Moderna fizika

7. 1. 2014

1.11.KM: Harmonski oscilator

Harmonski oscilator opiše hamiltonka

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{x}^2. \tag{1}$$

Lastna stanja imajo energijo

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \tag{2}$$

kjer je $\omega^2 = k/m$, opiše pa jih valovna funkcija

$$\psi_n = (2^n n!\sqrt{\pi}x_0)^{-1/2}\mathrm{e}^{-x^2/2x_0^2}H_n(\tfrac{x}{x_0}), \tag{3}$$

kjer je $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$, $H_n(\xi)$ pa so Hermitovi polinomi. Zanje velja

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 H_n}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi\frac{\mathrm{d}H_n}{\mathrm{d}\xi} + 2nH_n &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}H_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi} &= 2nH_{n-1}(\xi) \\
\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\mathrm{e}^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi) &= \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{nm}
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
H_0(\xi) &= 1 \\
H_1(\xi) &= 2\xi \\
H_2(\xi) &= 4\xi^2 - 2 \\
H_3(\xi) &= 8\xi^3 - 12\xi \\
H_4(\xi) &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \\
H_5(\xi) &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi.
\end{aligned}$$

Za celotno valovno funkcijo velja še

$$\begin{aligned}
x\psi_n &= \sqrt{\frac{n+1}{2}}x_0\psi_{n+1} + \sqrt{\frac{n}{2}}x_0\psi_{n-1} \\
\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\psi_m\mathrm{d}x &= \delta_{nm}
\end{aligned}$$

1. Stanje elektrona v harmonskem potencialu v nekem trenutku opiše valovna funkcija
$$\psi(x) = A(\psi_0 + 2\psi_1 + \psi_2).$$
   (a) Kolikšna je pričakovana vrednost lege elektrona v tem stanju?
   (b) Zapišite valovno funkcijo elektrona za kasnejše čase!
   (c) Kolikšna je verjetnost, da ob času $t = 2\pi/\omega$ najdemo elektron pri $x > 0$, če je meritev energije dala vrednost $3\hbar\omega/2$?

2. Pričakovana vrednost koordinate:
   (a) Določite $\langle x(t)\rangle$ za splošno nestacionarno stanje $\psi(x, t = 0) = \sum_n c_n\psi_n$ v harmonskem oscilatorju!
   (b) Kolikšna je $\langle x(t)\rangle$ za lastna stanja?
   (c) Določite $\langle x(t)\rangle$ za $\psi = 1/\sqrt{5}(\psi_{1000}+\psi_{1001}+\psi_{1002}+\psi_{1003}+\psi_{1004})$! Ali se amplituda tega nihanja ujema z amplitudo klasičnega nihanja z energijo $\hbar\omega(n + 1/2)$ za $n \approx 1000$?
   (d) Obravnavajte nihajno stanje molekule HCl z ravnovesno razdaljo $R_0 = 0,13$ nm! HCl pri nihajnih prehodih oddaja svetlobo z valovno dolžino λ =3,3 μm. Določite odmike od ravnovesne lege $\langle x(t)\rangle$ za vodik, če je molekula v nihajnem stanju $\psi(x, t = 0) = 1/\sqrt{3}(\psi_0 + \psi_1 + \psi_2)$!

3. V harmonskem oscilatorju z dano ω je delec z maso m ob času $t = 0$ v stanju s skoraj natančno določeno lego $\bar{x}$: $\psi(x, t = 0)$ je konstanten za $x \in [\bar{x} - \Delta x/2, \bar{x} + \Delta x/2]$ in nič drugje; $\Delta x \ll \bar{x}$ (približno δ funkcija. Določite verjetnost, da pri merjenju energije izmerimo vrednost $\hbar\omega/2$!

4. V nekem trenutku opišemo stanje elektrona v harmonskem potencialu z valovnim paketom
$$\psi(x, t = 0) = A\exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2a^2} + \frac{i\bar{p}x}{\hbar}\right). \tag{4}$$
   Določite $|A|$, $\langle x\rangle$, $\varphi(p)$, $(\delta p)^2$, $\delta p\,\delta x$, pričakovano vrednost kinetične energije in verjetnostni tok!