NUMERIČNA APROKSIMACIJA IN INTERPOLACIJA

1. pisni izpit

22. januar 2014

1. Naj bo $B_n f$ Bernsteinova aproksimacija za funkcijo f na intervalu $[0,1]$,

$$B_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n,i}(x), \quad b_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i \,(1-x)^{n-i}.$$

Zapišite polinom $B_n f$ v bazi $(b_{n+1,i})_{i=0}^{n+1}$: določite koeficiente $(\alpha_i)_{i=0}^{n+1}$, da bo veljalo

$$B_n f(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i \, b_{n+1,i}(x).$$

Namig: Uporabite $1 = x + (1-x)$ na levi strani enačbe in primerjajte koeficiente pri enakih polinomskih členih na obeh straneh enačbe.

2. Skalarni produkt je definiran kot

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)\, g(x) \,\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Izračunajte prve tri ortogonalne polinome. Uporabite tričlensko rekurzivno formulo.

3. Naj bodo $x_0, x_1, \ldots, x_n$ paroma različne točke in naj bo

$$V = V(x_0, x_1, ..., x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Vandermondova matrika. Izrazite njen inverz V^{-1} s pomočjo Lagrangeevih baznih polinomov. Posebej izpišite V^{-1} za primer $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

4. Naj bo $f(x) = \sin(\pi x)$, $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n$ ekvidistantno zaporedje stičnih točk na intervalu $[-1,1]$ in $S : [-1,1] \to \mathbb{R}$ parabolični zlepek, za katerega velja

$$S\big|_{[x_i, x_{i+1}]} = P_i \in \mathbb{P}_2, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$P_i(x_i) = f(x_i), \quad P_i\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right), \quad P_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}).$$

Na koliko delov moramo razdeliti interval $[-1,1]$, da bo napaka $\|f - S\|_{\infty,[-1,1]}$ manjša od 10^{-3}.

Veliko uspeha pri reševanju!