UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO

Marjeta Krajnc

Numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb

ZBIRKA NALOG Z REŠITVAMI

Ljubljana, 2014

Zbirka nalog z rešitvami, ki je pred vami, je namenjena študentov druge stopnje matematike in finančne matematike za pomoč pri učenju in razumevanju problemov iz numeričnega reševanja parcialnih diferencialnih enačb.

Kazalo

Poglavje 1

Diferenčne aproksimacije

Naloga 1.1. *Preko interpolacijskih polinomov izpeljite formuli za aproksimacijo odvodov oblike*

$$
\begin{aligned}
f'(x_1) &= Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + R_1 f, \\
f''(x_1) &= \alpha f(x_0) + \beta f(x_1) + \gamma f(x_2) + R_2 f,
\end{aligned}
$$

pri čemer so točke x_i ekvidistantne s korakom h,

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2.$$

Kako bi te formule uporabili za aproksimacijo Laplaceovega operatorja $\triangle$ v točki (x_i, y_j)? Določite lokalno napako dobljenih diferenčnih aproksimacij.

Rešitev:
Spomnimo se Lagrangeeve oblike interpolacijskega polinoma, ki se s funkcijo f ujema v treh točkah x_0, x_1, x_2:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\ell_{i,2}(x), \qquad \ell_{i,2}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Upoštevamo, da so točke ekvidistantne, in dobimo

$$p(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2h^2} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{-h^2} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}.$$

Polinom odvajamo

$$p'(x) = \frac{f(x_0)}{2h^2}(x - x_1 + x - x_2) + \frac{f(x_1)}{-h^2}(x - x_0 + x - x_2) + \frac{f(x_2)}{2h^2}(x - x_0 + x - x_1)$$

ter izračunamo njegovo vrednost v točki x_1

$$p'(x_1) = \frac{f(x_0)}{-2h} + \frac{f(x_2)}{2h},$$

od koder sledi

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} + R_1 f.$$

Podobno dobimo iz

$$p''(x) = \frac{f(x_0)}{h^2} - \frac{2f(x_1)}{h^2} + \frac{f(x_2)}{h^2},$$

da je

$$f''(x_1) = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2} + R_2 f.$$

Napaki $R_1 f$ in $R_2 f$ določimo s pomočjo Newtonove formule za napako interpolacijskega polinoma. Spomnimo se

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, x_1, x_2, x]f, \quad \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Formulo odvajamo in dobimo

$$\begin{aligned} f'(x) &= p'(x) + \omega'(x)[x_0, x_1, x_2, x]f + \omega(x)\left([x_0, x_1, x_2, x]f\right)', \\ f''(x) &= p''(x) + \omega''(x)[x_0, x_1, x_2, x]f + 2\omega'(x)\left([x_0, x_1, x_2, x]f\right)' + \omega(x)\left([x_0, x_1, x_2, x]f\right)''. \end{aligned}$$

Za deljene diference velja

$$\frac{d^k}{dx^k}[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = k![x_0, x_1, \ldots, x_n, \underbrace{x, x, \ldots, x}_{k+1}],$$

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in \left(\min_{i=0,\ldots,n} x_i, \max_{i=0,\ldots,n} x_i\right),$$

kar implicira

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= p'(x_1) + \omega'(x_1)[x_0, x_1, x_2, x_1]f + 0, \\ f''(x_1) &= p''(x_1) + \omega''(x_1)[x_0, x_1, x_2, x_1]f + 2\omega'(x_1)[x_0, x_1, x_2, x_1, x_1]f + 0. \end{aligned}$$

Izračunamo

$$\omega'(x_1) = -h^2, \quad \omega''(x_1) = 0,$$

deljene diference pa nadomestimo z odvodi

$$[x_0, x_1, x_2, x_1]f = \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi), \quad [x_0, x_1, x_2, x_1, x_1]f = \frac{1}{24}f^{(4)}(\eta), \quad \xi, \eta \in [x_0, x_2]$$

in dobimo

$$R_1 f = -\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \quad R_2 f = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\eta).$$

Poglejmo si še, kako aproksimirati $\triangle u = u_{xx} + u_{yy}$. Naj bo korak v smeri x enak δx (prej h), v smeri y pa δy. Če uporabimo izpeljane formule za aproksimacijo drugega odvoda, dobimo

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i, y_j) &= \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{\delta x^2} - \frac{1}{12}\delta x^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4}u(\xi_i, y_j), \\ u_{yy}(x_i, y_j) &= \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})}{\delta y^2} - \frac{1}{12}\delta y^2 \frac{\partial^4}{\partial y^4}u(x_i, \eta_j), \end{aligned}$$

kjer sta $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ in $\eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1})$. Napaki imenujemo okrnitveni napaki. Aproksimacija za Laplaceov operator je tako enaka

$$\triangle_\delta u(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{\delta x^2} + \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})}{\delta y^2},$$

okrnitvena napaka pa se prenese v lokalno napako

$$\tau(x_i, y_j) = \triangle u(x_i, y_j) - \triangle_\delta u(x_i, y_j) = \mathcal{O}\left(\delta x^2 + \delta y^2\right). \tag{1.1}$$

O redu lokalne napake se prepričamo tako, da upoštevamo

$$x_{i\pm 1} = x_i \pm \delta x, \quad y_{j\pm 1} = y_j \pm \delta y$$

in razvijemo $\tau(x_i, y_j)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke (x_i, y_j). Iz razvojev

$$\begin{aligned}
&\triangle_\delta\, u(x, y) = \\
&= \frac{u(x - \delta x, y) - 2u(x, y) + u(x + \delta x, y)}{\delta x^2} + \frac{u(x, y - \delta y) - 2u(x, y) + u(x, y + \delta y)}{\delta y^2} = \\
&= \frac{1}{\delta x^2}\Bigg(u(x, y) - \delta x u_x(x, y) + \frac{1}{2}\delta x^2 u_{xx}(x, y) - \frac{1}{6}\delta x^3 u_{xxx}(x, y) + \frac{1}{24}\delta x^4 u_{xxxx}(x, y) + \\
&-2u(x, y) + u(x, y) + \delta x u_x(x, y) + \frac{1}{2}\delta x^2 u_{xx}(x, y) + \frac{1}{6}\delta x^3 u_{xxx}(x, y) + \frac{1}{24}\delta x^4 u_{xxxx}(x, y)\Bigg) + \\
&+ \frac{1}{\delta y^2}\Bigg(u(x, y) - \delta y u_y(x, y) + \frac{1}{2}\delta y^2 u_{yy}(x, y) - \frac{1}{6}\delta y^3 u_{yyy}(x, y) + \frac{1}{24}\delta y^4 u_{yyyy}(x, y) + \\
&-2u(x, y) + u(x, y) + \delta y u_y(x, y) + \frac{1}{2}\delta y^2 u_{yy}(x, y) + \frac{1}{6}\delta y^3 u_{yyy}(x, y) + \frac{1}{24}\delta y^4 u_{yyyy}(x, y)\Bigg) = \\
&= \frac{1}{\delta x^2}\left(\delta x^2 u_{xx}(x, y) + \frac{1}{12}\delta x^4 u_{xxxx}(x, y)\right) + \frac{1}{\delta y^2}\left(\delta y^2 u_{yy}(x, y) + \frac{1}{12}\delta y^4 u_{yyyy}(x, y)\right) = \\
&= u_{xx}(x, y) + \frac{1}{12}\delta x^2 u_{xxxx}(x, y) + u_{yy}(x, y) + \frac{1}{12}\delta y^2 u_{yyyy}(x, y)
\end{aligned}$$

sledi, da je lokalna napaka enaka

$$\tau(x_i, y_j) = -\frac{1}{12}\delta x^2 u_{xxxx}(x_i, y_j) - \frac{1}{12}\delta y^2 u_{yyyy}(x_i, y_j),$$

kar potrjuje (1.1).

Naloga 1.2. *Izpeljite diferenčni aproksimaciji*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i, y_j) = \\
&\quad \frac{u(x_{i-2}, y_j) - 4u(x_{i-1}, y_j) + 6u(x_i, y_j) - 4u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i+2}, y_j)}{\delta x^4} + \mathcal{O}\left(\delta x^2\right), \\
&\frac{\partial^4}{\partial y^4} u(x_i, y_j) = \\
&\quad \frac{u(x_i, y_{j-2}) - 4u(x_i, y_{j-1}) + 6u(x_i, y_j) - 4u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j+2})}{\delta y^4} + \mathcal{O}\left(\delta y^2\right),
\end{aligned}$$

pri čemer so

$$x_{i\pm\ell} = x_i \pm \ell\delta x, \quad y_{y\pm\ell} = y_j \pm \ell\delta y$$

ekvidistantne točke.

Rešitev:
Opazimo, da je dovolj izpeljati simetrično aproksimacijo četrtega odvoda funkcije ene spremenljivke na ekvidistantnih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_4$ s korakom h. Iščemo torej koeficiente A, B, C, D, E, da velja

$$f^{(4)}(x_2) = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df(x_3) + Ef(x_4) + Rf, \tag{1.2}$$

kjer so $x_i = x_0 + ih$. Koeficiente lahko določimo preko interpolacijskih polinomov ali s pomočjo metode nedoločenih koeficientov. Uporabimo slednjo, pri kateri neznane koeficiente izračunamo tako, da zahtevamo, da je formula (1.2) točna za polinome čim višjih stopenj. To pomeni, da mora biti napaka Rf enaka nič. Ker imamo 5 neznank pričakujemo, da bo formula točna vsaj za polinome stopenj ≤ 4, kar bo res, če bo točna za vse bazne polinome stopenj ≤ 4. Za bazo si izberemo

$$1, (x - x_2), (x - x_2)^2, \ldots$$

in dobimo linearen sistem enačb

$$\begin{aligned}
1: &\qquad 0 = A + B + C + D + E, \\
(x - x_2): &\qquad 0 = -2hA - hB + hD + 2hE, \\
(x - x_2)^2: &\qquad 0 = 4h^2A + h^2B + h^2D + 2h^2E, \\
(x - x_2)^3: &\qquad 0 = -8h^3A - h^3B + h^3D + 8h^3E, \\
(x - x_2)^4: &\qquad 4! = 16h^4A + h^4B + h^4D + 16h^4E.
\end{aligned}$$

Enačbe prepišemo v ekvivalentno obliko

$$A + B + C + D + E = 0, \tag{1.3}$$
$$-2A - B + D + 2E = 0, \tag{1.4}$$
$$4A + B + D + 4E = 0, \tag{1.5}$$
$$-8A - B + D + 8E = 0, \tag{1.6}$$
$$16A + B + D + 16E = \frac{24}{h^4}. \tag{1.7}$$

Najprej odštejemo (1.4) - (1.6) in dobimo

$$6A - 6E = 0 \implies A - E = 0 \implies A = E.$$

Sedaj odštejemo (1.7) - (1.5), kar nam da

$$12A + 12E = \frac{24}{h^4} \implies 24A = \frac{24}{h^4} \implies A = \frac{1}{h^4} = E.$$

Seštejmo (1.4) + (1.5):

$$2A + 2D + 6E = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = -4A = -\frac{4}{h^4}.$$

Odštejmo (1.5) - (1.4):

$$6A + 2B + 2E = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = -4A = -\frac{4}{h^4}.$$

Izračunati moramo še C. Dobimo ga iz enačbe (1.3):

$$C = -A - B - D - E = -\frac{1}{h^4} + \frac{4}{h^4} + \frac{4}{h^4} - \frac{1}{h^4} = \frac{6}{h^4}.$$

Sledi, da je

$$f^{(4)}(x_2) = \frac{f(x_0) - 4f(x_1) + 6f(x_2) - 4f(x_3) + f(x_4)}{h^4} + Rf.$$

Določiti moramo še napako. Nastavimo $Rf = Ff^{(m)}(\xi)$, $\xi \in [x_0, x_4]$, za neko še nedoločeno konstanto F. Pogledamo, ali je izpeljana formula točna za polinome stopnje 5. Vzamemo bazni polinom $(x - x_2)^5$ in izračunamo

$$(x - x_2)^5 : \qquad 0 = \frac{-32h^5 + 4h^5 + 0 - 4h^5 + 32h^5}{h^4}.$$

Opazimo, da sta leva in desna stran enaki, kar pomeni, da je aproksimacija točna tudi za polinome stopnje 5. Nadaljujemo z naslednjim baznim polinomom

$$(x - x_2)^6 : \qquad 0 = \frac{64h^6 - 4h^6 - 4h^6 + 64h^6}{h^4} + Rf = 120h^2 + Rf.$$

Opazimo, da tokrat nimamo ujemanja, zato izberemo $Rf = Ff^{(6)}(\xi)$ in izračunamo F:

$$0 = 120h^2 + F(\xi - x_2)^{(6)} = 120h^2 + F6! \quad \Longrightarrow \quad F = -\frac{h^2}{6}.$$

Sledi, da je napaka enaka

$$Rf = -\frac{h^2}{6} f^{(6)}(\xi), \qquad \xi \in [x_0, x_4],$$

in

$$f^{(4)}(x_2) = \frac{f(x_0) - 4f(x_1) + 6f(x_2) - 4f(x_3) + f(x_4)}{h^4} - \frac{h^2}{6} f^{(6)}(\xi).$$

Naloga 1.3. *Preko interpolacijskega polinoma na točkah* (x_i, y_j),

$$x_i = x_0 + i\ \delta x, \quad y_j = y_0 + j\ \delta y, \quad i, j = 0, 1, 2,$$

izpeljite simetrično diferenco za mešan odvod

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} u(x_1, y_1).$$

Določite tudi lokalno napako pripadajoče diskretne aproksimacije $\mathcal{L}_\delta$ *diferencialnega operatorja* $\mathcal{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

Rešitev:
Interpolacijski polinom p, ki zadošča pogojem

$$p(x_i, y_j) = u(x_i, y_j), \quad i, j = 0, 1, 2,$$

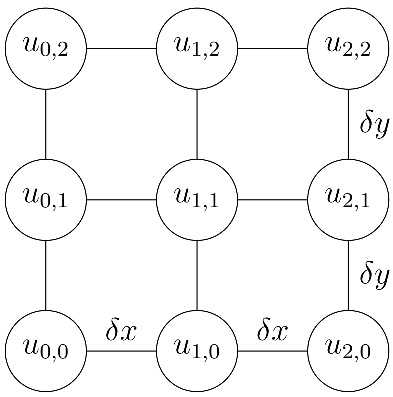
lahko zapišemo v Lagrangeevi obliki

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} u(x_i, y_j) \ell_{i,2,\boldsymbol{x}}(x)\ \ell_{j,2,\boldsymbol{y}}(y),$$

kjer so

$$\begin{aligned}
\ell_{0,2,\boldsymbol{x}}(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2\delta x^2}, & \ell_{0,2,\boldsymbol{y}}(y) &= \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{2\delta y^2}, \\
\ell_{1,2,\boldsymbol{x}}(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{-\delta x^2}, & \ell_{1,2,\boldsymbol{y}}(y) &= \frac{(y - y_0)(y - y_2)}{-\delta y^2}, \\
\ell_{2,2,\boldsymbol{x}}(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2\delta x^2}, & \ell_{2,2,\boldsymbol{y}}(y) &= \frac{(y - y_0)(y - y_1)}{2\delta y^2}
\end{aligned}$$

Lagrangeevi bazni polinomi stopnje 2. Točke, ki jih interpoliramo, lahko predstavimo v mreži, kot je prikazano na sliki 1.1. Aproksimacijo mešanega odvoda dobimo tako, da



Slika 1.1: Vrednosti $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ za $i = 0, 1, 2$ in $j = 0, 1, 2$.

izračunamo mešan odvod interpolacijskega polinoma p v točki (x_1, y_1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} u(x_1, y_1) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} p(x_1, y_1) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} u(x_i, y_j) \ell'_{i,2,\boldsymbol{x}}(x_1)\ \ell'_{j,2,\boldsymbol{y}}(y_1).$$

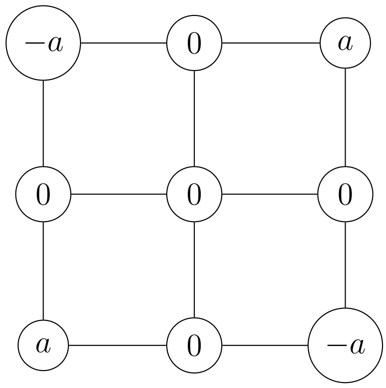
Iz

$$\begin{aligned}
\ell'_{0,2,\boldsymbol{x}}(x_1) &= -\frac{1}{2\delta x}, \quad \ell'_{1,2,\boldsymbol{x}}(x_1) = 0, \quad \ell'_{2,2,\boldsymbol{x}}(x_1) = \frac{1}{2\delta x}, \\
\ell'_{0,2,\boldsymbol{y}}(y_1) &= -\frac{1}{2\delta y}, \quad \ell'_{1,2,\boldsymbol{y}}(y_1) = 0, \quad \ell'_{2,2,\boldsymbol{y}}(y_1) = \frac{1}{2\delta y}
\end{aligned}$$

dobimo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} p(x_1, y_1) = \frac{1}{4\delta x \delta y} \left(u(x_0, y_0) - u(x_2, y_0) - u(x_0, y_2) + u(x_2, y_2) \right).$$

Dobljene uteži lahko predstavimo podobno kot vrednosti $u(x_i, y_j)$ za $i = 0, 1, 2$ in $j = 0, 1, 2$ (glej sliko 1.2).



Slika 1.2: Uteži, ki jih imamo pri $u_{i,j}$ za $i = 0, 1, 2$ in $j = 0, 1, 2$. Posamezna utež pripada vrednosti $u_{i,j}$, ki je na "istem" mestu v sliki 1.1. Pri tem je $a = \frac{1}{4\delta x \delta y}$.

