

# NUMERIČNA APROKSIMACIJA IN INTERPOLACIJA

2. pisni izpit

12. februar 2014

1. Naj bo

$$S = \text{Lin} \left\{ \frac{1}{x^2 + 4}, \frac{x}{x^2 + 4} \right\}.$$

Dokažite, da za vsak  $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$  obstaja enoličen element najboljše enakomerne aproksimacije  $f^*$  iz podprostora  $S$  na intervalu  $[-1, 1]$ . Izračunajte  $f^*$  za funkcijo  $f(x) = x^2 - 1$ .

2. Naj bo  $\mathbf{x} = \{0, 1, 4, 6\}$  in  $\mathbb{S}_{1, \mathbf{x}}$  prostor odsekoma linearnih funkcij nad zaporedjem stičnih točk  $\mathbf{x}$ . Skalarni produkt naj bo definiran kot

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i=0}^6 f(i)g(i).$$

Poiščite odsekoma linearno funkcijo  $s \in \mathbb{S}_{1, \mathbf{x}}$ , ki po metodi najmanjših kvadratov najboljše aproksimira funkcijo  $f(x) = (x - 3)^3$ .

3. Funkcijo

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x}$$

interpoliramo na točkah  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , kjer so  $x_i \neq x_j$ ,  $i \neq j$ , paroma različne točke.

(a) Izpeljite splošno formulo za deljeno diferenco.

(b) Naj bodo  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 5$ . Zapišite interpolacijski polinom, ki interpolira funkcijo  $f$  v naštetih točkah.

4. Naj bo  $f(x) = \frac{1}{2+x}$  dana funkcija,  $\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^n$  ekvidistantno zaporedje stičnih točk na intervalu  $[0, 10]$  in  $S : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  zlepek, za katerega velja

$$\begin{aligned} S|_{[x_i, x_{i+1}]} &= P_i \in \mathbb{P}_5, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \\ P_i^{(\ell)}(x_i) &= f^{(\ell)}(x_i), \quad P_i^{(\ell)}(x_{i+1}) = f^{(\ell)}(x_{i+1}), \quad \ell = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Na koliko delov moramo razdeliti interval  $[0, 10]$ , da bo napaka  $\|f - S\|_{\infty, [0, 10]}$  manjša od  $10^{-5}$ .

Veliko uspeha pri reševanju!