NUMERIČNA APROKSIMACIJA IN INTERPOLACIJA

Rešitve 2. pisnega izpita

12. februar 2014

1. Naj bo
$$S = \mathrm{Lin}\left\{\frac{1}{x^2+4}, \frac{x}{x^2+4}\right\}.$$
Dokažite, da za vsak $f \in \mathcal{C}([-1,1])$ obstaja enoličen element najboljše enakomerne aproksimacije f^* iz podprostora S na intervalu $[-1,1]$. Izračunajte f^* za funkcijo $f(x) = x^2 - 1$.

Rešitev:
Dovolj je dokazati, da je $\mathcal{F} = \left\{\frac{1}{x^2+4}, \frac{x}{x^2+4}\right\}$ Čebišev sistem funkcij na intervalu $[-1,1]$. To je res, saj so funkcije zvezne in za $x_0 \neq x_1$ velja
$$V_{\mathcal{F}}(x_0,x_1) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{x_0^2+4} & \frac{x_0}{x_0^2+4} \\ \frac{1}{x_1^2+4} & \frac{x_1}{x_1^2+4} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x_0^2+4)(x_1^2+4)} \det\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{x_1 - x_0}{(x_0^2+4)(x_1^2+4)} \neq 0.$$
Za Čebiševe sisteme funkcij pa vemo, da omogočajo enolične elemente najboljše aproksimacije. Poiščemo jih z Remesovim algoritmom.

Remesov postopek:
1. korak: Izberimo začetno množico $E_0 = \{-1, 0, 1\}$ in naj bo $g(x) = \frac{a}{x^2+4} + \frac{bx}{x^2+4}$. Iščemo g_0^*, ki bo najboljše aproksimiral f na množici E_0. Iz rešitve linearnega sistema
$$\begin{aligned} -\frac{a}{5} + \frac{b}{5} &= m, \\ -1 - \frac{a}{4} &= -m, \\ -\frac{a}{5} - \frac{b}{5} &= m, \end{aligned}$$
ki je enaka
$$a = -\frac{20}{9}, \quad b = 0, \quad m = \frac{4}{9},$$
dobimo, da je
$$g_0^*(x) = -\frac{20}{9}\frac{1}{x^2+4}.$$
Za izračun stacionarnih točk residuala $r_0 = f - g_0^*$ rešimo enačbo
$$r_0'(x) = 2x - \frac{20}{9}\frac{2x}{(x^2+4)^2} = 0,$$
ki ima natanko eno realno rešitev $x = 0$. Ker pa je $0 \in E_0$ in residual v točkah iz E_0 trikrat alternirajoče doseže svojo normo, se postopek ustavi in g_0^* je element najboljše enakomerne aproksimacije za f.

2. Naj bo $\boldsymbol{x} = \{0, 1, 4, 6\}$ in $\mathbb{S}_{1,\boldsymbol{x}}$ prostor odsekoma linearnih funkcij nad zaporedjem stičnih točk $\boldsymbol{x}$. Skalarni produkt naj bo definiran kot

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i=0}^{6} f(i)g(i).$$

Poiščite odsekoma linearno funkcijo $s \in \mathbb{S}_{1,\boldsymbol{x}}$, ki po metodi najmanjših kvadratov najboljše aproksimira funkcijo $f(x) = (x-3)^3$.

Rešitev:
Prostor odsekoma linearnih funkcij s stičnimi točkami $\boldsymbol{x} = \{0, 1, 4, 6\}$ je 4-dimenzionalen. Baza je enaka

$$H_0(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0,1) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \quad H_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ \frac{4-x}{3}, & x \in [1,4) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases},$$

$$H_2(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3}, & x \in [1,4) \\ \frac{6-x}{2}, & x \in [4,6) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \quad H_3(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{2}, & x \in [4,6) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Iščemo odsekoma linearno funkcijo $f^* = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i H_i$, za katero velja

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S_{1,x}} \|f - s\|_2, \quad \|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}.$$