Definirajmo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\delta u(x, y) = \frac{1}{4\delta x \delta y} & \left(u(x - \delta x, y - \delta y) + u(x + \delta x, y + \delta y) + \right. \\ & \left. - u(x - \delta x, y + \delta y) - u(x + \delta x, y - \delta y) \right). \end{aligned}$$

Red lokalne napake

$$\tau(x, y) = \mathcal{L}u(x, y) - \mathcal{L}_\delta u(x, y)$$

določimo s pomočjo razvoja $\tau(x, y)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke (x, y). Poglejmo si razvoj

$$\begin{aligned} & u(x - \delta x, y - \delta y) = \Big(u - \delta x u_x - \delta y u_y + \frac{1}{2} \left(\delta x^2 u_{xx} + 2\delta x \delta y u_{xy} + \delta y^2 u_{yy} \right) + \\ & - \frac{1}{6} \left(\delta x^3 u_{xxx} + 3\delta x^2 \delta y u_{xxy} + 3\delta x \delta y^2 u_{xyy} + \delta y^3 u_{yyy} \right) + \\ & + \frac{1}{24} \left(\delta x^4 u_{xxxx} + 4\delta x^3 \delta y u_{xxxy} + 6\delta x^2 \delta y^2 u_{xxyy} + 4\delta x \delta y^3 u_{xyyy} + \delta y^4 u_{yyyy} \right) + \dots \Big)(x, y). \end{aligned}$$

Za poenostavitev zapisa definirajmo operatorja

$$\xi := \delta x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mu := \delta y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Tedaj je

$$
\begin{aligned}
&u(x-\delta x, y-\delta y) = \Big(1-(\xi+\mu)+\frac{1}{2}\left(\xi^2+2\xi\mu+\mu^2\right)-\frac{1}{6}\left(\xi^3+3\xi^2\mu+3\xi\mu^2+\mu^3\right)+\\
&+\frac{1}{24}\left(\xi^4+4\xi^3\mu+6\xi^2\mu^2+4\xi\mu^3+\mu^4\right)+\dots\Big)u(x,y)=\\
&=\Big(1+(-\xi-\mu)+\frac{1}{2}(-\xi-\mu)^2+\frac{1}{6}(-\xi-\mu)^3+\frac{1}{4!}(-\xi-\mu)^4+\dots\Big)u(x,y)=\\
&=e^{-\xi-\mu}u(x,y).
\end{aligned}
$$

Podobno je

$$
\begin{aligned}
&u(x-\delta x, y+\delta y) =\\
&\left(1+(-\xi+\mu)+\frac{1}{2}(-\xi+\mu)^2+\frac{1}{6}(-\xi+\mu)^3+\frac{1}{4!}(-\xi+\mu)^4+\dots\right)u(x,y)=\\
&=e^{-\xi+\mu}u(x,y),\\
&u(x+\delta x, y-\delta y) =\\
&\left(1+(\xi-\mu)+\frac{1}{2}(\xi-\mu)^2+\frac{1}{6}(\xi-\mu)^3+\frac{1}{4!}(\xi-\mu)^4+\dots\right)u(x,y)=\\
&=e^{\xi-\mu}u(x,y),\\
&u(x+\delta x, y+\delta y) =\\
&\left(1+(\xi+\mu)+\frac{1}{2}(\xi+\mu)^2+\frac{1}{6}(\xi+\mu)^3+\frac{1}{4!}(\xi+\mu)^4+\dots\right)u(x,y)=\\
&=e^{\xi+\mu}u(x,y).
\end{aligned}
$$

Od tod dobimo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\delta u(x,y) &= \frac{1}{4\delta x\delta y}\left((\xi+\mu)^2-(\xi-\mu)^2+\frac{1}{12}(\xi+\mu)^4-\frac{1}{12}(\xi-\mu)^4+\dots\right)u(x,y)=\\
&=\frac{1}{4\delta x\delta y}\left(4\xi\mu+\frac{2}{3}\xi^3\mu+\frac{2}{3}\xi\mu^3+\dots\right)u(x,y)=\\
&=u_{xy}(x,y)+\frac{1}{6}\delta x^2u_{xxxy}(x,y)+\frac{1}{6}\delta y^2u_{xyyy}(x,y)+\mathcal{O}\left((\delta x+\delta y)^4\right).
\end{aligned}
$$

Lokalna napaka je tako enaka

$$
\tau(x,y) = -\frac{1}{6}\delta x^2u_{xxxy}(x,y)-\frac{1}{6}\delta y^2u_{xyyy}(x,y)+\mathcal{O}\left((\delta x+\delta y)^4\right).
$$

Naloga 1.4. *Kako bi aproksimirali*

$$
\mathcal{L}u(x_i,y_j) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}u(x_i,y_j)
$$

z vrednostmi $u(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\beta}),\ \alpha,\beta\in\{0,1,2\}$.

Rešitev:
Aproksimacijo dobimo tako, da namesto parcialnega odvoda funkcije u izračunamo parcialni odvod interpolacijskega polinoma p, za katerega velja

$$p(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\beta}) = u(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\beta}), \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2.$$

Interpolacijski polinom p zapišemo v Lagrangeevi obliki

$$p(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{2} \sum_{\beta=0}^{2} u(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\beta}))\ell_{\alpha,2,\boldsymbol{x}}(x)\ \ell_{\beta,2,\boldsymbol{y}}(y),$$

kjer so

$$\begin{aligned}
\ell_{0,2,\boldsymbol{x}}(x) &= \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2\delta x^2}, & \ell_{0,2,\boldsymbol{y}}(y) &= \frac{(y - y_j)(y - y_{j+1})}{2\delta y^2}, \\
\ell_{1,2,\boldsymbol{x}}(x) &= \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{-\delta x^2}, & \ell_{1,2,\boldsymbol{y}}(y) &= \frac{(y - y_{j-1})(y - y_{j+1})}{-\delta y^2}, \\
\ell_{2,2,\boldsymbol{x}}(x) &= \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2\delta x^2}, & \ell_{2,2,\boldsymbol{y}}(y) &= \frac{(y - y_{j-1})(y - y_j)}{2\delta y^2}
\end{aligned}$$

Lagrangeevi bazni polinomi stopnje 2. Iz

$$\begin{aligned}
\ell''_{0,2,\boldsymbol{x}}(x_i) &= \frac{1}{\delta x^2}, & \ell''_{0,2,\boldsymbol{y}}(y_j) &= \frac{1}{\delta y^2}, \\
\ell''_{1,2,\boldsymbol{x}}(x_i) &= \frac{-2}{\delta x^2}, & \ell''_{1,2,\boldsymbol{y}}(y_j) &= \frac{-2}{\delta y^2}, \\
\ell''_{2,2,\boldsymbol{x}}(x_i) &= \frac{(1}{2\delta x^2}, & \ell''_{2,2,\boldsymbol{y}}(y_j) &= \frac{1}{\delta y^2}
\end{aligned}$$

dobimo aproksimacijsko formulo

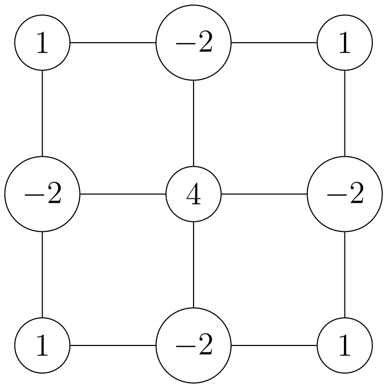
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 p}{\partial x^2 \partial y^2} u(x_i, y_j) = \frac{1}{\delta x^2 \delta y^2} \Big(& u(x_{i-1}, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_{j-1}) + \\
& - 2u(x_{i-1}, y_j) + 4u(x_i, y_j) - 2u(x_{i+1}, y_j) + \\
& + u(x_{i-1}, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_{j+1}) + u(x_{i+1}, y_{j+1}) \Big),
\end{aligned}$$

katere uteži so predstavljene na sliki 1.3.

Naloga 1.5. *Izračunajte lokalno napako diskretnega operatorja $\mathcal{L}_\delta$ izpeljanega v nalogi 1.4.*

Rešitev:
Lokalna napaka je enaka

$$\tau(x, y) = \mathcal{L}u(x, y) - \mathcal{L}_\delta u(x, y).$$



Slika 1.3: Uteži, ki jih dobimo pri aproksimaciji parcialnega odvoda u_{xxyy}.

Vodilni člen lokalne napake dobimo tako, da razvijemo vse izraze, ki nastopajo v τ v Taylorjevo vrsto okrog točke (x, y). Če definiramo

$$\xi := \delta x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mu := \delta y \frac{\partial}{\partial y},$$

potem je

$$\begin{aligned}
L_\delta u(x,y) &= \frac{1}{\delta x^2 \delta y^2} \left(e^{-\xi-\mu} - 2e^{-\mu} + e^{\xi-\mu} - 2e^{-\xi} + 4 - 2e^{\xi} + e^{-\xi+\mu} - 2e^{\mu} + e^{\xi+\mu} \right) u(x,y) = \\
&= \frac{1}{\delta x^2 \delta y^2} \left(\xi^2\mu^2 + \frac{\xi^4\mu^2}{12} + \frac{\xi^2\mu^4}{12} + \dots \right) u(x,y) = \\
&= u_{xxyy}(x,y) + \frac{1}{12}\delta x^2 u_{xxxxyy}(x,y) + \frac{1}{12}\delta y^2 u_{xxyyyy}(x,y) + \mathcal{O}\left((\delta x + \delta y)^4\right).
\end{aligned}$$

Lokalna napaka je tako enaka

$$\tau(x,y) = -\frac{1}{12}\delta x^2 u_{xxxxyy}(x,y) - \frac{1}{12}\delta y^2 u_{xxyyyy}(x,y) + \mathcal{O}\left((\delta x + \delta y)^4\right).$$

Naloga 1.6. *Kako bi aproksimirali biharmonični operator $\triangle^2$?*

Rešitev:
Spomnimo se, da je biharmonični operator enak

$$\triangle^2 u = \triangle \triangle u = \triangle(u_{xx} + u_{yy}) = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}.$$

Aproksimacijo dobimo z uporabo formul izpeljanih v nalogah 1.2 in 1.4:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i, y_j) = \\
&\quad \frac{u(x_{i-2}, y_j) - 4u(x_{i-1}, y_j) + 6u(x_i, y_j) - 4u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i+2}, y_j)}{\delta x^4} + \mathcal{O}\left(\delta x^2\right), \\
&\frac{\partial^4}{\partial y^4} u(x_i, y_j) = \\
&\quad \frac{u(x_i, y_{j-2}) - 4u(x_i, y_{j-1}) + 6u(x_i, y_j) - 4u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j+2})}{\delta y^4} + \mathcal{O}\left(\delta y^2\right), \\
&\frac{\partial^4 p}{\partial x^2 \partial y^2} u(x_i, y_j) = \frac{1}{\delta x^2 \delta y^2}\Big(u(x_{i-1}, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_{j-1}) + \\
&- 2u(x_{i-1}, y_j) + 4u(x_i, y_j) - 2u(x_{i+1}, y_j) + \\
&+ u(x_{i-1}, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_{j+1}) + u(x_{i+1}, y_{j+1})\Big) + \mathcal{O}\left((\delta x + \delta y)^2\right),
\end{aligned}
$$

pri čemer so

$$x_{i\pm\ell} = x_i \pm \ell\delta x, \quad y_{j\pm\ell} = y_j \pm \ell\delta y$$

ekvidistantne točke. Poenostavimo zapis v primeru, da velja $\delta x = \delta y = h$. Tedaj je

$$
\begin{aligned}
\triangle^2 u(x_i, y_j) = \frac{1}{h^4}\Big(& u(x_{i-2}, y_j) - 8u(x_{i-1}, y_j) + 20u(x_i, y_j) - 8u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i+2}, y_j) + \\
&+ u(x_i, y_{j-2}) - 8u(x_i, y_{j-1}) - 8u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j+2}) + \\
&+ 2u(x_{i-1}, y_{j-1}) + 2u(x_{i-1}, y_{j+1}) + 2u(x_{i+1}, y_{j-1}) + 2u(x_{i+1}, y_{j+1})\Big) + \\
&+ \mathcal{O}\left((\delta x + \delta y)^2\right).
\end{aligned}
$$

Izpeljane aproksimacije lahko predstavimo s tabelo oziroma *masko*

$$
\frac{1}{h^4} \cdot \begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}.
$$

Naloga 1.7. *Dan je operator*

$$\mathcal{L}u = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + q(x,y)u$$

pri čemer velja

$$a(x,y) \geq \text{konst} > 0, \quad q(x,y) \geq 0$$

za vse $(x,y) \in \mathcal{D}$*. Izpeljite pettočkovno simetrično aproksimacijo.*

Rešitev:
Spomnimo se enostranskih diferenc za funkcije ene spremenljivke:

$$\text{prema diferenca :} \quad f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h^2),$$
$$\text{obratna diferenca :} \quad f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \mathcal{O}(h^2).$$

Z uporabo preme diference aproksimiramo

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} \approx a(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)\frac{u(x_{i+1},y_j) - u(x_i,y_j)}{\delta x},$$

kjer označimo $a(x_{i\pm\frac{1}{2}}, y_j) = a_{i\pm\frac{1}{2},j}$. Sedaj uporabimo še obratne diference in dobimo

$$\frac{\partial}{\partial}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} \approx$$
$$\frac{1}{\delta x}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} - a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Big|_{\substack{x=x_{i-1}\\ y=y_j}}\right) \approx$$
$$\frac{1}{\delta x}\left(a(x_{i+\frac{1}{2}},y_j)\frac{u(x_{i+1},y_j)-u(x_i,y_j)}{\delta x} - a(x_{i-\frac{1}{2}},y_j)\frac{u(x_i,y_j)-u(x_{i-1},y_j)}{\delta x}\right) =$$
$$= \frac{1}{\delta x^2}\left(a_{i-\frac{1}{2},j}u(x_{i-1},y_j) - \left(a_{i-\frac{1}{2},j} + a_{i+\frac{1}{2},j}\right)u(x_i,y_j) + a_{i+\frac{1}{2},j}u(x_{i+1},y_j)\right).$$

Podobno naredimo za spremenljivko y in dobimo pravilo

$$\mathcal{L}_\delta u(x_i,y_j) =$$
$$-\frac{1}{\delta x^2}\left(a_{i-\frac{1}{2},j}u(x_{i-1},y_j) - \left(a_{i-\frac{1}{2},j} + a_{i+\frac{1}{2},j}\right)u(x_i,y_j) + a_{i+\frac{1}{2},j}u(x_{i+1},y_j)\right) +$$
$$-\frac{1}{\delta y^2}\left(a_{i,j-\frac{1}{2}}u(x_i,y_{j-1}) - \left(a_{i,j-\frac{1}{2}} + a_{i,j+\frac{1}{2}}\right)u(x_i,y_j) + a_{i,j+\frac{1}{2}}u(x_{i+1},y_j)\right) +$$
$$+ q(x_i,y_j)u(x_i,y_j).$$

Naloga 1.8. *Aproksimirajte*

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2},$$

za poljuben $d \geq 2$.

Rešitev:
Aproksimacije za primer $d = 2$ smo izpeljali v nalogi 1.1. Poglejmo si sedaj primer $d = 3$. Spremenljivke označimo z x, y in z, operator pa se poenostavi v

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Mreža točk je v treh dimenzijah. Korak v x-smeri bomo označili z δx, podobno bosta δy in δz označevala koraka v smeri y in v smeri z. Aproksimacija Laplaceovega operatorja je enaka

$$
\begin{aligned}
&\triangle_\delta\, u(x_i, y_j, z_k) = \\
&= \frac{1}{\delta x^2}\left(u\left(x_{i-1}, y_j, z_k\right) + u\left(x_{i+1}, y_j, z_k\right)\right) + \frac{1}{\delta y^2}\left(u\left(x_i, y_{j-1}, z_k\right) + u\left(x_i, y_{j+1}, z_k\right)\right) + \\
&+ \frac{1}{\delta z^2}\left(u\left(x_i, y_j, z_{k-1}\right) + u\left(x_i, y_j, z_{k+1}\right)\right) - 2\left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} + \frac{1}{\delta z^2}\right) u\left(x_i, y_j, z_k\right),
\end{aligned}
$$

lokalna napaka pa

$$
-\frac{1}{12}\left(\delta x^2 u_{xxxx} + \delta y^2 u_{yyyy} + \delta z^2 u_{zzzz}\right)(x_i, y_j, z_k).
$$

Opazimo, da sama posplošitev iz $d = 2$ na $d = 3$ ni težka. Vidimo tudi, kako naredimo posplošitev na splošen d. Težava je v zapisu, zato se poslužimo se naslednje *multiindeksne* notacije. Spremenljivke zložimo v vektor

$$
\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d),
$$

velikost koraka mreže v $\mathbb{R}^d$ v smeri i-te spremenljivke označimo z δx_i, indeks točke v mreži označimo z $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_d)$, točko mreže pa z

$$
\boldsymbol{x_i} = \left((x_1)_{i_1}, (x_2)_{i_2}, \ldots, (x_n)_{i_n}\right).
$$

Dalje naj bo $\boldsymbol{e}_j$ enotski vektor z enico na j-tem mestu. Tedaj je

$$
\triangle u\left(\boldsymbol{x_i}\right) = \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{\delta x_k^2}\left(u\left(\boldsymbol{x_{i-e_k}}\right) - 2u\left(\boldsymbol{x_i}\right) + u\left(\boldsymbol{x_{i+e_k}}\right)\right) - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{d} \delta x_k^2 \frac{\partial^4}{\partial x_k^4} u\left(\boldsymbol{\xi_i}\right).
$$

Poglavje 2

Diferenčna metoda za robne probleme

Naloga 2.1. *Robni problem*

$$
\begin{aligned}
&y'' + 4y' - y = x, \\
&3y(0) - y'(0) = 1, \quad y'(3) = 1,
\end{aligned}
$$

rešujemo z diferenčno metodo. Zapišite splošni linearni sistem enačb, ki določa rešitev, in ga rešite v primeru, ko je $h = 1$.

