NUMERIČNO REŠEVANJE PARCIALNIH DIFERENCIALNIH ENAČB

1. domača naloga

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom *ime-priimek-vpisna-1.zip* in jih oddajte preko sistema Moodle (http://ucilnica.fmf.uni-lj.si) najkasneje do konca 5. maja 2014. ZIP datoteka mora vsebovati ustrezno napisano poročilo o rezultatih ter vse programe, s katerimi ste nalogo rešili. Nalogo rešite v Matlabu. Za izpis rezultatov uporabite `format long e`.

Naj bodo c_1, c_2, c_3, c_4 zadnje štiri cifre vaše vpisne številke.

<u>NALOGA:</u>

Naj bo Ω enostavno povezano odprto območje v $\mathbb{R}^2$ in $\Gamma = \partial\Omega$ njegov rob. Predpostavimo, da je Γ gladka sklenjena krivulja, ki je razdeljena na dva dela $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Rešujemo sledeč problem. Opazujemo delec, ki se začne gibati v točki $(x, y) \in \Omega$. Pri tem se giblje z infinitezimalnimi premiki v vsako smer z enako verjetnostjo (poseben primer Brownovega gibanja). Zanima nas verjetnost $p = p(x, y)$, da delec zapusti območje Ω skozi Γ_1. Znano je, da je

$$p(x, y) = u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

kjer je $u : \Omega \to \mathbb{R}$ rešitev Dirichletovega problema

$$\Delta u = 0, \quad u\Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad u\Big|_{\Gamma_1} = 1.$$

Izberite

$$\Omega = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\right\}, \quad R := 2 + \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{c_3 + c_4}{5},$$

ter

$$\Gamma_1 = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0\right\}.$$

Problem rešite z diferenčno metodo, pri čemer pretvorite Laplaceov operator v polarne koordinate (r, φ),

$$\Delta u(r, \varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

in uporabite aproksimacije oblike

$$\frac{1}{r_i \delta r^2}\Big(r_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + r_{i-\frac{1}{2}}(u_{i-1,j} - u_{i,j})\Big) + \frac{1}{r_i^2 \delta\varphi^2}\left(u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j}\right) = 0.$$

Pri tem naj bo

$$\delta r = \frac{R}{50}, \quad \delta\varphi = \frac{2\pi}{40}.$$

Upoštevajte še, da je $u(0, 0) = \frac{1}{4}$.

Linearen sistem, ki določa približek za u, rešite na dva načina:

- Z direktno metodo (lu razcep z delnim pivotiranjem, uporabite lahko kar \ ).
- Z uporabo Gauss–Seidelove iteracije direktno na mreži pri izbrani toleranci 10^{-8}. Za začetni približek izberite $u^{(0)} = \mathbf{0}$.

Izpišite število potrebnih korakov pri Gauss–Seidelovi metodi ter normo razlike obeh izračunanih rešitev. V obeh primerih tudi izpišite povprečno vrednost rešitve u v notranjih točkah mreže.

Narišite, kako se omenjena verjetnost spreminja z lokacijo začetka gibanja delca. Posebej izpišite verjetnosti, ki ustrezajo točkam

$$\left(\frac{R}{2}, 0\right), \quad \left(0, \frac{R}{2}\right), \quad \left(-\frac{R}{2}, 0\right), \quad \left(0, -\frac{R}{2}\right).$$