Neznane koeficiente α_i dobimo z rešitvijo Gramovega sistema

$$\begin{pmatrix} \langle H_0, H_0 \rangle & \langle H_0, H_1 \rangle & \langle H_0, H_2 \rangle & \langle H_0, H_3 \rangle \\ \langle H_0, H_1 \rangle & \langle H_1, H_1 \rangle & \langle H_1, H_2 \rangle & \langle H_1, H_3 \rangle \\ \langle H_0, H_2 \rangle & \langle H_1, H_2 \rangle & \langle H_2, H_2 \rangle & \langle H_2, H_3 \rangle \\ \langle H_0, H_3 \rangle & \langle H_1, H_3 \rangle & \langle H_2, H_3 \rangle & \langle H_3, H_3 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, H_0 \rangle \\ \langle f, H_1 \rangle \\ \langle f, H_2 \rangle \\ \langle f, H_3 \rangle \end{pmatrix}.$$

Definiramo vektorje

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{H}_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \boldsymbol{H}_1 = \left(0, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right), \\ &\boldsymbol{H}_2 = \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \boldsymbol{H}_3 = \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1\right), \\ &\boldsymbol{f} = (-27, -8, -1, 0, 1, 8, 27) \end{aligned}$$

in z njihovo pomočjo izračunamo skalarne produkte, ki nastopajo v matričnem sistemu:

$$
\begin{aligned}
&\langle H_0, H_0\rangle = \boldsymbol{H}_0 \cdot \boldsymbol{H}_0 = 1, \quad \langle H_0, H_1\rangle = \boldsymbol{H}_0 \cdot \boldsymbol{H}_1 = 0,\\
&\langle H_0, H_2\rangle = \boldsymbol{H}_0 \cdot \boldsymbol{H}_2 = 0, \quad \langle H_0, H_3\rangle = \boldsymbol{H}_0 \cdot \boldsymbol{H}_3 = 0,\\
&\langle H_1, H_1\rangle = \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_1 = \frac{14}{9}, \quad \langle H_1, H_2\rangle = \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2 = \frac{4}{9},\\
&\langle H_1, H_3\rangle = \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_3 = 0, \quad \langle H_2, H_2\rangle = \boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{H}_2 = \frac{65}{36},\\
&\langle H_2, H_3\rangle = \boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{H}_3 = \frac{1}{4}, \quad \langle H_3, H_3\rangle = \boldsymbol{H}_3 \cdot \boldsymbol{H}_3 = \frac{5}{4},\\
&\langle f, H_0\rangle = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{H}_0 = -27, \quad \langle f, H_1\rangle = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{H}_1 = -\frac{26}{3},\\
&\langle f, H_2\rangle = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{H}_2 = \frac{14}{3}, \quad \langle f, H_3\rangle = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{H}_3 = 31.
\end{aligned}
$$

Rešitev Gramovega sistema se glasi

$$\alpha_0 = -27, \quad \alpha_1 = -\frac{109}{19}, \quad \alpha_2 = \frac{11}{19}, \quad \alpha_3 = \frac{469}{19}$$

in iskana funkcija je enaka

$$\mathcal{L}_1 f(x) = -27 H_0(x) - \frac{109}{19} H_1(x) + \frac{11}{19} H_2(x) + \frac{469}{19} H_3(x).$$

3. Funkcijo

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

interpoliramo na točkah $x_0, x_1, ..., x_n$, kjer so $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, paroma različne točke.

(a) Izpeljite splošno formulo za deljeno diferenco.

(b) Naj bodo $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5$. Zapišite interpolacijski polinom, ki interpolira funkcijo f v naštetih točkah.