Rešitev:
Problem rešujemo na intervalu $[a, b] = [0, 3]$. Interval razdelimo na n delov in dobimo točke

$$x_i = x_0 + ih = 0 + i\frac{3}{n}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

kjer je korak $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$. Z diferenčno metodo iščemo približke y_i za točne vrednosti $y(x_i)$ v delilnih točkah intervala,

$$y_i \approx y(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Le te določimo tako, da odvode v diferencialni enačbi nadomestiomo s simetičnimi diferencami drugega reda,

$$
\begin{aligned}
y''(x_i) &\approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \\
y'(x_i) &\approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}.
\end{aligned}
$$

To vodi do sledečega linearnega sistema $(n + 1)$ enačb

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 4\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - y_i = x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

za neznane vrednosti $(y_i)_{i=0}^n$. Poenostavimo in dobimo

$$(1 - 2h)y_{i-1} - (2 + h^2)y_i + (1 + 2h)y_{i+1} = h^2 x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

V enačbi pri $i = 0$ in $i = n$ nastopata vrednosti y_{-1} in y_{n+1}, ki ju določimo iz robnih pogojev, pri katerih spet uporabimo diferenčne aproksimacije za odvode. Iz prvega robnega pogoja sledi

$$3y_0 - \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y_{-1} = y_1 - 6hy_0 + 2h,$$

iz drugega pa

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y_{n+1} = y_{n-1} + 2h.$$

Vstavimo ti dve količini v (2.1) in dobimo

$$\begin{aligned}
&y_0(-2 - 6h + 11h^2) + 2y_1 = h^2x_0 - 2h + 4h^2,\\
&(1-2h)y_{i-1} - (2+h^2)y_i + (1+2h)y_{i+1} = h^2x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,\\
&2y_{n-1} - (2+h^2)y_n = h^2x_n - 2h - 4h^2.
\end{aligned}$$

Enačbe zapišemo v matrični obliki $A\boldsymbol{y} = d$, kjer so

$$A = \begin{pmatrix}
-2-6h+11h^2 & 2 & & & & \\
1-2h & -(2+h^2) & 1+2h & & & \\
 & 1-2h & -(2+h^2) & 1+2h & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1-2h & -(2+h^2) & 1+2h \\
 & & & & 2 & -(2+h^2)
\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} h^2x_0 - 2h + 4h^2 \\ h^2x_1 \\ h^2x_2 \\ \vdots \\ h^2x_{n-1} \\ h^2x_n - 2h - 4h^2 \end{pmatrix}.$$

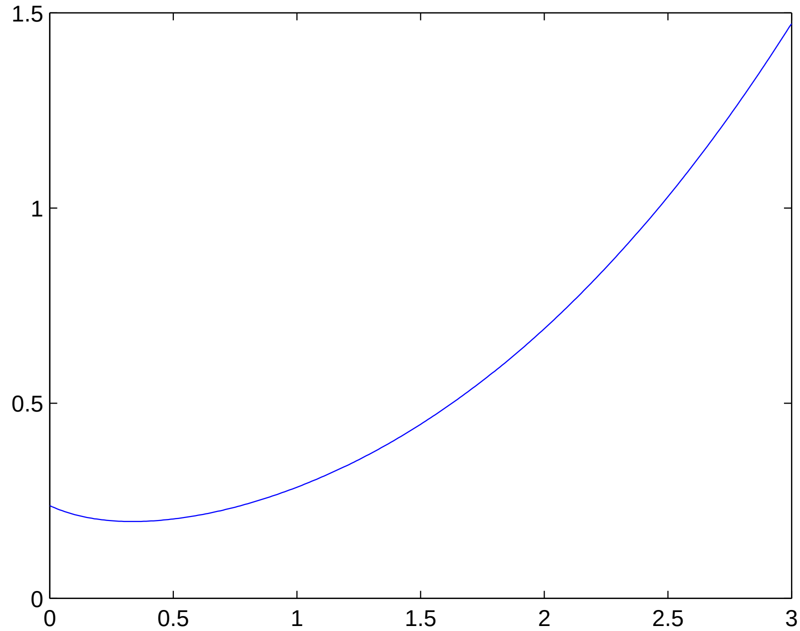
Za $h = 1$ dobimo

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

in rešitev se glasi

$$y_0 = \frac{1}{2} \approx y(0), \quad y_1 = \frac{1}{4} \approx y(1), \quad y_2 = \frac{3}{4} \approx y(2), \quad y_3 = \frac{3}{2} \approx y(3).$$

Rešitev za $h = \frac{1}{100}$ je prikazana na sliki 2.1.



Slika 2.1: Rešitev robnega problema iz naloge 2.1.

Naloga 2.2. *Robni problem*

$$\begin{aligned}&(1+x^2)y''+2xy'-x^2y=1,\\&y(0)=y(1)=0,\end{aligned}$$

rešujemo z diferenčno metodo. Zapišite splošni linearni sistem enačb, ki določa rešitev in dokažite, da ima vedno enolično rešitev.

Rešitev:
Interval $[0,1]$ razdelimo na n delov s točkami

$$x_i = x_0 + ih = \frac{i}{n}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

kjer je korak $h = \frac{1}{n}$. Iščemo približke $y_i \approx y(x_i)$. Vrednosti y_0 in y_n določimo iz robnih pogojev:

$$y_0 = 0, \quad y_n = 0.$$

Ostale neznane vrednosti $(y_i)_{i=1}^{n-1}$ določimo tako, da odvode v diferencialni enačbi nadomestimo s simetričnimi diferencami, kar nam da linearen sistem enačb

$$(1+x_i^2)\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+2x_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}-x_i^2y_i=1, \quad i=1,\ldots,n-1,$$

ki se poenostavi v

$$y_{i-1}\left(1+x_i^2-x_ih\right)-y_i\left(2+2x_i^2+x_i^2h^2\right)+y_{i+1}\left(1+x_i^2+x_ih\right)=h^2, \quad i=1,\ldots,n-1.$$

V matrični obliki ga zapišemo kot $A\boldsymbol{y} = d$, kjer so

$$A = \begin{pmatrix} -2-2x_1^2-x_1^2h^2 & 1+x_1^2+x_1h & & & \\ 1+x_2^2-x_2h & -2-2x_2^2-x_2^2h^2 & 1+x_2^2+x_2h & & \\ & 1+x_3^2-x_3h & -2-2x_3^2-x_3^2h^2 & 1+x_3^2+x_3h & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1+x_{n-2}^2-x_{n-2}h & -2-2x_{n-2}^2-x_{n-2}^2h^2 & 1+x_{n-2}^2+x_{n-2}h \\ & & & 1+x_{n-1}^2-x_{n-2}h & -2-2x_{n-1}^2-x_{n-1}^2h^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} h^2 \\ h^2 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^2 \\ h^2 \end{pmatrix}.$$

Matrika A je simetrična, saj velja

$$1 + x_{i+1}^2 - x_{i+1}h = 1 + x_i^2 + 2x_ih + h^2 - x_ih - h^2 = 1 + x_i^2 + x_ih.$$

Je pa tudi diagonalno dominantna, saj je

$$1 + x_i^2 + x_ih + 1 + x_i^2 - x_ih = 2 + 2x_i^2 < |-2 - 2x_i^2 - h^2x_i^2|.$$

Simetričen diagonalno dominanten sistem enačb zagotavlja obstoj enolične rešitve. Rešitev za $h = \frac{1}{100}$ je prikazana na sliki 2.2.

Naloga 2.3. *Rešite robni problem iz naloge 2.2 z upoštevanjem simetričnosti diferencialnega operatorja.*

Rešitev:
Opazimo, da lahko diferencialno enačbo zapišemo v obliki

$$-\left((1 + x^2)y'\right)' + x^2y = -1.$$

Diferencialen operator

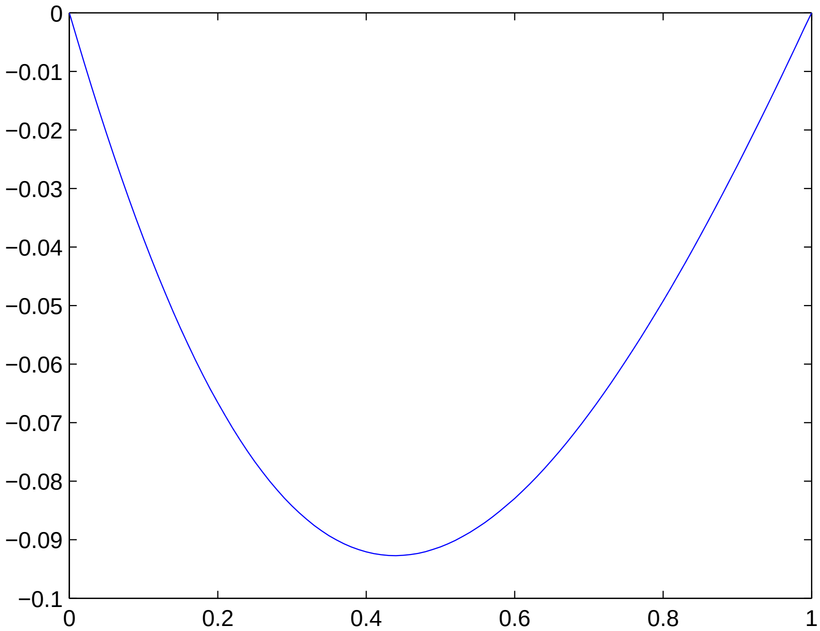
$$-\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = r(x),$$

pri katerem na območju, kjer robni problem rešujemo, velja

$$p > \text{konst} \geq 0, \quad q \geq 0,$$

imenujemo simetričen pozitivno definiten operator. Pri takih robnih problemih uporabimo aproksimacije

$$-\frac{1}{h^2}\left(p_{i-\frac{1}{2}}y_{i-1} - (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}})y_{i-1} + p_{i+\frac{1}{2}}y_{i+1}\right) + q_iy_i = r_i,$$



Slika 2.2: Rešitev robnega problema iz naloge 2.2.

kjer so

$$p_{i\pm\frac{1}{2}} = p(x_{i\pm\frac{1}{2}}), \quad q_i = q(x_i), \quad r_i = r(x_i),$$

in so točke x_i ekvidistantne.

V našem primeru je

$$p(x) = 1 + x^2 > 0, \quad q(x) = x^2 \geq 0, \quad r(x) = -1.$$

Rešitev izračunamo tako, da interval $[0, 1]$ razdelimo na n delov s točkami

$$x_i = ih = \frac{i}{n}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

Iščemo približke $y_i \approx y(x_i)$, $i = 0, \ , \ldots, n$. Vrednosti y_0 in y_n določimo iz robnih pogojev:

$$y_0 = 0, \quad y_n = 0.$$

Ostale neznane vrednosti $(y_i)_{i=1}^{n-1}$ pa so določene z rešitvijo linearnega sistema enačb

$$-\frac{1}{h^2}\left((1 + x_{i-\frac{1}{2}}^2)y_{i-1} - \left(2 + x_{i-\frac{1}{2}}^2 + x_{i+\frac{1}{2}}^2\right) y_i + (1 + x_{i+\frac{1}{2}}^2)y_{i+1}\right) + x_i^2 y_i = -1,$$

za $i = 1, 2, \ldots, n-1$, ki se v matrični obliki glasi

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & b_2 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 \\ h^2 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^2 \\ h^2 \end{pmatrix},$$

kjer so

$$a_i := -\left(2 + x_{i-\frac{1}{2}}^2 + x_{i+\frac{1}{2}}^2 + h^2 x_i^2\right), \quad b_i := 1 + x_{i+\frac{1}{2}}^2.$$

V primeru, ko je $h = 1$, dobimo linearen sistem

$$\begin{pmatrix} -\frac{43}{4} & \frac{17}{4} & 0 \\ \frac{17}{4} & -\frac{34}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & \frac{17}{4} & -\frac{43}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

katerega rešitev nam da

$$y_1 = -\frac{3}{13} \approx y\left(\frac{1}{4}\right), \quad y_2 = -\frac{77}{221} \approx y\left(\frac{1}{2}\right), \quad y_3 = -\frac{3}{13} \approx y\left(\frac{3}{4}\right).$$

Poglavje 3

Reševanje eliptičnih PDE

Naloga 3.1. *Na območju $D = [-1,1] \times [-1,1]$ rešujemo parcialno diferencialno enačbo*

$$u_{xx} + u_{yy} + 2 = 0$$

za robnimi pogoji $u|_{\partial D} = 0$. Aproksimirajte Laplaceov operator s simetričnimi diferencami drugega reda in izračunajte približke $u_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$ za točno rešitev v točkah mreže, ki jo dobite z delitvijo s koraki

1. $\delta x = \delta y = h = 1$
2. $\delta x = \delta y = h = \frac{1}{2}$.

V obeh primerih zapišite matrični sistem enačb, ki določa neznane vrednosti, ter ga rešite z upoštevanjem simetrije problema. Upoštevajte še, da se napaka izraža kot

$$u(x_i, y_j) = u_{i,j} + Ch^2 + \mathcal{O}\left(h^4\right), \quad C = \text{konst},$$

ter iz izračunanih približkov za vrednost $u(0,0)$ ekstrapolirajte boljši približek.

Rešitev:
Pravokotnik $[-1,1] \times [-1,1]$ razdelimo na manjše pravokotničke z delitvijo

$$x_i = -1 + ih, \quad y_j = -1 + jh, \quad i,j = 0,1,\ldots,n,$$

in iščemo približke $u_{i,j}$ za točne vrednosti $u(x_i, y_j)$ v točkah dobljene mreže. Približki v robnih točkah mreže so določeni z robnimi pogoji. In sicer

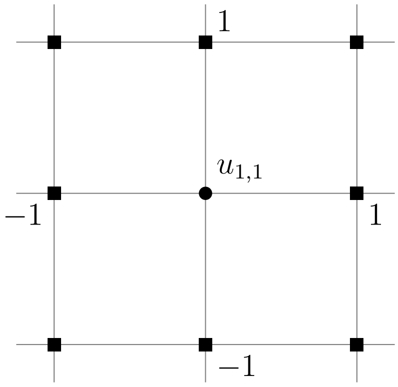
$$u_{-1,j} = u(1,j) = 0, \quad j = 0,1,\ldots,n, \quad u_{i,-1} = u(i,1) = 0, \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

ostale vrednosti pa določimo tako, da dan operator aproksimiramo (glej nalogo 1.1) in namesto točnih vrednosti uporabimo približke $u_{i,j}$. Sistem enačb je za dan problem oblike

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} + 2 = 0,$$

za $i,j = 1,2,\ldots,n-1$.

V primeru, ko je $h = 1$ oziroma $n = 2$, izgleda mreža takole:

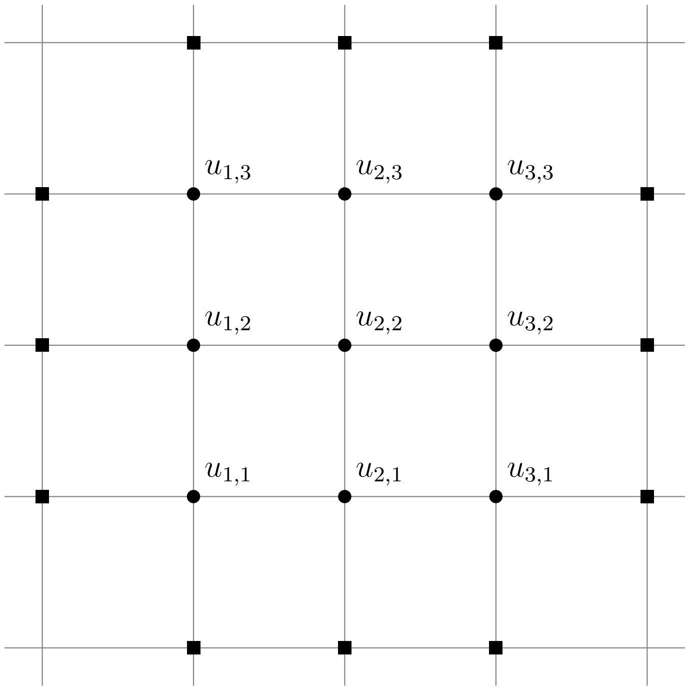


Edina neznanka je $u_{1,1} \approx u(0,0)$, ki jo izračunamo iz enačbe

$$-4u_{1,1} + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{1,1} = \frac{1}{2},$$

pri čemer smo upoštevali robne vrednosti rešitve.

V primeru, ko je $h = \frac{1}{2}$ $(n = 4)$, je mreža oblike



neznanke $(u_{i,j})_{i,j=1}^{3}$ pa so določene z enačbami

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = -\frac{1}{2}, \quad i,j = 1,2,3.$$

Neznanke zložimo v vektor $\boldsymbol{u}$ z izbiro leksikografskega vrstnega reda po vrsticah, v našem primeru

$$u_{i,j} \to u_{3(j-1)+i}.$$

Sistem enačb v matrični obliki se tako glasi

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 1 & & 1 & & & & \\ & 1 & -4 & & & 1 & & & \\ 1 & & & -4 & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & & -4 & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 1 & -4 & & & 1 \\ & & & 1 & & & -4 & 1 & \\ & & & & 1 & & 1 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = -1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Upoštevamo še simetrijo problema. Robni pogoji so simetrični glede na x in y os. Če je $u(x, y)$ rešitev problema, potem je tudi $u(-x, y)$ rešitev, saj velja

$$\triangle u(-x,y)+2 = (-1)^2 u_{xx}(-x,y)+(-1)^2 u_{yy}(-x,y)+2 = u_{xx}(-x,y)+u_{yy}(-x,y)+2 = 0$$

za vse $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. Enačba je torej izpolnjena, zadoščeno pa je tudi robnim pogojem. S podobnim razmislekom dobimo, da velja

$$u(x, y) = u(-x, y) = u(x, -y) = u(-x, -y).$$

Velja pa tudi simetrija glede na premico $y = x$, to je $u(x, y) = u(y, x)$, saj je

$$u_{yy}(y, x) + u_{xx}(y, x) + 2 = 0$$

za vse $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$, robni pogoji pa so tudi simetrični glede na $y = x$. Z upoštevanjem simetrije dobimo, da velja

$$u_1 = u_3 = u_7 = u_9, \quad u_2 = u_4 = u_6 = u_8.$$

Ostanejo le tri neznanke u_1, u_2 ter u_5, ki so določene z enačbami

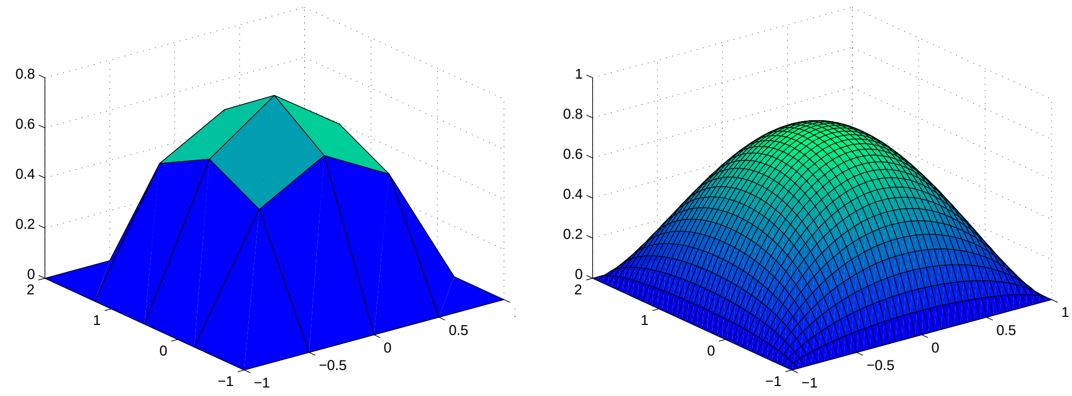
$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

katerih rešitev je enaka

$$u_1 = \frac{11}{32}, \quad u_2 = \frac{7}{16}, \quad u_5 = \frac{9}{16}.$$

Dobili smo torej

$$\begin{aligned} &u\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = u\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = u\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \approx \frac{11}{32}, \\ &u\left(0, -\frac{1}{2}\right) = u\left(0, \frac{1}{2}\right) = u\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = u\left(\frac{1}{2}, 0\right) \approx \frac{7}{16}, \\ &u\left(0, 0\right) \approx \frac{9}{16}. \end{aligned}$$



Slika 3.1: Rešitev problema pri izbiri $h = \frac{1}{2}$ (levo) in $h = \frac{1}{20}$ (desno).

Rešitev pri izbiri $h = \frac{1}{2}$ je prikazana na sliki 3.1 (levo), rešitev pri $h = \frac{1}{20}$ pa je prikazana desno.

