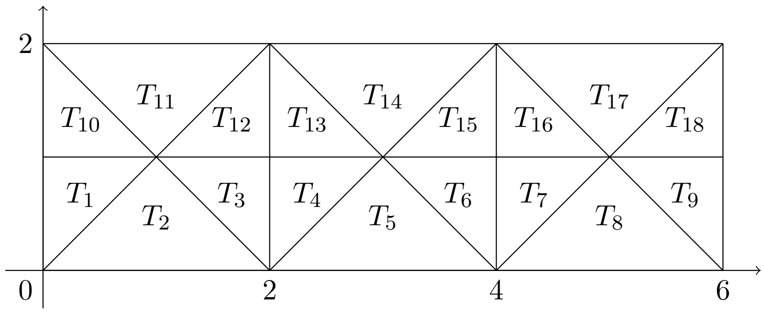
NUMERIČNO REŠEVANJE PARCIALNIH DIFERENCIALNIH ENAČB

1. pisni izpit

30. maj 2014

1. Na območju $\mathcal{D} = K_1 \setminus (K_2 \cup K_3)$, kjer so
$$K_1 = [0,3] \times [0,2], \quad K_2 = [0,1) \times \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad K_3 = (2,3] \times \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$
rešujemo parcialno diferencialno enačbo
$$\Delta u = u_x + u_y, \quad u\big|_{\partial \mathcal{D}} = 1.$$
Za reševanje uporabimo diferenčno metodo, pri čemer odvode aproksimiramo s simetričnimi diferencami. Zapišite matrični sistem enačb za neznane vrednosti v mreži, če sta koraka velikosti $\delta x = \frac{1}{2}$, $\delta y = \frac{1}{4}$.

2. Z metodo končnih elementov rešujemo enačbo $2u_{xx} + 3u_{yy} = f$ z ničelnimi robnimi pogoji na območju $\mathcal{D} = [0,6] \times [0,2]$. Območje trianguliramo, ko je prikazano na sledeči sliki:



Rešitev iščemo v prostoru odsekoma linearnih funkcij nad dano triangulacijo. Zapišite linearen sistem enačb, ki določa aproksimacijsko rešitev ter izračunajte koeficiente pripadajoče matrike. Pomagajte si z baznima funkcijama
$$\varphi_1(x,y) = \begin{cases} x, & (x,y) \in T_1 \cup T_{10} \\ y, & (x,y) \in T_2 \\ 2-x, & (x,y) \in T_3 \cup T_{12} \\ 2-y, & (x,y) \in T_{11} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \quad \varphi_2(x,y) = \begin{cases} -2+x+y, & (x,y) \in T_3 \\ 2-x+y, & (x,y) \in T_4 \\ x-y, & (x,y) \in T_{12} \\ 4-x-y, & (x,y) \in T_{13} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

3. Parabolično parcialno diferencialno enačbo
$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,x) = x^2, \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 1,$$
rešujemo z Douglasovo metodo
$$(1-6\lambda)\left(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}\right) + (10+12\lambda)u_j^{n+1} = (1+6\lambda)\left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right) + (10-12\lambda)u_j^n$$
kjer je $\lambda = \frac{K\delta t}{\delta x^2}$.
   (a) Naj bo $K = 2$. Zapišite matrični sistem enačb, ki določa približke na n–tem časovnem nivoju pri izbiri $\delta x = \frac{1}{10}$, $\delta t = \frac{1}{200}$.
   (b) Analizirajte stabilnost sheme v odvisnosti od Courantovega števila λ pri ničelnih robnih pogojih.

Veliko uspeha pri reševanju!