Rešitev:

(a) Izračunamo deljene diference

$$[x_0, x_1]f = \frac{\frac{x_1^2}{(1+x_1)} - \frac{x_0^2}{(1+x_0)}}{x_1 - x_0} = \frac{x_0 + x_1 + x_0 x_1}{(1+x_0)(1+x_1)},$$

$$[x_0, x_1, x_2]f = \frac{\frac{x_1+x_2+x_1x_2}{(1+x_1)(1+x_2)} - \frac{x_0+x_1+x_0x_1}{(1+x_0)(1+x_1)}}{x_2 - x_0} = \frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)(1+x_2)},$$

$$[x_0, x_1, x_2, x_3]f = \frac{\frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)} - \frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)(1+x_2)}}{x_3 - x_0} = \frac{-1}{\prod_{i=0}^{3}(1+x_i)}.$$

Od tod sklepamo, da je

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n]f = \frac{(-1)^n}{\prod_{i=0}^{n}(1+x_i)}, \quad n \geq 2.$$

Dokažimo to z indukcijo. Če predpostavimo, da trditev velja za n, dobimo

$$[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}]f = \frac{\frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i)} - \frac{(-1)^n}{\prod_{i=0}^{n}(1+x_i)}}{x_{n+1} - x_0} = \frac{(-1)^{n+1}}{\prod_{i=0}^{n+1}(1+x_i)},$$

kar potrjuje trditev za $n+1$.

(b) Za $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5$ dobimo po zgornji formuli

$$[x_0]f = 0, \quad [x_0, x_1]f = \frac{1}{2}, \quad [x_0, x_1, x_2]f = \frac{1}{8}, \quad [x_0, x_1, x_2, x_3]f = -\frac{1}{48},$$

interpolacijski polinom pa je enak

$$p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x(x-1) - \frac{1}{48}x(x-1)(x-3).$$

4. Naj bo $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ dana funkcija, $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n$ ekvidistantno zaporedje stičnih točk na intervalu $[0, 10]$ in $S : [0, 10] \to \mathbb{R}$ zlepek, za katerega velja

$$\begin{aligned} S\big|_{[x_i,x_{i+1}]} &= P_i \in \mathbb{P}_5, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \\ P_i^{(\ell)}(x_i) &= f^{(\ell)}(x_i), \quad P_i^{(\ell)}(x_{i+1}) = f^{(\ell)}(x_{i+1}), \quad \ell = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Na koliko delov moramo razdeliti interval $[0, 10]$, da bo napaka $\|f - S\|_{\infty,[0,10]}$ manjša od 10^{-5}.

Rešitev: Naj bo $x \in [x_i, x_{i+1}]$ in naj bodo točke ekvidistantne s korakom h. Po formuli za napako interpolacijskega polinoma dobimo

$$\begin{aligned} f(x) - P_i(x) &= \underbrace{(x - x_i)^3(x - x_{i+1})^3}_{\omega(x)} [x_i, x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}, x_{i+1}, x]\, f = \\ &= \omega(x) \frac{1}{6!} f^{(6)}(\xi) \end{aligned}$$

oziroma

$$|f(x) - P_i(x)| \le \|\omega\|_{\infty,[x_i,x_{i+1}]} \frac{1}{6!} \left\|f^{(6)}\right\|_{\infty,[x_i,x_{i+1}]}.$$

Ekstrem ω je dosežen v točki $x = x_i + \frac{h}{2}$ in je enak

$$\|\omega\|_{\infty,[x_i,x_{i+1}]} = \frac{h^6}{2^6}.$$

Dalje je

$$f^{(6)}(x) = \frac{6!}{(2+x)^7}, \quad \left\|f^{(6)}\right\|_{\infty,[0,10]} = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8},$$

od koder sledi

$$\|f - P_i\|_{\infty,[x_i,x_{i+1}]} \le \frac{h^6}{2^6} \frac{1}{6!} \frac{6!}{2^7}.$$

Ker je ta ocena neodvisna od i, velja

$$\|f - P_i\|_{\infty,[0,10]} \le \frac{h^6}{2^{13}}$$

in napaka bo manjša od 10^{-5}, če bo veljalo

$$h < \sqrt[6]{10^{-5} 2^{13}} = 0.65902$$

oziroma, če bo $n > 10/0.65902 = 15.1741$. Interval moramo torej razdeliti na 16 delov.