Vidimo, da smo za vrednost $u(0,0)$ izračunali dva približka. S korakom $h = 1$ smo dobili $u(0,0) \approx \frac{1}{2}$, s korakom $h = \frac{1}{2}$ pa $u(0,0) \approx \frac{9}{16} = 0.5625$. Poglejmo, kako lahko ekstrapoliramo boljši približek. V splošnem bi dobili

$$h: \quad u(x_i, y_j) = u_{i,j} + Ch^2 + \mathcal{O}\left(h^4\right), \tag{3.1}$$

$$\frac{h}{2}: \quad u(x_i, y_j) = u_{2i,2j} + C\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(h^4\right). \tag{3.2}$$

Če drugo enačbo pomnožimo s 4 in od nje odštejemo prvo enačbo dobimo

$$3u(x_i, y_j) = 3u_{2i,2j} - u_{i,j} + \mathcal{O}\left(h^4\right),$$

oziroma

$$u(x_i, y_j) = \frac{3u_{2i,2j} - u_{i,j}}{3} + \mathcal{O}\left(h^4\right).$$

Napaka dobljenega približka $\frac{3u_{2i,2j} - u_{i,j}}{3}$ je torej reda h^4. V našem primeru dobimo

$$u(0,0) \approx \frac{3 \cdot \frac{9}{16} - \frac{1}{2}}{3} = \frac{7}{12} = 0.58\overline{3}.$$

Če primerjamo s točno vrednostjo rešitve, ki je enaka $u(0,0) = 0.589...$, vidimo, da smo res dobili točnejši približek.

Naloga 3.2. *Na območju* $[0,1] \times [0,2]$ *rešujemo parcialno diferencialno enačbo* $\triangle u = 4$ *z robnimi pogoji*

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= x^2, & 0 &\le x \le 1,\\
u(x,2) &= (x-2)^2, & 0 &\le x \le 1,\\
u(0,y) &= y^2, & 0 &\le y \le 2,\\
u(1,y) &= (y-1)^2, & 0 &\le y \le 2.
\end{aligned}$$

Za reševanje uporabimo diferenčno metodo. Zapišite sistem linearnih enačb, ki določa rešitev, če izberemo

1. $\delta x = \delta y = h = \frac{1}{2}$
2. $\delta x = \delta y = h = \frac{1}{4}$.

Rešitev:
Z delitvijo

$$x_i = i\delta x, \quad i = 0, 1, \ldots, n = \frac{1}{\delta x},$$
$$y_j = j\delta y, \quad j = 0, 1, \ldots, m = \frac{2}{\delta y}$$

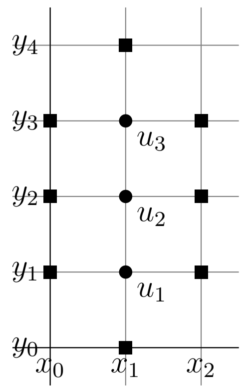
dobimo mrežo točk (x_i, y_j), v katerih iščemo približke $u_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$. Sistem enačb, ki le te določa, dobimo z diferenčno aproksimacijo Laplaceovega operatorja:

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\delta x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\delta y^2} = 4,$$

za $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Robne vrednosti so enake

$$u_{0,j} = y_j^2, \quad u(1, y) = (y_j - 1)^2, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1,$$
$$u_{i,0} = x_i^2, \quad u(i, 2) = (x_i - 2)^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

V primeru, ko izberemo $\delta x = \delta y = h = \frac{1}{2}$, je mreža enaka



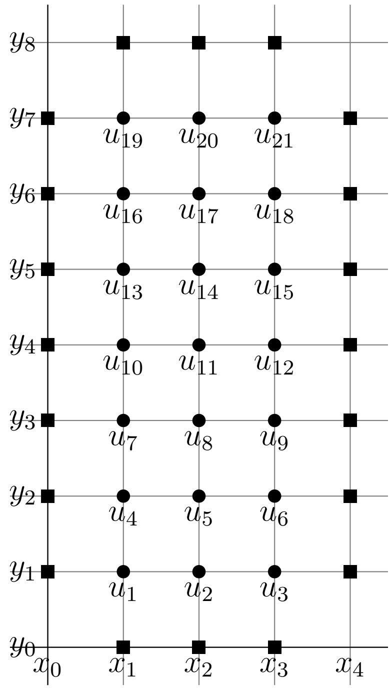
neznanke pa smo oštevilčili z $u_j = u_{1,j}$, $j = 1, 2, 3$. Z upoštevanjem robnih pogojev dobimo

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

in rešitev se glasi

$$u_1 = 0 \approx u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad u_2 = \frac{1}{4} \approx u\left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad u_3 = 1 \approx u\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

V primeru $h = \frac{1}{2}$ dobimo mežo



kjer smo označili $u_{i,j} = u_{3(j-1)+i}$. Neznank je torej 21 in so določene z enačbami $A\boldsymbol{u} = d$, kjer je $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^{21}$ vektor neznank, matriko A pa zapišemo bločno

$$A = \begin{pmatrix} B & C & & & & & \\ C & B & C & & & & \\ & C & B & C & & & \\ & & C & B & C & & \\ & & & C & B & C & \\ & & & & C & B & C \\ & & & & & C & B \end{pmatrix},$$

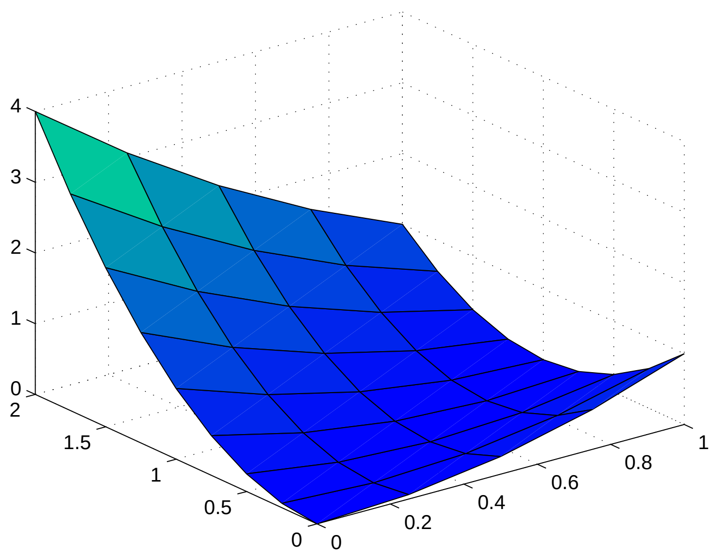
kjer sta bloka oblike

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Desna stran sistema enačb pa je enaka

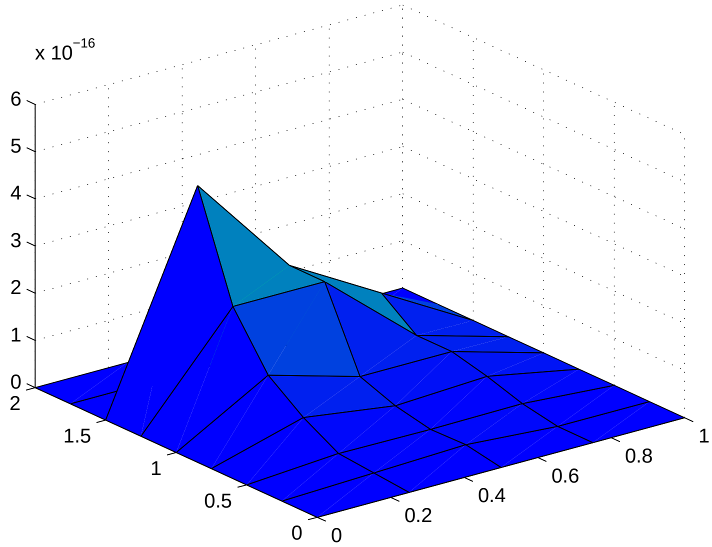
$$d = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{4} \\ \vdots \\ \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1^2 \\ -x_2^2 \\ -x_3^2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline (x_1-2)^2 \\ (x_2-2)^2 \\ (x_3-2)^2 \end{pmatrix}}_{\text{robni pogoji pri } y=0 \text{ in } y=2} + \underbrace{\begin{pmatrix} -y_1^2 \\ 0 \\ -(y_1-1)^2 \\ \hline -y_2^2 \\ 0 \\ -(y_2-1)^2 \\ \hline -y_3^2 \\ \vdots \\ -(y_6-1)^2 \\ \hline -y_7^2 \\ 0 \\ (y_7-1)^2 \end{pmatrix}}_{\text{robni pogoji pri } x=0 \text{ in } y=1}.$$

Rešitev je prikazana na sliki 3.2.

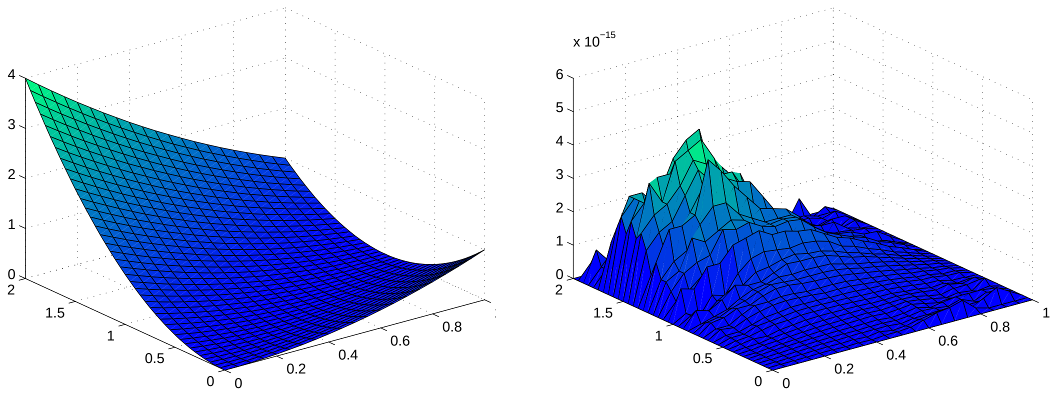


Slika 3.2: Rešitev problema v primeru $h = \frac{1}{4}$.

Hitro lahko uganemo, da je točna rešitev enaka $u(x, y) = (x - y)^2$. Na sliki 3.3 je prikazana napaka dobljenih aproksimacij za primer $h = \frac{1}{4}$. Rešitev izračunana na bolj fini mreži je prikazana na sliki 3.4 (levo) skupaj z napako (desno).



Slika 3.3: Napaka aproksimacij za primer $h = \frac{1}{4}$.



Slika 3.4: Rešitev problema pri izbiri $n = 20$ in $m = 40$ (levo) skupaj z napako (desno).

Naloga 3.3. *Na območju* $[-1,1]\times[-1,1]$ *rešujemo parcialno diferencialno enačbo*

$$\triangle u - 32u = 0$$

z robnimi pogoji

$$\begin{aligned} &u(x,-1) = 1, \quad u(x,1) = 0, && -1 \le x \le 1, \\ &u_x(1,y) = -\frac{1}{2}u(1,y), \quad u_x(-1,y) = \frac{1}{2}u(1,y), && -1 \le y \le 1. \end{aligned}$$

Za reševanje uporabimo diferenčno metodo. Preverite, da je rešitev simetrična glede na y*–os. Zapišite sistem linearnih enačb, ki določa rešitev, če izberemo* $\delta x = \delta y = h = \frac{1}{4}$.

Rešitev:
Pri dani izbiri koraka dobimo točke

$$\begin{aligned} x_i &= -1 + \frac{1}{4}i, \quad i = 0,1,\ldots,8, \\ y_j &= -1 + \frac{1}{4}j, \quad i = 0,1,\ldots,8, \end{aligned}$$

ki sestavljajo mrežo točk $((x_i, y_j))_{i,j}$, v katerih iščemo približke $u_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$. Iz robnih pogojev dobimo

$$u_{i,0} = 1, \quad u_{i,8} = 0, \quad i = 0,1,\ldots,8,$$

ostane pa 63 neznank $u_{i,j}$, $i = 0,1,\ldots,8$, $j = 1,2,\ldots,7$. Preverimo najprej, da je rešitev simetrična glede na os y, to je $u(x,y) = u(-x,y)$. Enačba temu ustreza, prav tako pogoji na spodnjem in zgornjem robu. Preveriti moramo še, da so simetrični tudi pogoji na levem in desnem robu, kjer je $x = \pm 1$. Če enakost $u(x,y) = u(-x,y)$ odvajamo po x, dobimo

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u(-x,y) \\ u_x(x,y) &= -u_x(-x,y). \end{aligned}$$

Vstavimo $x = 1$ in dobimo

$$u_x(1,y) = -\frac{1}{2}u(1,y), \quad u_x(-1,y) = \frac{1}{2}u(1,y) \quad \Longrightarrow \quad u_x(1,y) = -u_x(-1,y).$$

Rešitev je torej res simetrična na y–os. Preostane nam torej $5 \cdot 7 = 35$ neznank $u_{i,j}$, $i = 4,5,\ldots,8$, $j = 1,2,\ldots,7$. Enačbe, ki jih določajo, se glasijo

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\delta x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\delta y^2} - 32u_{i,j} = 0$$

oziroma

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 6u_{i,j} = 0.$$

Pri enačbah za $i = 8$ se pojavijo 'navidezne točke' $u_{9,j}$, katere vrednosti določimo iz robnih pogojev, ki jih aproksimiramo s simetričnimi diferencami drugega reda:

$$\begin{aligned}
u_x(1,y) &= -\frac{1}{2}u(1,y)\\
\frac{u_{9,j}-u_{7,j}}{2h} &= -\frac{1}{2}u_{8,j},\\
u_{9,j} &= u_{7,j} - \frac{1}{4}u_{8,j}, \quad j = 1,2,\ldots,7.
\end{aligned}$$

Vstavimo dobljene vrednosti in dobimo enačbe

$$2u_{7,j} + u_{8,j-1} + u_{8,j+1} - \frac{25}{4}u_{8,j} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,7.$$

Pri enačbah za $i = 4$ moramo upoštevati, da je $u_{3,j} = u_{5,j}$ in dobimo

$$2u_{5,j} + +u_{5,j-1} + u_{5,j+1} - 6u_{5,j} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,7.$$

Neznanke zložimo v vektor $\boldsymbol{u}$ z izbiro leksikografskega vrstnega reda po vrsticah:

$$u_{i,j} \to u_{5(j-1)+i-3}.$$

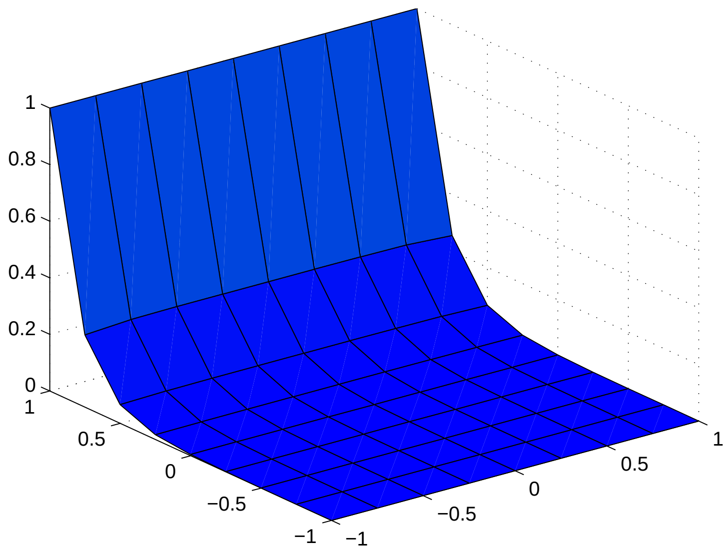
Matrični sistem, ki določa rešitev zapišemo bločno

$$\begin{pmatrix}
C & I_5 & & & & & \\
I_5 & C & I_5 & & & & \\
 & I_5 & C & I_5 & & & \\
 & & I_5 & C & I_5 & & \\
 & & & I_5 & C & I_5 & \\
 & & & & I_5 & C & I_5 \\
 & & & & & I_5 & C
\end{pmatrix} \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{e} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

kjer je $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$,

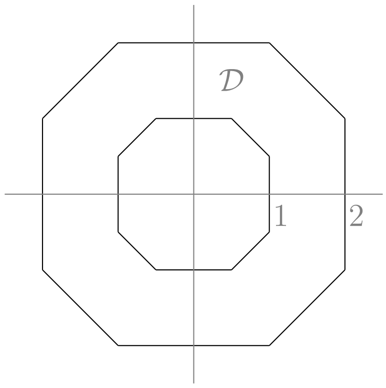
$$C = \begin{pmatrix}
-6 & 2 & & & \\
1 & -6 & 1 & & \\
 & 1 & -6 & 1 & \\
 & & 1 & -6 & 1 \\
 & & & 2 & -\frac{25}{4}
\end{pmatrix}$$

in $\boldsymbol{e} = (1,1,1,1,1)^T$. Dobljena rešitev je prikazana na sliki 3.5.



Slika 3.5: Rešitev v primeru $h = \frac{1}{4}$.

