S^1$  na  $\mathbb{C}$  s predpisom  $\rho_k(e^{it}) = [e^{ikt}]$ .
  - (a) Pokaži, da so kompleksne reprezentacije  $\rho_k$  vse nerazcepne in paroma neizomorfne.
  - (b) Naj bo sedaj  $\rho_k^{\mathbb{R}}$  realna reprezentacija, ki jo definira reprezentacija  $\rho_k$ , če na  $\mathbb{C}$  gledamo kot na realen vektorski prostor. Pokaži, da so reprezentacije  $\rho_k^{\mathbb{R}}$  nerazcepne in da velja  $\rho_n^{\mathbb{R}} \cong \rho_m^{\mathbb{R}}$  natanko takrat, ko je  $n = \pm m$ .
- (2) Na prostoru  $\mathcal{V}_n = \text{Lin}_{\mathbb{C}}\{z_1^n, z_1^{n-1}z_2, \dots, z_1z_2^{n-1}, z_2^n\}$  homogenih kompleksnih polinomov stopnje  $n$  v dveh spremenljivkah  $z_1$  in  $z_2$  definirajmo reprezentacijo  $\rho_n$  grupe  $\text{SU}(2)$  s predpisom

$$(Q \cdot p)(z_1, z_2) = p([z_1, z_2] Q),$$

kjer je  $Q \in \text{SU}(2)$ . Naj bo  $\rho_n^{\mathbb{R}}$  realna reprezentacija, ki pripada  $\rho_n$ .

- (a) Izračunaj karakter reprezentacije  $\rho_n$ .
  - (b) Pokaži, da je  $\rho_1^{\mathbb{R}}$  nerazcepna realna reprezentacija grupe  $\text{SU}(2)$ .
  - (c) Pokaži, da je  $\rho_2^{\mathbb{R}}$  razcepna realna reprezentacija  $\text{SU}(2)$  in jo razcepi na vsoto nerazcepnih.
- (3) Pri tej nalogi študiramo kompleksne reprezentacije Liejeve algebre  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  in Liejeve grupe  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ .
  - (a) Pokaži, da lahko vsako kompleksno reprezentacijo Liejeve algebre  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  razcepimo na direktno vsoto nerazcepnih reprezentacij.
  - (b) Pokaži, da lahko vsako kompleksno reprezentacijo Liejeve algebre  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  dvignemo do reprezentacije Liejeve grupe  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  in od tod sklepaj, da univerzalni krov  $\widetilde{\text{SL}}(n, \mathbb{R})$  grupe  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  ni matrična Liejeva grupa.
  - (c) Pokaži, da je vsaka unitarna reprezentacija grupe  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  trivialna.