Naloga 3.4. *Na območju* $\mathcal{D}$



ki ga oklepata osemkotnika, rešujemo parcialno diferencialno enačbo

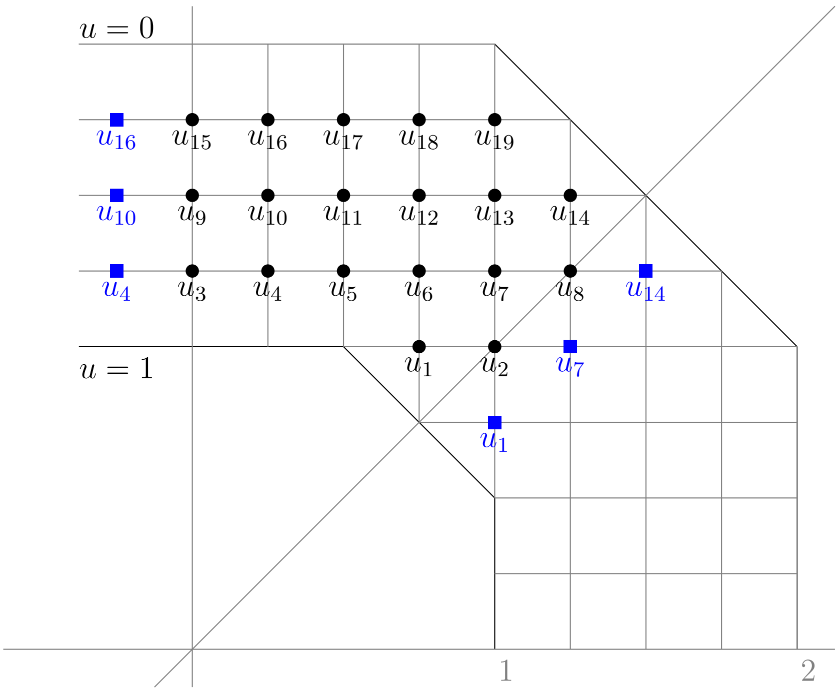
$$\triangle u = 2$$

z robnimi pogoji

$$u|_{\partial\mathcal{D}_1} = 0, \quad u|_{\partial\mathcal{D}_2} = 0,$$

kjer je $\partial\mathcal{D}_1$ *zunanji rob in* $\partial\mathcal{D}_2$ *notranji rob območja. Zapišite sistem enačb, ki določa rešitev pri izbiri* $\delta x = \delta y = h = \frac{1}{4}$. *Upoštevajte simetrijo.*

Rešitev:
Opazimo, da je rešitev simetrična glede na x in y os ter na premico $y = x$. Dovolj je torej izračunati vrednosti $u_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$ v mrežnih točkah (x_i, y_j), ki jih prikazuje sledeča slika:



Vidimo, da imamo 19 neznanih vrednosti, ki jih po vrsticah zložimo v vektor $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^{19}$ kot prikazuje slika. Enačba, ki povezuje neznanke $u_{i,j}$, se za $h = \frac{1}{4}$ glasi

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = -\frac{1}{8}.$$

To nam da matrični sistem enačb $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$, kjer je matrika A enaka

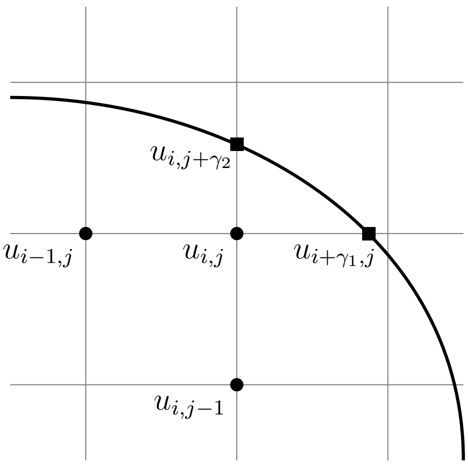
$$A =$$

$$\left(\begin{array}{cc|cccccc|cccccc|ccccc}
-4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4
\end{array}\right),$$

vektor na desni strani enačb, pa se glasi

$$\boldsymbol{b} = -\frac{1}{8}(1, 1, \ldots, 1)^T + (-2, 0, -1, -1, -1, 0, 0, \ldots, 0)^T.$$

Naloga 3.5. *Izpeljite formule za diskretizacijo Laplaceovega operatorja v točki (x_i, y_j), ki se nahaja v bližini krivuljnega robu, z vrednostmi, ki so prikazane na sledeči sliki:*



Pri tem sta $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1]$ *in* $u_{i+\gamma_1,j} \approx u(x_i+\gamma_1\delta x, y_j)$, $u_{i,j+\gamma_2} \approx u(x_i, y_j+\gamma_2\delta y)$. *Izpeljite tudi aproksimacijske formule za* $u_x(x_i,y_j)$ *ter* $u_y(x_i,y_j)$.

Rešitev:
Poglejmo si najprej, kako bi aproksimirali $u_{xx}(x_i,y_j)$ z vrednostima $u_{i-1,j}$ ter $u_{i+\gamma_1,j}$. Razvijmo $u(x_{i-1},y_j)$ in $u(x_i+\gamma_1\delta x, y_j)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke (x_i,y_j):

$$\begin{aligned} u(x_{i-1},y_j) &= u(x_i,y_j) - \delta x u_x(x_i,y_j) + \frac{1}{2}\delta x^2 u_{xx}(x_i,y_j) + \mathcal{O}\left(\delta x^3\right), \\ u(x_i+\gamma_1\delta x,y_j) &= u(x_i,y_j) + \delta x\gamma_1 u_x(x_i,y_j) + \frac{1}{2}\delta x^2\gamma_1^2 u_{xx}(x_i,y_j) + \mathcal{O}\left(\delta x^3\right). \end{aligned}$$

Pomnožimo prvo enačbo z γ_1, jo prištejemo k drugi enačbi, poenostavimo ter dobimo

$$\begin{aligned} & u_{xx}(x_i,y_j) = \\ & \frac{2}{\delta x^2\gamma_1(1+\gamma_1)}\left(\gamma_1 u(x_{i-1},y_j) + u(x_i+\gamma_1\delta x,y_j) - (1+\gamma_1)u(x_i,y_j)\right) + \mathcal{O}(\delta x). \end{aligned}$$

Podobno za $u_{yy}(x_i,y_j)$. Sledi

$$\begin{aligned} & \triangle\, u(x_i,y_j) \approx \\ & \frac{2}{\delta x^2\gamma_1(1+\gamma_1)}\left(\gamma_1 u(x_{i-1},y_j) + u(x_i+\gamma_1\delta x,y_j) - (1+\gamma_1)u(x_i,y_j)\right) + \\ & \frac{2}{\delta y^2\gamma_2(1+\gamma_2)}\left(\gamma_2 u(x_i,y_{j-1}) + u(x_i,y_j+\gamma_2\delta y) - (1+\gamma_2)u(x_i,y_j)\right). \end{aligned}$$

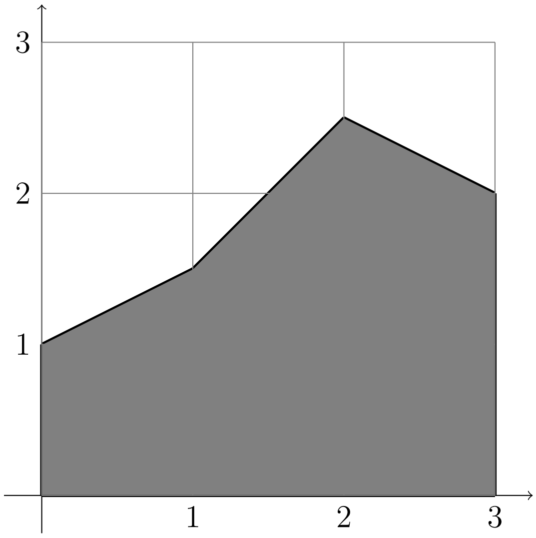
Aproksimacijo za u_x dobimo tako, da prvo enačbo pomnožimo z γ_1^2 ter jo odštejemo od druge enačbe. Dobimo

$$\begin{aligned} & u_x(x_i,y_j) = \\ & \frac{1}{\delta x\gamma_1(1+\gamma_1)}\left(-\gamma_1^2 u(x_{i-1},y_j) + u(x_i+\gamma_1\delta x,y_j) - (1-\gamma_1^2)u(x_i,y_j)\right) + \mathcal{O}\left(\delta x^2\right) \end{aligned}$$

in podobno

$$\begin{aligned} & u_y(x_i,y_j) = \\ & \frac{1}{\delta y\gamma_2(1+\gamma_2)}\left(-\gamma_2^2 u(x_i,y_{j-1}) + u(x_i,y_j+\gamma_2\delta y) - (1-\gamma_2^2)u(x_i,y_j)\right) + \mathcal{O}\left(\delta y^2\right). \end{aligned}$$

Naloga 3.6. *Na območju* $\mathcal{D}$

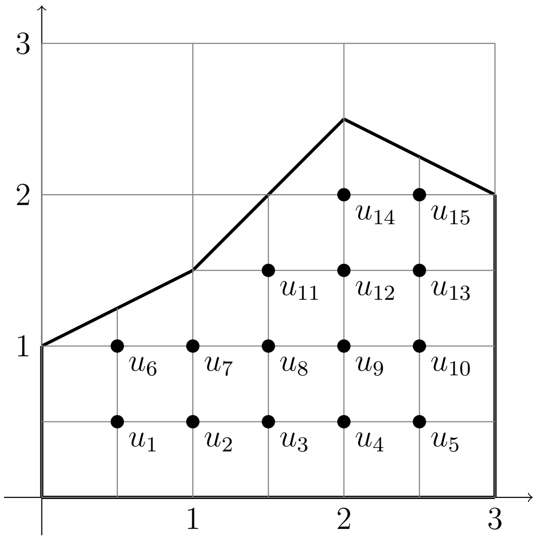


rešujemo problem $\triangle u = 0$ *z robnimi pogoji*

$$u\big|_{\partial\mathcal{D}\cap\{y=0\}} = 0, \quad u\big|_{\partial\mathcal{D}\cap\{y>0\}} = 1.$$

Za reševanje uporabimo diferenčno metodo s korakoma $\delta x = \delta y = \frac{1}{2}$. *Zapišite sistem enačb, ki določa rešitev.*

Rešitev:
Mreža točk skupaj z oznakami neznank pri dani delitvi je prikazana na sledeči sliki:



Vidimo, da moramo v točkah $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ter $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ uporabiti drugačne vrste diferenčnih aproksimacij za u_{yy}, saj razdalji do sosednjih točk nista enaki. Uporabimo izpeljane formule iz prejšnje naloge. Enačba pri $u_6 \approx u\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ se glasi

$$\frac{4}{3}u_1 - 6u_6 + u_7 = -\frac{11}{3},$$

pri $u_{15} \approx u\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ pa

$$\frac{4}{3}u_{13} + u_{14} - 6u_{15} = -\frac{11}{3}.$$

Enačbe, ki jih pripišemo ostalim neznankam, so oblike

$$u_L + u_D + u_Z + u_S - 4u = 0,$$

kjer u_L, u_D, u_Z, u_S označujejo neznanke levo, desno, zgoraj in spodaj od opazovane neznanke u. Matrični sistem, ki določa rešitev $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^{15}$ je enak

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccc|cc}
-4 & 1 & & & & 1 & & & & & & & & & \\
1 & -4 & 1 & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & 1 & -4 & 1 & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & -4 & 1 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & -4 & & & & & 1 & & & & & \\
\hline
\frac{4}{3} & & & & & -6 & 1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & 1 & -4 & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & 1 & -4 & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & 1 & -4 & 1 & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & 1 & -4 & & & 1 & & \\
\hline
 & & & & & & & 1 & & & -4 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & -4 & 1 & 1 & \\
 & & & & & & & & & 1 & & 1 & -4 & & 1 \\
\hline
 & & & & & & & & & & & 1 & & -4 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & \frac{4}{3} & 1 & -6
\end{array}\right) \boldsymbol{u} = \left(\begin{array}{c}
-1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \hline -\frac{11}{4} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \hline -2 \\ 0 \\ -1 \\ \hline -2 \\ -\frac{11}{3}
\end{array}\right).$$

Naloga 3.7. *Na območju* $\mathcal{D} = [-1,1] \times [-1,1]$ *rešujemo problem*

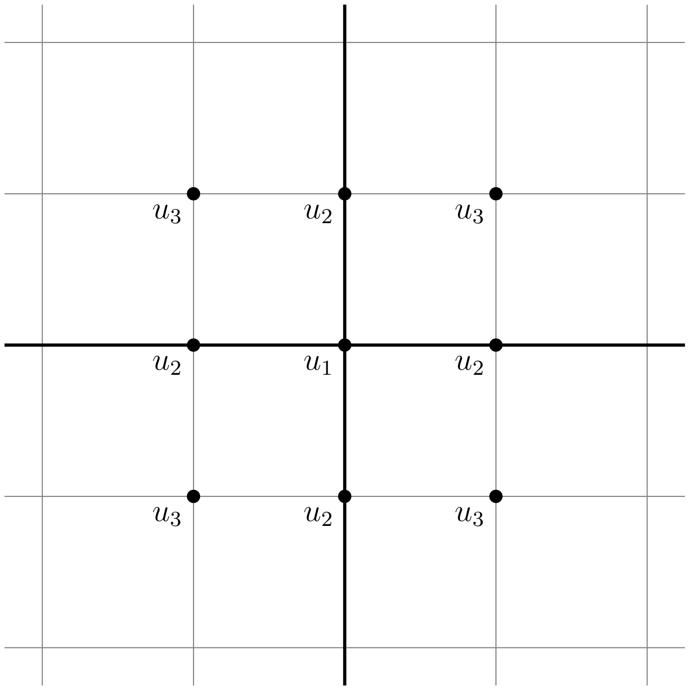
$$\triangle u = 0, \quad u|_{\partial\mathcal{D}} = 1.$$

Uporabimo diferenčno metodo s korakoma $\delta x = \delta y = h = \frac{1}{2}$*. Zapišite sistem enačb, ki določa rešitev, pri čemer upoštevajte simetrijo problema. Z začetnim približkom* $\boldsymbol{u}^{(0)} = \mathbf{0}$ *določite dva nova približka k rešitvi sistema z uporabo Jacobijeve in Gauss–Seidelove iteracije. Dokažite, da obe metodi konvergirata in da Gauss-Seidelova konvergira dvakrat hitreje kot Jacobijeva.*

Rešitev:
Z danim korakom dobimo 9 neznanih vrednosti $u_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$ v točkah (x_i, y_j),

$$x_i = -1 + ih, \quad y_j = -1 + jh, \quad i,j = 1,2,3.$$

Opazimo, da za rešitev u velja simetrija glede na x in y os ter na premico $y = x$. S tem število neznanih vrednosti zmanjšamo na 3, kot je prikazano na sledeči sliki.



Z aproksimacijo Laplaceovega operatorja dobimo 3 enačbe, ki določajo neznanke

$$u_1 \approx u(0,0), \quad u_2 \approx u\left(\frac{1}{2},0\right), \quad u_3 \approx u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

V matrični obliki se glase

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poglejmo si najprej Jacobijevo iterativno metodo za reševanje dobljenega linearnega sistema. Iz približka $\left(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}\right)^T$ na k-tem koraku dobimo nov približek kot

$$\begin{aligned} u_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(0 + 4u_2^{(k)}\right) \\ u_2^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(1 + u_1^{(k)} + 2u_3^{(k)}\right) \\ u_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(2 + 2u_2^{(k)}\right). \end{aligned}$$

V primeru $\left(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}\right)^T = (0,0,0)^T$ dobimo

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= 0, & u_2^{(1)} &= \frac{1}{4}, & u_3^{(1)} &= \frac{1}{2}, \\ u_1^{(2)} &= \frac{1}{4}, & u_2^{(2)} &= \frac{1}{2}, & u_3^{(2)} &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Nadaljujemo dokler ni izpolnjen pogoj

$$\frac{\left\|\left(u_1^{(k+1)}, u_2^{(k+1)}, u_3^{(k+1)}\right) - \left(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}\right)\right\|}{\left\|\left(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}\right)\right\|} < \mathrm{tol}$$

za izbrano toleranco 'tol'. Za 'tol' $= 10^{-8}$ dobimo po $k = 52$ korakih približek

$$u_1^{(k)} = 0.999999977648258, \quad u_2^{(k)} = 0.999999985098839, \quad u_3^{(k)} = 0.999999988824129.$$

Od točne rešitve

$$(u_1, u_2, u_3)^T = (1, 1, 1)^T$$

se razlikuje za

$$\frac{\left\|(u_1, u_2, u_3) - \left(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}\right)\right\|}{\|(u_1, u_2, u_3)\|} = 1.68 \cdot 10^{-8}.$$

Z Gauss–Seidelovo metodo računamo približke

$$\begin{aligned}
u_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(0 + 4u_2^{(k)}\right)\\
u_2^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(1 + u_1^{(k+1)} + 2u_3^{(k)}\right)\\
u_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(2 + 2u_2^{(k+1)}\right).
\end{aligned}$$

Za $\left(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}\right)^T = (0, 0, 0)^T$ dobimo

$$\begin{gathered}
u_1^{(1)} = 0, \quad u_2^{(1)} = \frac{1}{4}, \quad u_3^{(1)} = \frac{5}{8},\\
u_1^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad u_2^{(2)} = \frac{5}{8}, \quad u_3^{(2)} = \frac{13}{16}.
\end{gathered}$$

Za izbrano toleranco 'tol' $= 10^{-8}$ potrebuje Gauss–Seidelova metoda glede na zgornji zaustavitveni pogoj $k = 28$ korakov. Dobimo

$$u_1^{(k)} = 0.999999988824129, \quad u_2^{(k)} = 0.999999994412065, \quad u_3^{(k)} = 0.999999997206032$$

in velja

$$\frac{\left\|(1, 1, 1) - \left(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}\right)\right\|}{\|(1, 1, 1)\|} = 7.39 \cdot 10^{-9}.$$

Vidimo, da potrebuje Gauss–Seidelova metoda približno pol manj korakov. Potrdimo to teoretično. Iteracijska matrika R_J za Jacobijevo metodo je enaka

$$R_J = -\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Iz enačbe $\det(R_J - \lambda I) = 0$ dobimo, da so lastne vrednosti

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

in spektralni polmer je enak

$$\rho(R_J) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

kar potrjuje konvergenco. Iteracijska matrika R_{GS} za Gauss–Seidelovo metodo se glasi

$$R_{GS} = -\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

njene lastne vrednosti so enake

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2},$$

spektralni polmer pa je

$$\rho(R_{GS}) = \frac{1}{2} < 1,$$

Metoda torej konvergira za poljuben začetni približek. Merilo za hitrost konvergence je negativni logaritem spektralnega polmera, in sicer

$$\begin{aligned} h_J &= -\log\rho(R_J) = -\log\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ h_{GS} &= -\log\rho(R_{GS}) = -\log\frac{1}{2} = -\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\log\rho(R_J). \end{aligned}$$

Od tod vidimo, da potrebujemo za 8 točnih decimalk pri Jacobijevi metodi približno $8/h_J = 53.150$ korakov, pri Gauss–Seidelovi pa približno $8/h_{GS} = 26.58$ korakov, kar potrjujejo tudi numerični rezultati.

Naloga 3.8. *Problem iz naloge 3.7 rešujemo z SOR metodo. Z izbiro $\omega = \frac{3}{2}$ in začetnim približkom $\boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{0}$ določite prva dva približka k rešitvi linearnega sistema, ki določa aproksimacijsko rešitev $\boldsymbol{u}$. Določite iteracijsko matriko R_ω ter izračunajte spektralni polmer $\rho(R_\omega)$. Kakšna je optimalna izbira za ω.*

Rešitev:
Rešiti moramo sistem enačb

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pri SOR metodi tvorimo zaporedje približkov

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \omega\boldsymbol{u}_{GS}^{(k+1)} + (1-\omega)\boldsymbol{u}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

pri čemer je $\boldsymbol{u}_{GS}^{(k+1)}$ približek izračunan z Gauss–Seidelovo metodo. V našem primeru

$$\begin{aligned}
u_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\omega\left(0 + 4u_2^{(k)}\right) + (1-\omega)u_1^{(k)}\\
u_2^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\omega\left(1 + u_1^{(k+1)} + 2u_3^{(k)}\right) + (1-\omega)u_2^{(k)}\\
u_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\omega\left(2 + 2u_2^{(k+1)}\right) + (1-\omega)u_3^{(k)}.
\end{aligned}$$

Za $\left(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}\right)^T = (0,0,0)^T$ dobimo

$$\begin{aligned}
&u_1^{(1)} = 0, \quad u_2^{(1)} = \frac{\omega}{4}, \quad u_3^{(1)} = \frac{1}{8}\omega(4+\omega),\\
&u_1^{(2)} = \frac{1}{4}\omega^2, \quad u_2^{(2)} = \frac{1}{8}\omega(4+\omega^2), \quad u_3^{(2)} = \frac{1}{16}\omega(16 - 2\omega - 2\omega^2 + \omega^3)
\end{aligned}$$

oziroma pri $\omega = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
&u_1^{(1)} = 0, \quad u_2^{(1)} = \frac{3}{8} = 0.375, \quad u_3^{(1)} = \frac{33}{32} = 1.03125,\\
&u_1^{(2)} = \frac{9}{16} = 0.5625, \quad u_2^{(2)} = \frac{75}{64} = 1.171875, \quad u_3^{(2)} = \frac{285}{256} = 1.1132813.
\end{aligned}$$

Za izbrano toleranco 'tol' $= 10^{-8}$ z izbiro $\omega = \frac{3}{2}$ potrebuje SOR metoda $k = 27$ korakov. Dobimo

$$u_1^{(k)} = 0.9999999855800050, \quad u_2^{(k)} = 0.9999999900111690, \quad u_3^{(k)} = 0.9999999998386659$$

in velja

$$\frac{\left\|(1,1,1) - \left(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}\right)\right\|}{\|(1,1,1)\|} = 1.013 \cdot 10^{-8}.$$

Za določitev iteracijske matrike R_ω preoblikujemo enačbe, ki določajo nove približke:

$$\begin{aligned}
u_1^{(k+1)} &= (1-\omega)u_1^{(k)} + \omega u_2^{(k)}\\
-\frac{1}{4}\omega u_1^{(k+1)} + u_2^{(k+1)} &= (1-\omega)u_2^{(k)} + \frac{1}{2}\omega u_3^{(k)} + \frac{1}{4}\omega\\
-\frac{1}{2}\omega u_2^{(k+1)} + u_3^{(k+1)} &= (1-\omega)u_3^{(k)} + \frac{1}{2}\omega.
\end{aligned}$$

Od tod preberemo

$$\begin{aligned}
R_\omega &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{4}\omega & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\omega & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega & 0\\ 0 & 1-\omega & \frac{1}{2}\omega\\ 0 & 0 & 1-\omega \end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix} 1-w & w & 0\\ -\frac{1}{4}(w-1)w & \frac{1}{4}(w-2)^2 & \frac{w}{2}\\ -\frac{1}{8}(w-1)w^2 & \frac{1}{8}(w-2)^2 w & \frac{1}{4}(w-2)^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

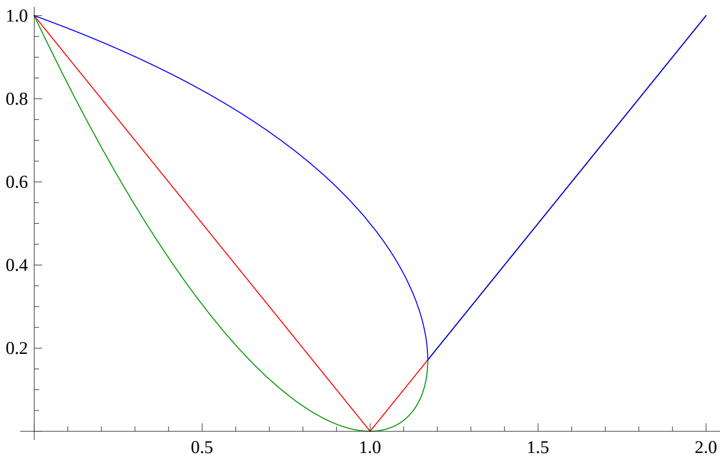
Lastne vrednosti matrike R_ω so enake

$$\lambda_1 = 1 - w, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}\left(4 + w^2 - 4\omega + \sqrt{w^2 - 8w + 8}\right), \tag{3.3}$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{4}\left(4 + w^2 - 4\omega - \sqrt{w^2 - 8w + 8}\right).$$

Zanima nas, pri katerem ω bo spektralni polmer

$$\rho\left(R_\omega\right) = \max\left\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\right\}$$

najmanjši. Iz grafa absolutnih vrednosti $|\lambda_i|$ na sliki 3.6 vidimo, da mora biti $\omega \in (0,2)$



Slika 3.6: Grafi absolutnih vrednosti lastnih vrednosti matrike R_ω za $\omega \in (0,2)$.

in da je $\min_{\omega \in (0,2)} \rho\left(R_\omega\right)$ dosežen pri rešitvi enačbe $w^2 - 8w + 8 = 0$. Optimalen ω je torej enak

$$\omega^* = 4 - 2\sqrt{2}$$

in velja

$$\rho\left(R_\omega\right) = |\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = \omega^* - 1 = 3 - 2\sqrt{2} = 0.171573,$$
$$h_{\omega^*} = -\log\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 0.765551.$$

V sledeči tabeli so prikazani približki izračunani z ω^*:

korak	$u_1^{(k)}$	$u_2^{(k)}$	$u_3^{(k)}$
$k=0$	0	0	0
$k=1$	0	0.2928932188134525	0.7573593128807149
$k=2$	0.3431457505076198	0.7867965644035743	0.9167388793147683
$k=3$	0.8629150101523961	0.9476554272527694	0.9836226090741171
$k=4$	0.9621945842648876	0.9883143054588406	0.9959645946738475
$k=5$	0.9927957411249150	0.9975309839302879	0.9992460499667023
$k=6$	0.9983434231534306	0.9994967623571707	0.9998345675889378
$k=7$	0.9996946440804993	0.9998999971884257	0.9999698034236813
$k=8$	0.9999352302115950	0.9999804983932372	0.9999937571366682
$k=9$	0.9999882651853191	0.9999962519144286	0.9999988755283168
$k=10$	0.9999976222205058	0.9999992879340670	0.9999997758102736
$k=11$	0.9999995737253321	0.9999998659909387	0.9999999599641853
$k=12$	0.9999999161357892	0.9999999749766241	0.9999999922107056
$k=13$	0.9999999850721153	0.9999999953581933	0.9999999986173242
$k=14$	0.9999999971230053	0.9999999991438032	0.999999999735681

Pri $k = 14$ se izračunan približek razlikuje od točne rešitve $(1,1,1)^T$ za

$$\frac{\left\|(1,1,1)-\left(u_1^{(k)},u_2^{(k)},u_3^{(k)}\right)\right\|}{\|(1,1,1)\|} = 1.74\cdot 10^{-9}.$$

Pri $\omega = \frac{3}{2}$ je $\rho\left(R_\omega\right) = \frac{1}{2} = \rho\left(R_{GS}\right)$, torej je hitrost konvergence enaka kot pri Gauss-Seidelovi metodi. To potrjujejo tudi izračuni, saj smo z obema metodama potrebovali okrog 28 korakov, da smo prišli do natančnosti 10^{-8}.

Naloga 3.9. *Izpeljite iteracijsko matriko za SOR metodo.*

Rešitev:
Rešujemo problem $Au = b$, kjer je matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oblike

$$A = L + D + U,\quad L = \operatorname{tril}(A,-1),\quad D = \operatorname{diag}(\operatorname{diag}(A)),\quad U = \operatorname{triu}(A,1).$$

Pri SOR metodi računamo približke

$$u^{(k+1)} = \omega u_{GS}^{(k+1)} + (1-\omega)u^{(k)},\quad k = 0,1,\ldots,$$

pri čemer je

$$u_{GS}^{(k+1)} = D^{-1}\left(-Lu^{(k+1)} - Uu^{(k)}\right) + D^{-1}b.$$

Zgornji izraz preoblikujemo:

$$\begin{aligned}
u^{(k+1)} &= \omega\left(D^{-1}\left(-Lu^{(k+1)} - Uu^{(k)}\right) + D^{-1}b\right) + (1-\omega)u^{(k)}\\
\left(I + \omega D^{-1}L\right)u^{(k+1)} &= \left((1-\omega)I - \omega D^{-1}U\right)u^{(k)} + \omega D^{-1}b\\
(D+\omega L)\,u^{(k+1)} &= ((1-\omega)D - \omega U)\,u^{(k)} + \omega b\\
u^{(k+1)} &= (D+\omega L)^{-1}\left((1-\omega)D - \omega U\right)u^{(k)} + (D+\omega L)^{-1}\omega b.
\end{aligned}$$

Od tod vidimo, da je

$$R_\omega = (D + \omega L)^{-1}\left((1-\omega)D - \omega U\right).$$

Naloga 3.10. *Izpeljite povezavo med lastnimi vrednostmi Jacobijeve in SOR iteracijske matrike za reševanje problema iz naloge 3.7.*

Rešitev:
Iz naloge 3.9 vemo, da je iteracijska matrika za SOR enaka

$$R_\omega = (D + \omega L)^{-1}\left((1-\omega)D - \omega U\right),$$

pri čemer mora biti seveda matrika $D+\omega L$ obrnljiva. Lastne vrednosti so rešitve enačbe $\det(R_\omega - \lambda I) = 0$. Enačbo preoblikujemo:

$$\begin{aligned}
\det\left((D+\omega L)^{-1}\left((1-\omega)D - \omega U\right) - \lambda I\right) &= 0\\
\det\left((D+\omega L)^{-1}\right)\det\left((1-\omega)D - \omega U - \lambda(D+\omega L)\right) &= 0\\
\det\left((1-\omega-\lambda)D - \omega U - \lambda\omega L\right) &= 0\\
\det\left((1-\omega-\lambda)D - \omega\sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}U + \sqrt{\lambda}L\right)\right) &= 0\\
\det\left(\frac{1-\omega-\lambda}{\omega\sqrt{\lambda}}D - \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}U + \sqrt{\lambda}L\right)\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Uporabili bomo izrek, ki pravi, da za konsistentno urejeno matriko $A = L + D + U$ velja

$$\det\left(cD - \left(\alpha L + \frac{1}{\alpha}U\right)\right) = \det\left(cD - L - U\right).$$

Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je konsistentno urejena, če obstaja taka ureditev $\boldsymbol{\ell} = (\ell_i)_{i=1}^n$, $\ell_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, da velja

$$\begin{aligned}
i < j, \quad a_{i,j} \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \ell_i - \ell_j = -1,\\
i > j, \quad a_{i,j} \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \ell_i - \ell_j = 1.
\end{aligned}$$

Vidimo, da matrika $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0\\ -1 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$ je konsistentno urejena, saj z izbiro $\boldsymbol{\ell} = (1, 2, 3)$ zadostimo zgornjim pogojem. Torej je

$$\det\left(\frac{1-\omega-\lambda}{\omega\sqrt{\lambda}}D - \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}U + \sqrt{\lambda}L\right)\right) = \det\left(\frac{1-\omega-\lambda}{\omega\sqrt{\lambda}}D - U - L\right),$$

od koder vidimo, da so lastne vrednosti matrike R_ω enake rešitvam enačbe

$$\det\left(\frac{1-\omega-\lambda}{\omega\sqrt{\lambda}}I - D^{-1}(U + L)\right) = 0.$$

Ker pa je $-D^{-1}(U+L) = R_J$, sledi zveza

$$-\frac{1-\omega-\lambda}{\omega\sqrt{\lambda}} = \mu,$$

oziroma

$$\lambda = \left(\frac{\mu\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu\omega}{2}\right)^2 + 1 - \omega}\right)^2,$$

pri čemer je μ lastna vrednost Jacobijeve iteracijske matrike R_J. Če upoštevamo, da so lastne vrednosti matrike R_J enake $\mu = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ter $\mu = 0$, dobimo natanko vrednosti (3.3).

Naloga 3.11. *Problem iz naloge 3.2 rešujemo z Jacobijevo in Gauss–Seidelovo iterativno metodo, ki ju izvajamo direktno na mreži. Zapišite enačbe, ki določajo rešitev pri izbiri* $\delta x = \frac{1}{4}$, $\delta y = \frac{1}{2}$ *ter določite približke za rešitev linearnega sistema po dveh korakih iteracij. Začetni približek naj bo enak desni strani enačb. Določite tudi optimalen* ω^* *za SOR metodo ter naredite dva koraka le te. Izračunajte spektralne polmere za vse tri iteracijske matrike.*

Rešitev:
Pri danih korakih delitve $\delta x = \frac{1}{4}$, $\delta y = \frac{1}{2}$ imamo 9 neznanih vrednosti $u_{i,j}$, $i,j = 1,2,3$, ki jih določajo enačbe

$$16\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\right) + 4\left(u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right) - 40u_{i,j} = 4, \quad i,j = 1,2,3.$$

oziroma

$$-\frac{2}{5}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\right) - \frac{1}{10}\left(u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right) + u_{i,j} = -\frac{1}{10}, \quad i,j = 1,2,3.$$

Zapišemo jih v matriko

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{9}{16} & 1 \\ \frac{1}{4} & u_{1,1} & u_{2,1} & u_{3,1} & \frac{1}{4} \\ 1 & u_{1,2} & u_{2,2} & u_{3,2} & 0 \\ \frac{9}{4} & u_{1,3} & u_{2,3} & u_{3,3} & \frac{1}{4} \\ 4 & \frac{49}{16} & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix},$$

ki ji dodamo robne vrednosti rešitve, pri čemer velja

$$U(i,j) = u_{j-1,i-1} \approx u(x_{j-1}, y_{i-1}), \quad i,j = 1,2,\ldots,5.$$

Za začetni približek izberemo

$$U^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{9}{16} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ \frac{9}{4} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{4} \\ 4 & \frac{49}{16} & \frac{9}{4} & \frac{25}{16} & 1 \end{pmatrix}.$$

Z uporabo Jacobijeve metode dobimo

$U_J^{(1)} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{9}{16} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{160} & -\frac{33}{200} & \frac{1}{160} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{6}{25} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{25} & 0 \\ \frac{9}{4} & \frac{169}{160} & \frac{7}{200} & \frac{17}{160} & \frac{1}{4} \\ 4 & \frac{49}{16} & \frac{9}{4} & \frac{25}{16} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.06250 & 0.2500 & 0.5625 & 1.000 \\ 0.2500 & -0.04375 & -0.1650 & 0.006250 & 0.2500 \\ 1.000 & 0.2400 & -0.2000 & -0.1600 & 0 \\ 2.250 & 1.056 & 0.03500 & 0.1062 & 0.2500 \\ 4.000 & 3.062 & 2.250 & 1.562 & 1.000 \end{pmatrix},$$

$U_J^{(2)} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{9}{16} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{143}{4000} & -\frac{11}{100} & -\frac{103}{4000} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{257}{800} & -\frac{81}{1000} & -\frac{27}{160} & 0 \\ \frac{9}{4} & \frac{4577}{4000} & \frac{57}{100} & \frac{617}{4000} & \frac{1}{4} \\ 4 & \frac{49}{16} & \frac{9}{4} & \frac{25}{16} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.06250 & 0.2500 & 0.5625 & 1.000 \\ 0.2500 & -0.03575 & -0.1100 & -0.02575 & 0.2500 \\ 1.000 & 0.3212 & -0.08100 & -0.1687 & 0 \\ 2.250 & 1.144 & 0.5700 & 0.1542 & 0.2500 \\ 4.000 & 3.062 & 2.250 & 1.562 & 1.000 \end{pmatrix},$$

z Gauss–Seidelovo metodo pa

$U_{GS}^{(1)} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{9}{16} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{160} & -\frac{57}{400} & -\frac{43}{4000} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{393}{1600} & -\frac{33}{500} & -\frac{5499}{40000} & 0 \\ \frac{9}{4} & \frac{17453}{16000} & \frac{20589}{40000} & \frac{139357}{400000} & \frac{1}{4} \\ 4 & \frac{49}{16} & \frac{9}{4} & \frac{25}{16} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.06250 & 0.2500 & 0.5625 & 1.000 \\ 0.2500 & -0.04375 & -0.1425 & -0.01075 & 0.2500 \\ 1.000 & 0.2456 & -0.06600 & -0.1375 & 0 \\ 2.250 & 1.091 & 0.5147 & 0.3484 & 0.2500 \\ 4.000 & 3.062 & 2.250 & 1.562 & 1.000 \end{pmatrix},$$

$U_{GS}^{(2)} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{9}{16} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{419}{16000} & -\frac{771}{8000} & \frac{1581}{400000} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{6081}{16000} & \frac{3887}{100000} & -\frac{19687}{400000} & 0 \\ \frac{9}{4} & \frac{1080117}{800000} & \frac{323321}{400000} & \frac{1898597}{4000000} & \frac{1}{4} \\ 4 & \frac{49}{16} & \frac{9}{4} & \frac{25}{16} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.06250 & 0.2500 & 0.5625 & 1.000 \\ 0.2500 & -0.02619 & -0.09638 & 0.003953 & 0.2500 \\ 1.000 & 0.3801 & 0.03887 & -0.04922 & 0 \\ 2.250 & 1.350 & 0.8083 & 0.4746 & 0.2500 \\ 4.000 & 3.062 & 2.250 & 1.562 & 1.000 \end{pmatrix}.$$

Če izberemo toleranco 10^{-8}, potrebujemo z Jacobijevo metodo 47 korakov, da pridemo do rešitve

$U_J^{(47)} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.062500000000 & 0.25000000000 & 0.56250000000 & 1.0000000000 \\ 0.25000000000 & 0.062499969826 & -0.00000004992 & 0.062499969826 & 0.25000000000 \\ 1.0000000000 & 0.56249995008 & 0.24999993965 & 0.062499950081 & 0 \\ 2.2500000000 & 1.5624999698 & 0.99999995008 & 0.56249996982 & 0.25000000000 \\ 4.0000000000 & 3.0625000000 & 2.2500000000 & 1.5625000000 & 1.0000000000 \end{pmatrix},$$

ki se od točne rešitve U razlikuje relativno za

$$\frac{\|U_J^{(47)} - U\|}{\|U\|} = 1.97 \cdot 10^{-8},$$

Gauss–Seidelova metoda pa potrebuje 25 korakov,

$$U_{GS}^{(25)} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0.062500000000 & 0.25000000000 & 0.56250000000 & 1.0000000000 \\ 0.25000000000 & 0.062499971270 & -0.00000002873 & 0.062499985635 & 0.25000000000 \\ 1.0000000000 & 0.56249997127 & 0.24999997127 & 0.062499985634 & 0 \\ 2.2500000000 & 1.5624999856 & 0.99999998563 & 0.56249999282 & 0.25000000000 \\ 4.0000000000 & 3.0625000000 & 2.2500000000 & 1.5625000000 & 1.0000000000 \end{pmatrix},$$

in velja

$$\frac{\|U_{GS}^{(25)} - U\|}{\|U\|} = 9.73 \cdot 10^{-9}.$$

Optimalen ω^* za SOR iteracijsko metodo dobimo po formuli

$$\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2 (R_J)}}.$$

Izračunajmo najprej spektralni polmer za Jacobijevo iteracijsko matriko:

$$\begin{aligned} \rho (R_J) &= 1 - \lambda_{1,1} = 1 - 4\theta_x \sin^2 \left(\frac{\pi}{2n}\right) - 4\theta_y \sin^2 \left(\frac{\pi}{2m}\right) = \\ &= 1 - 4\frac{2}{5} \sin^2 \left(\frac{\pi}{8}\right) - 4\frac{1}{10} \sin^2 \left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - 2\sin^2 \left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\omega^* = \frac{4}{2 + \sqrt{2}}.$$

Z istim začetnim približkom $U^{(0)}$ kot pri prejšnjih dveh metodah dobimo po SOR metodi z ω^* naslednja dva približka:

$$U_{\omega^*}^{(1)} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{9}{16} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{80}\left(10-9\sqrt{2}\right) & \frac{1}{100}\left(18-23\sqrt{2}\right) & \frac{2282-1609\sqrt{2}}{2000} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{200}\left(279-154\sqrt{2}\right) & \frac{1}{125}\left(416-297\sqrt{2}\right) & \frac{48823-34970\sqrt{2}}{5000} & 0 \\ \frac{9}{4} & \frac{10862-5839\sqrt{2}}{2000} & \frac{40706-27505\sqrt{2}}{2500} & \frac{2564174-1794607\sqrt{2}}{50000} & \frac{1}{4} \\ 4 & \frac{49}{16} & \frac{9}{4} & \frac{25}{16} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.06250 & 0.2500 & 0.5625 & 1.000 \\ 0.2500 & -0.03410 & -0.1453 & 0.003265 & 0.2500 \\ 1.000 & 0.3061 & -0.03217 & -0.1264 & 0 \\ 2.250 & 1.302 & 0.7232 & 0.5243 & 0.2500 \\ 4.000 & 3.062 & 2.250 & 1.562 & 1.000 \end{pmatrix},$$

$$U_{\omega^*}^{(2)} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{9}{16} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{500}\left(361-262\sqrt{2}\right) & -\frac{21}{250}\left(48\sqrt{2}-67\right) & \frac{196793-139014\sqrt{2}}{12500} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{3}{250}\left(381\sqrt{2}-575\right) & \frac{250367-176556\sqrt{2}}{6250} & \frac{607741-429655\sqrt{2}}{6250} & 0 \\ \frac{9}{4} & \frac{308723-205374\sqrt{2}}{12500} & \frac{876583-615568\sqrt{2}}{6250} & \frac{3\left(3158125-2225058\sqrt{2}\right)}{62500} & \frac{1}{4} \\ 4 & \frac{49}{16} & \frac{9}{4} & \frac{25}{16} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.06250 & 0.2500 & 0.5625 & 1.000 \\ 0.2500 & -0.01905 & -0.07411 & 0.01580 & 0.2500 \\ 1.000 & 0.4342 & 0.1087 & 0.01873 & 0 \\ 2.250 & 1.462 & 0.9661 & 0.5481 & 0.2500 \\ 4.000 & 3.062 & 2.250 & 1.562 & 1.000 \end{pmatrix}.$$

Glede na toleranco 10^{-8} potrebujemo z SOR metodo 13 korakov, da pridemo do rešitve

$$U_{\omega^*}^{(13)} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.062500000000 & 0.25000000000 & 0.56250000000 & 1.0000000000 \\ 0.25000000000 & 0.062499992993 & -0.00000000469 & 0.062499998549 & 0.25000000000 \\ 1.0000000000 & 0.56249999544 & 0.24999999712 & 0.062499999176 & 0 \\ 2.2500000000 & 1.5624999988 & 0.99999999922 & 0.56249999977 & 0.25000000000 \\ 4.0000000000 & 3.0625000000 & 2.2500000000 & 1.5625000000 & 1.0000000000 \end{pmatrix}$$

za katero velja

$$\frac{\|U_{\omega^*}^{(13)} - U\|}{\|U\|} = 1.54 \cdot 10^{-9}.$$

Spektralni polmeri vseh treh metod so enaki

$$\begin{aligned}\rho\left(R_J\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.70710678,\\ \rho\left(R_{GS}\right) &= \frac{1}{2},\\ \rho\left(R_{\omega^*}\right) &= \omega^* - 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 0.17157288,\end{aligned}$$

od koder sledi, da je hitrost konvergence

$$\begin{aligned}h_J &= -\log\rho\left(R_J\right) = -\log\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.15051500,\\ h_{GS} &= -\log\rho\left(R_{GS}\right) = 0.30103000,\\ h_{\omega^*} &= -\log\rho\left(R_{\omega^*}\right) = -\log\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 0.76555137.\end{aligned}$$

Od tod vidimo, da potrebujemo za 8 točnih decimalk pri Jacobijevi metodi približno $8/h_J = 53.150$ korakov, pri Gauss–Seidelovi približno $8/h_{GS} = 26.58$ korakov, pri SOR metodi pa približno $8/h_{\omega^*} = 10.45$ korakov. Numerični rezultati to potrjujejo.

Naloga 3.12. *Z diferenčno metodo rešujemo parcialno diferencialno enačbo*

$$-\triangle u + 2u = 0$$

na enotskem kvadratu $[0,1]\times[0,1]$ *s predpisanimi robnimi pogoji. Mrežo točk določimo s korakoma* $\delta x = \delta y = h$. *Izračunajte lastne vrednoti matrike sistema enačb, ki določa rešitev. Določite spektralni polmer Jacobijeve, Gauss–Seidelove in SOR iteracijske matrike. Kakšen je optimalen* ω^* *pri SOR metodi?*

Rešitev:
Iščemo približke $u_{i,j}$ za vrednost rešitve u v mrežnih točkah (x_i, y_j), kjer so

$$x_i = ih, \quad y_j = jh, \quad i,j = 0,1,\ldots,n = \frac{1}{h}.$$

Določajo jih enačbe

$$-\theta_x(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) - \theta_y(u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) + (1+2\delta^2)u_{i,j} = 0, \quad i,j = 1,2,\ldots,n-1,$$

pri čemer so

$$\theta_x = \theta_y = \frac{1}{4}, \quad \delta^2 = \frac{h^2}{4}.$$

Pripadajoča matrika je enaka

$$A = \widetilde{A} + 2\delta^2 I, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} B & C & & & \\ C & B & C & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & C & B & C \\ & & & C & B \end{pmatrix},$$

kjer sta

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_x & & & \\ -\theta_x & 1 & -\theta_x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\theta_x & 1 & -\theta_x \\ & & & -\theta_x & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\theta_y & & & & \\ & -\theta_y & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\theta_y \end{pmatrix}.
$$

Lastne vrednosti matrike $\widetilde{A}$ so

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}_{i,j} &= 4\theta_x \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{i}{n}\right) + 4\theta_y \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{j}{n}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{i}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{j}{n}\right) = \\
&= 1 - \frac{1}{2}\cos(i\pi h) - \frac{1}{2}\cos(j\pi h), \quad i,j = 1,\ldots,n-1.
\end{aligned}
$$

Iz

$$
\det(A - \lambda I) = \det\left(\widetilde{A} - (\lambda - 2\delta^2)I\right) = 0
$$

pa vidimo, da so lastne vrednosti matrike A enake

$$
\lambda_{i,j} = \widetilde{\lambda}_{i,j} + 2\delta^2 = \widetilde{\lambda}_{i,j} + \frac{h^2}{2}.
$$

Označimo $A = L + D + U$, kjer je $D = (1 + 2\delta^2)I$ diagonala, L in U pa označujeta spodnje in zgornje trikotni del matrike A. Dalje je $\widetilde{A} = L + I + U$. Izračunajmo lastne vrednosti $\mu_{i,j}$, $i,j = 1,2,\ldots,n-1$, Jacobijeve iteracijske matrike $R_J = -D^{-1}(L+U)$. Iz

$$
\begin{aligned}
\det(R_J - \mu I) = \det\left(-\frac{1}{1+2\delta^2}(L+U) - \mu I\right) &= 0 \\
\det\left(L + U + \mu(1+2\delta^2)I\right) &= 0 \\
\det\left(L + U + I - (1 - \mu(1+2\delta^2))I\right) &= 0
\end{aligned}
$$

vidimo, da velja enakost

$$
(1 - \mu_{i,j}(1+2\delta^2)) = \widetilde{\lambda}_{i,j}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n-1,
$$

oziroma

$$
\mu_{i,j} = \frac{1 - \widetilde{\lambda}_{i,j}}{1+2\delta^2} = \frac{2}{2+h^2}(1 - \widetilde{\lambda}_{i,j}), \quad i,j = 1,2,\ldots,n-1.
$$

Sledi, da je spektralni polmer

$$
\begin{aligned}
\rho(R_J) &= \frac{2}{2+h^2}\left(1 - \widetilde{\lambda}_{1,1}\right) = \frac{2}{2+h^2}\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}h\right)\right) = \\
&= \frac{2}{2+h^2}\cos(\pi h) = 1 - \frac{1}{2}\left(1+\pi^2\right)h^2 + \mathcal{O}\left(h^4\right).
\end{aligned}
$$

Poglejmo si sedaj lastne vrednosti Gauss–Seidelove iteracijske matrike

$$R_{GS} = -(L + D)^{-1}U.$$

Karakteristični polinom se poenostavi v

$$\begin{aligned}\det(R_{GS} - \eta I) &= \det\left(-(L + D)^{-1}U - \eta I\right) = \\ &= \det\left(-(L + D)^{-1}\right)\det(U + \eta(L + D)) = \\ &= \det\left(-(L + D)^{-1}\right)\det\left(U + \eta L + \eta(1 + 2\delta^2)I\right) = \\ &= \sqrt{\eta}\det\left(-(L + D)^{-1}\right)\det\left(\sqrt{\eta}(1 + 2\delta^2)I + \frac{1}{\sqrt{\eta}}U + \sqrt{\eta}L\right).\end{aligned}$$

Ker je matrika A konsistentno urejena, velja enakost

$$\det\left(\sqrt{\eta}(1 + 2\delta^2)I + \frac{1}{\sqrt{\eta}}U + \sqrt{\eta}L\right) = \det\left(\sqrt{\eta}(1 + 2\delta^2)I + U + L\right).$$

Od tod sledi, da so neničelne lastne vrednosti $\eta_{i,j}$ matrike R_{GS} določene s pogojem

$$1 - \sqrt{\eta_{i,j}}(1 + 2\delta^2) = \widetilde{\lambda}_{i,j} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{\eta_{i,j}} = \frac{2}{2 + h^2}(1 - \widetilde{\lambda}_{i,j}).$$

Spektralni polmer je enak

$$\begin{aligned}\rho(R_{GS}) &= \left(\frac{2}{2 + h^2}\left(1 - \widetilde{\lambda}_{1,1}\right)\right)^2 = \\ &= \frac{4}{(2 + h^2)^2}\cos^2(\pi h) = 1 - \left(1 + \pi^2\right)h^2 + \mathcal{O}\left(h^4\right).\end{aligned}$$

Iz razvojev izrazov

$$\begin{aligned}-\log\rho(R_J) &= \frac{(1 + \pi^2)h^2}{2\ln 10} + \mathcal{O}\left(h^2\right), \\ -\log\rho(R_{GS}) &= \frac{(1 + \pi^2)h^2}{\ln 10} + \mathcal{O}\left(h^2\right)\end{aligned}$$

vidimo, da Gauss–Seidelova metoda konvergira dvakrat hitreje kot Jacobijeva metoda.

Optimalen parameter za SOR metodo se glasi

$$\begin{aligned}\omega^* &= \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(R_J)}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{4\cos^2(\pi h)}{(2+h^2)^2}}} = \\ &= \frac{4 + 2h^2}{2 + h^2 + \sqrt{4h^2 + h^4 + 4\sin^2(\pi h)}} = 2 - 2\sqrt{1 + \pi^2}h + 2(1 + \pi^2)h^2 + \mathcal{O}\left(h^3\right),\end{aligned}$$

spektralni polmer pa je enak

$$\rho(R^*_\omega) = \omega^* - 1 = 1 - 2\sqrt{1 + \pi^2}h + \mathcal{O}\left(h^2\right).$$

Metoda SOR konvergira pri izbiri ω^* za cel red hitreje od prejšnjih dveh metod, saj je

$$-\log \rho\left(R_{\omega^*}\right) = \frac{2\sqrt{1+\pi^2}}{\ln 10} h + \mathcal{O}\left(h^2\right).$$

Naloga 3.13. *Linearen sistem $Ax = b$ rešujemo z Gauss–Seidelovo iterativno metodo. Naj bo $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ zaporedje približkov in naj bo*

$$d^{(m)} = x^{(m)} - x^{(m-1)}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Dokažite, da pri velikih $m \gg 1$ za spektralni polmer velja

$$\rho\left(R_{GS}\right) \approx \frac{\|d^{(m)}\|}{\|d^{(m-1)}\|},$$

Rešitev:
Iz začetnega približka $x^{(0)}$ računamo po Gauss–Seidelovi metodi nove približke po pravilu

$$x^{(m)} = R_{GS} x^{(m-1)} + (L+D)^{-1} b, \quad R_{GS} = -(L+D)^{-1} U,$$

kjer je $A = L + D + U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, L označuje strogo spodnje trikotni del matrike, U strogo zgornje trikotni del, D pa diagonalo. Če dva zaporedna približka odštejemo, dobimo

$$d^{(m)} = R_{GS} d^{(m-1)},$$

kar pa ni nič drugega kot 'nenormirana' potenčna metoda. Predpostavimo, da ima R_{GS} n linearno neodvisnih lastnih vektorjev v_i, ki ustrezajo lastnim vrednostim λ_i, za katere velja

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq 0.$$

Tedaj lahko začetni $d^{(0)}$ razvijemo pa bazi lastnih vektorjev

$$d^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Dalje je

$$d^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R_{GS} v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i$$

in podobno

$$d^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^m v_i = \lambda_1^m \left(\alpha_1 v_1 + \sum_{2=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m v_i \right).$$

Od tod pa sledi

$$\frac{\|d^{(m)}\|}{\|d^{(m-1)}\|} = \frac{\left\| \lambda_1^m \left(\alpha_1 v_1 + \sum_{2=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m v_i \right) \right\|}{\left\| \lambda_1^{m-1} \left(\alpha_1 v_1 + \sum_{2=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{m-1} v_i \right) \right\|} \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} |\lambda_1| = \rho\left(R_{GS}\right).$$

Naloga 3.14. *Z diferenčno metodo rešujemo problem* $-\triangle u = f$ *na pravokotniku* $[a,b]\times[c,d]$ *z danimi robnimi pogoji. Zapišite matriko linearnega sistema, ki določa numerično rešitev, z uporabo Kronecherjevih produktov.*

Rešitev:
Interval $[a,b]$ razdelimo na n delov s točkami

$$x_i = a + i\ \delta x, \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad \delta x = \frac{b-a}{n},$$

interval $[c,d]$ pa na m delov s točkami

$$y_j = c + j\ \delta y, \quad j = 0,1,\ldots,m, \quad \delta y = \frac{d-c}{m}.$$

Matrika sistema, ki določa približke

$$u_{i,j} \approx u(x_i,y_j), \quad i = 1,2,\ldots,n-1,\ j = 1,2,\ldots,m-1,$$

je oblike

$$A = \begin{pmatrix} B & C & & & \\ C & B & C & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & C & B & C \\ & & & C & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad N = (n-1)(m-1),$$

kjer sta

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_x & & & \\ -\theta_x & 1 & -\theta_x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\theta_x & 1 & -\theta_x \\ & & & -\theta_x & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\theta_y & & & & \\ & -\theta_y & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\theta_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},$$

in

$$\theta_x = \frac{\delta y^2}{2(\delta x^2 + \delta y^2)}, \quad \theta_y = \frac{\delta x^2}{2(\delta x^2 + \delta y^2)}.$$

Spomnimo se, da je za $U \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $V \in \mathbb{R}^{r\times s}$ Kronecherjev produkt definiran kot

$$U \otimes V = \begin{pmatrix} u_{1,1}V & u_{1,2}V & u_{1,3}V & \ldots & u_{1,q}V \\ u_{2,1}V & u_{2,2}V & u_{2,3}V & \ldots & u_{2,q}V \\ u_{3,1}V & u_{3,2}V & u_{3,3}V & \ldots & u_{3,q}V \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{p,1}V & u_{p,2}V & u_{p,3}V & \ldots & u_{p,q}V \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(pr)\times(qs)}.$$

Če označimo

$$J_k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k},$$

potem je

$$A = I_N - \theta_x I_{m-1} \otimes J_{n-1} - \theta_y J_{m-1} \otimes I_{n-1}.$$

Naloga 3.15. *Problem iz naloge 3.7 rešujemo z diferenčno metodo s korakoma $\delta x = \frac{1}{4}$, $\delta y = \frac{1}{2}$. Za reševanje pripadajočega linearnega sistema uporabimo ADI iterativno metodo. Določite optimalen parameter ω ter izračunajte prvi približek k rešitvi, pri čemer naj bo začetni približek enak desni strani linearnega sistema. Določite tudi optimalne parametre $(\omega_i)_{i=1}^M$, če hkrati izvedemo $M = 2$ ali $M = 4$ korake.*

Rešitev:
Pri danih korakih delitve $\delta x = \frac{1}{4}$, $\delta y = \frac{1}{2}$ imamo 9 neznanih vrednosti $u_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3$, ki jih določajo enačbe

$$-\theta_x \left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\right) - \theta y \left(u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right) + u_{i,j} = -4\delta^2, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

kjer so

$$\theta_x = \frac{2}{5}, \quad \theta_y = \frac{1}{10}, \quad \delta^2 = \frac{1}{40}.$$

Linearen sistem, ki določa rešitev, je enak $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$ za

$$A = I - H - V \in \mathbb{R}^{9\times 9}, \quad H = \theta_x I_3 \otimes J_3, \quad V = \theta_y J_3 \otimes I_3,$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = (0.00625, -0.075, 0.05625, 0.3, -0.1, -0.1, 1.10625, 0.125, 0.15625)^T.$$

Pri ADI iterativni metodi izračunamo iz približka $\boldsymbol{u}^{(k)}$ nov približek $\boldsymbol{u}^{(k+1)}$ z rešitvijo dveh linearnih sistemov

$$\left((\omega + 2\theta_x) I - H\right) \boldsymbol{u}^{(k+\frac{1}{2})} = \left((\omega - 2\theta_y) I - V\right) \boldsymbol{u}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$
$$\left((\omega + 2\theta_y) I - V\right) \boldsymbol{u}^{(k+1)} = \left((\omega - 2\theta_x) I - H\right) \boldsymbol{u}^{(k+\frac{1}{2})} + \boldsymbol{b}.$$

Oba rešimo z Gaussovo eliminacijo brez pivotiranja v linearni časovni zahtevnosti, saj sta pripadajoči matriki diagonalno dominantni. Optimalen parameter ω je enak

$$\omega = \sqrt{\alpha\beta}, \quad \alpha = \min(\xi_1, \mu_1), \quad \beta = \max(\xi_3, \mu_3),$$

kjer so

$$\xi_i = 4\theta_x \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{i}{4}\right), \quad \mu_j = 4\theta_y \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{j}{4}\right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Natančneje

$$\xi_1 = \frac{8}{5}\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{4}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \mu_1 = \frac{2}{5}\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \implies \alpha = \mu_1,$$
$$\xi_3 = \frac{8}{5}\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{4}{5}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \mu_3 = \frac{2}{5}\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \implies \beta = \xi_3$$

in

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Z prvem koraku dobimo iz $\boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{u}^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 0.006355133041153 \\ -0.074715393631368 \\ 0.019415326789340 \\ 0.414778492229338 \\ 0.032592634648409 \\ -0.068336071837241 \\ 1.433172281041513 \\ 0.810013523928455 \\ 0.446232474789700 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.054812495849648 \\ -0.001805760201641 \\ 0.035414433331519 \\ 0.533885749915207 \\ 0.251803076071742 \\ 0.007765362418832 \\ 1.537702601614681 \\ 1.000404066513349 \\ 0.518304539096551 \end{pmatrix}.$$

Pri predpisani toleranci 10^{-8} potrebujemo 21 korakov, da pridemo do rešitve

$$\boldsymbol{u}^{(21)} = \begin{pmatrix} 0.062499999303447 \\ 0.000000000986216 \\ 0.062499999301833 \\ 0.562499999014925 \\ 0.250000001394720 \\ 0.062499999012643 \\ 1.562499999303447 \\ 1.000000000986216 \\ 0.562499999301833 \end{pmatrix},$$

ki se od točne rešitve linearnega sistema

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0.062500000000000 \\ -0.000000000000000 \\ 0.062500000000000 \\ 0.562500000000000 \\ 0.250000000000000 \\ 0.062500000000000 \\ 1.562500000000000 \\ 1.000000000000000 \\ 0.562500000000000 \end{pmatrix}$$

razlikuje relativno za

$$\frac{\|\boldsymbol{u}^{(21)} - \boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} = 2.79 \cdot 10^{-9}.$$

Optimalne parametre $(\omega_j)_{j=1}^{M}$ dobimo iz

$$\alpha_j = \alpha \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{j/M}, \quad j = 0, 1, \ldots, M,$$

z

$$\omega_j = \sqrt{\alpha_{j-1}\alpha_j} = \alpha^{\frac{2(M-j)+1}{2M}} \beta^{\frac{2j-1}{2M}}.$$

Pri $M = 2$ dobimo

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{3/4} \left(\frac{4}{5}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{1/4} = 0.128718850581117,$$
$$\omega_2 = \left(\frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{1/4} \left(\frac{4}{5}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{3/4} = 0.621509589612015,$$

pri $M = 4$ pa

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{7/8} \left(\frac{4}{5}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{1/8} = 0.086834185052514,$$
$$\omega_2 = \left(\frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{5/8} \left(\frac{4}{5}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{3/8} = 0.190806679246242,$$
$$\omega_3 = \left(\frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{3/8} \left(\frac{4}{5}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{5/8} = 0.419272534462788,$$
$$\omega_4 = \left(\frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{1/8} \left(\frac{4}{5}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{7/8} = 0.921296145655300.$$

Poglavje 4

Metoda končnih elementov

Naloga 4.1. *Robni problem*

$$\mathcal{L}u = f, \quad \mathcal{L}u := -\left(pu'\right)' + qu = f, \quad u(a) = C_0, \quad u(b) = C_1,$$

kjer sta p in q funkciji, za kateri velja

$$p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad x \in [a, b],$$

rešujemo z Rayleigh–Ritzovo metodo končnih elementov. Prevedite problem v šibko obliko ter zapišite linearen sistem enačb, ki določa aproksimacijsko rešitev v prostoru odsekoma linearnih funkcij s stičnimi točkami $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n$.

Rešitev:
Definirajmo skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad f, g \in \mathcal{L}^2([a, b]),$$

in prostore Soboljeva

$$\begin{aligned} H^1([a,b]) &:= \left\{f : f \in \mathcal{C}([a,b]), f' \in \mathcal{L}^2([a,b]), f(a) = C_0, f(b) = C_1\right\}, \\ H_0^1([a,b]) &:= \left\{f : f \in \mathcal{C}([a,b]), f' \in \mathcal{L}^2([a,b]), f(a) = 0, f(b) = 0\right\}. \end{aligned}$$

Rešitev problema v šibki obliki je taka funkcija $u \in H^1([a, b])$, za katero velja

$$\langle \mathcal{L}u - f, v\rangle = 0, \quad \text{za vse} \quad v \in H_0^1([a, b]). \tag{4.1}$$

Z uporabo integracije per partes dobimo

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathcal{L}u(x)v(x)\ dx &= -\int_a^b \left(p(x)u'(x)\right)' v(x)\ dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)\ dx = \\ &= -p(x)u'(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b p(x)u'(x)v'(x)\ dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)\ dx = \\ &= \int_a^b p(x)u'(x)v'(x)\ dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)\ dx, \end{aligned}$$

saj je $v(a) = v(b) = 0$. Enakost v šibki obliki (4.1) se torej poenostavi v

$$\int_a^b p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)\ dx = \int_a^b f(x)v(x)\ dx. \tag{4.2}$$

Pri metodi končnih elementov iščemo aproksimacijo k rešitvi u v podprostoru

$$S \cup \{\varphi_0\}, \quad S = \mathrm{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\},$$

kjer so $\varphi_i \in H_0^1([a,b])$ za $i = 1, 2, \ldots, n$, funkcijo $\varphi_0 \in H^1([a,b])$ pa izberemo tako, da zadostimo robnim pogojem. Testne funkcije izbiramo iz podprostora S. Natančneje, iščemo

$$u = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i,$$

da bo enakost (4.2) veljala za vse $v \in S$. Neznani koeficienti $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^n$ so določeni z rešitvijo matričnega sistema enačb $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$, kjer sta $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^n$,

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= \int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\ dx,\\
b_i &= \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\ dx - \int_a^b p(x)\varphi_0'(x)\varphi_i'(x) + q(x)\varphi_0(x)\varphi_i(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Pri Rayleigh–Ritzovi metodi za podprostor izberemo prostor odsekoma linearnih funkcij

$$S_{1,\boldsymbol{x}} = \left\{f : f|_{[x_i,x_{i+1})} \in \mathbb{P}_1\right\} \cap \mathcal{C}([a,b]),$$

ki ima bazo $(H_i)_{i=0}^{n+1}$,

$$H_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{4.3}$$

$$H_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \qquad H_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Tedaj je $\varphi_0 = C_0 H_0 + C_1 H_{n+1}$ ter $S = \mathrm{Lin}\{H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}\}$. Ker je $\mathrm{supp} H_i \subseteq [x_{i-1}, x_{i+1}]$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$, je matrika A tridiagonalna, to je $a_{i,j} = 0$ za vse $|i-j| > 1$. Pri računanju njenih elementov si pomagamo s t.i. *elementom togostne matrike*

$$K^i := \begin{pmatrix} K_{1,1}^i & K_{1,2}^i \\ K_{2,1}^i & K_{2,2}^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

kjer so

$$\begin{aligned}
K_{1,1}^i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)H_{i-1}'^2(x) + q(x)H_{i-1}^2(x)\ dx,\\
K_{1,2}^i = K_{2,1}^i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)H_{i-1}'(x)H_i'(x) + q(x)H_{i-1}(x)H_i(x)\ dx,\\
K_{2,2}^i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)H_i'^2(x) + q(x)H_i^2(x)\ dx.
\end{aligned}$$

In sicer velja

$$
\begin{aligned}
a_{i,i} &= \int_a^b p(x)H_i'^2(x) + q(x)H_i^2(x)\ dx = \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)H_i'^2(x) + q(x)H_i^2(x)\ dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)H_i'^2(x) + q(x)H_i^2(x)\ dx = \\
&= K_{2,2}^i + K_{1,1}^{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\
a_{i,i-1} &= a_{i-1,i} = \int_a^b p(x)H_{i-1}'(x)H_i'(x) + q(x)H_{i-1}(x)H_i(x)\ dx = \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)H_{i-1}'(x)H_i'(x) + q(x)H_{i-1}(x)H_i(x)\ dx = \\
&= K_{1,2}^i, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1.
\end{aligned}
$$

Podobno definiramo *element 'load' vektorja*

$$
f^i := \begin{pmatrix} f_1^i \\ f_2^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,
$$

kjer sta

$$
f_1^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)H_{i-1}(x)\ dx, \quad f_2^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)H_i(x)\ dx,
$$

s pomočjo katerega izračunamo

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \int_a^b f(x)H_1(x)\ dx - C_0 \int_a^b p(x)H_0'(x)H_1'(x) + q(x)H_0(x)H_1(x)\ dx = \\
&= \int_{x_0}^{x_1} f(x)H_1(x)\ dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)H_1(x)\ dx + \\
&- C_0 \int_{x_0}^{x_1} p(x)H_0'(x)H_1'(x) + q(x)H_0(x)H_1(x)\ dx = \\
&= f_2^1 + f_1^2 - C_0K_{1,2}^1, \\
b_i &= \int_a^b f(x)H_i(x)\ dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)H_i(x)\ dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)H_i(x)\ dx = \\
&= f_2^i + f_1^{i+1}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1, \\
b_{n-1} &= \int_a^b f(x)H_{n-1}(x)\ dx - C_1 \int_a^b p(x)H_{n-1}'(x)H_n'(x) + q(x)H_{n-1}(x)H_n(x)\ dx = \\
&= \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x)H_{n-1}(x)\ dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)H_{n-1}(x)\ dx + \\
&- C_1 \int_{x_{n-1}}^{x_n} p(x)H_{n-1}'(x)H_n'(x) + q(x)H_{n-1}(x)H_n(x)\ dx = \\
&= f_2^{n-1} + f_1^n - C_1K_{1,2}^n.
\end{aligned}
$$

Naloga 4.2. *Robni problem*

$$-u''(x) + u(x) = 1, \quad u(0) = 2, \quad u(1) = -3$$

rešujemo z Rayleigh–Ritzovo metodo končnih elementov. Interval $[0, 1]$ *razdelite na* 5 *delov ter zapišite matrični sistem enačb, ki določa rešitev.*

Rešitev:
Približek v rešitvi iščemo v podprostoru $S_{1,\boldsymbol{x}}$ za $\boldsymbol{x} = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$ in je oblike

$$u = 2H_0 - 3H_5 + \sum_{i=1}^{4} \alpha_i H_i,$$

kjer so H_i definirani z (4.3). Izračunamo

$$K_{1,1}^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_{i-1}'^2(x) + H_{i-1}^2(x)\ dx = \frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{3}\Delta x_{i-1} = \frac{76}{15},$$

$$K_{1,2}^i = K_{2,1}^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_{i-1}'(x) H_i'(x) + H_{i-1}(x) H_i(x)\ dx = -\frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{6}\Delta x_{i-1} = -\frac{149}{30},$$

$$K_{2,2}^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_i'^2(x) + H_i^2(x)\ dx = \frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{3}\Delta x_{i-1} = \frac{76}{15}.$$

in dobimo

$$K^i = \begin{pmatrix} \frac{76}{15} & -\frac{149}{30} \\ -\frac{149}{30} & \frac{76}{15} \end{pmatrix}.$$

Podobno izračunamo

$$f^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Matrični sistem $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, ki določa rešitev, sestavljata

$$A = \begin{pmatrix} \frac{76}{15} + \frac{76}{15} & -\frac{149}{30} & 0 & 0 \\ -\frac{149}{30} & \frac{76}{15} + \frac{76}{15} & -\frac{149}{30} & 0 \\ 0 & -\frac{149}{30} & \frac{76}{15} + \frac{76}{15} & -\frac{149}{30} \\ 0 & 0 & -\frac{149}{30} & \frac{76}{15} + \frac{76}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{152}{15} & -\frac{149}{30} & 0 & 0 \\ -\frac{149}{30} & \frac{152}{15} & -\frac{149}{30} & 0 \\ 0 & -\frac{149}{30} & \frac{152}{15} & -\frac{149}{30} \\ 0 & 0 & -\frac{149}{30} & \frac{152}{15} \end{pmatrix}$$

ter

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot \left(-\frac{149}{30}\right) \\ 0 \\ 0 \\ -(-3) \cdot \left(-\frac{149}{30}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{152}{15} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ -\frac{147}{10} \end{pmatrix}.$$

Naloga 4.3. *Naj bo trikoten element $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ določen z vozlišči $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, za*

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \quad (x_2, y_2) = (1, 0), \quad (x_3, y_3) = (0, 2).$$

Določite linearne funkcije φ_1, φ_2, φ_3, ki tvorijo dualno bazo k funkcionalom

$$\lambda_i : \mathcal{C}(\mathcal{T}) \to \mathbb{R}, \quad \lambda_i f = f(x_i, y_i).$$

Za $f(x, y) = (2 + x + y)^2$ določite interpolacijski polinom stopnje 1, ki se z f ujema v ogljiščih trikotnika $\mathcal{T}$.

Rešitev:
Za dualno bazo mora veljati

$$\lambda_i \varphi_j = \delta_{i,j}.$$

Funkcijo $\varphi_1(x, y) = a_1 + b_1 x + c_1 y$ določajo pogoji

$$\varphi_1(0, 0) = 1, \quad \varphi_1(1, 0) = 0, \quad \varphi_1(0, 2) = 0.$$

V matrični obliki se glase

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rešimo sistem in dobimo

$$\varphi_1(x, y) = 1 - x - \frac{1}{2} y.$$

Podobno sta $\varphi_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$, $i = 2, 3$, določeni z enačbami

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in sta enaki

$$\varphi_2(x, y) = x, \quad \varphi_3(x, y) = \frac{1}{2} y.$$

Interpolacijski polinom p za dan f izrazimo v dualni bazi in dobimo

$$\begin{aligned} p(x, y) &= f(0, 0)\varphi_1(x, y) + f(1, 0)\varphi_2(x, y) + f(0, 2)\varphi_3(x, y) = \\ &= 4\left(1 - x - \frac{1}{2} y\right) + 9x + 16\left(\frac{1}{2} y\right). \end{aligned}$$

Naloga 4.4. *Na območju Ω rešujemo problem*

$$\mathcal{L}u = f, \quad \mathcal{L}u := -\frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q \frac{\partial u}{\partial y}\right) + ru, \quad u\big|_{\partial\Omega} = g,$$

kjer so p, q in r funkcije, za katere velja

$$p(x, y) > 0, \quad q(x, y) > 0, \quad r(x, y) \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

Za reševanje uporabimo metodo končnih elementov. Prevedite problem v šibko obliko ter zapišite linearen sistem enačb, ki določa aproksimacijsko rešitev v ustreznem podprostoru

$$S = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}.$$

Rešitev:
Definirajmo skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle := \iint_\Omega fg\ dV = \iint_\Omega f(x,y)g(x,y)\ dxdy, \quad f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega),$$

in prostore Soboljeva

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &:= \left\{ f : f \in \mathcal{C}(\Omega), f_x, f_y \in \mathcal{L}^2(\Omega), f\big|_{\partial\Omega} = g, \right\}, \\ H_0^1(\Omega) &:= \left\{ f : f \in \mathcal{C}(\Omega), f_x, f_y \in \mathcal{L}^2(\Omega), f\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Rešitev problema v šibki obliki je taka funkcija $u \in H^1(\Omega)$, za katero velja

$$\langle \mathcal{L}u - f, v\rangle = 0, \quad \text{za vse} \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.4}$$

Skalarni produkt bomo poenostavili z uporabo *divergenčnega izreka* (posplošitev metode *per partes* v več dimenzij), ki se glasi

$$\iint_\Omega \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}}\ dV = \int_{\partial\Omega} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\ ds,$$

kjer je $\vec{\boldsymbol{F}}$ vektorsko polje, integral na desni strani pa je krivuljni integral vektorskega polja $\vec{\boldsymbol{F}}$ po robu območja Ω, ki je pozitivno orientiran. Divergenčni izrek (v dveh dimenzijah) je na drug način zapisana Greenova formula. In sicer je Greenova formula oblike

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} Xdx + Ydy,$$

za zvezno odvedljivi funkciji X in Y na Ω ter pozitivno orientiran rob območja Ω. Z izbiro $\vec{\boldsymbol{F}} = (Y, -X)$ dobimo ravno divergenčni izrek. Enakost na levi strani je očitna, na desni pa tudi velja, saj je $(dy, -dx) = \vec{\boldsymbol{n}}ds$. Opazimo, da je

$$\mathcal{L}u = -\mathrm{div}\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \mathrm{grad}\ u\right) + ru.$$

Če izberemo

$$\vec{\boldsymbol{F}} = v\vec{\boldsymbol{S}}, \quad \vec{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \mathrm{grad}\ u$$

in upoštevamo formulo

$$\mathrm{div}\left(v\vec{\boldsymbol{S}}\right) = v\ \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{S}} + \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \mathrm{grad}\ v$$

dobimo

$$\iint_\Omega \mathrm{div}\left(v\vec{\boldsymbol{S}}\right)\ dV = \iint_\Omega v\ \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{S}}\ dV + \iint_\Omega \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \mathrm{grad}\ v\ dV = \int_{\partial\Omega} v\vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\ ds.$$

Tedaj je

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}u, v\rangle &= \iint_\Omega \mathcal{L}u\ v\ dV = -\iint_\Omega v \operatorname{div}\left(\begin{pmatrix} p & 0\\ 0 & q\end{pmatrix} \operatorname{grad} u\right)\ dV + \iint_\Omega ruv\ dV = \\
&= \iint_\Omega \begin{pmatrix} p & 0\\ 0 & q\end{pmatrix} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\ dV + \iint_\Omega ruv\ dV - \int_{\partial\Omega} v \begin{pmatrix} p & 0\\ 0 & q\end{pmatrix} \operatorname{grad} u \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\ ds = \\
&= \iint_\Omega \begin{pmatrix} p & 0\\ 0 & q\end{pmatrix} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + ruv\ dV,
\end{aligned}$$

saj so testne funkcije v na robu enake nič. Enakost v šibki obliki (4.1) se torej poenostavi v

$$\begin{aligned}
&\iint_\Omega p(x,y)u_x(x,y)v_x(x,y) + q(x,y)u_y(x,y)v_y(x,y) + r(x,y)u(x,y)v(x,y)\ dxdy = \\
&= \iint_\Omega f(x,y)v(x,y)dxdy.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Pri metodi končnih elementov iščemo apoksimacijo k rešitvi u v podprostoru

$$S \cup \{\varphi_0\}, \quad S = \operatorname{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\},$$

kjer so $\varphi_i \in H_0^1(\Omega)$ za $i = 1, 2, \ldots, n$, funkcijo $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ pa izberemo tako, da zadostimo robnim pogojem. Testne funkcije izbiramo iz podprostora S. Natančneje, iščemo

$$u = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i,$$

da bo enakost (4.5) veljala za vse $v \in S$. Neznani koeficienti $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^n$ so določeni z rešitvijo matričnega sistema enačb $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$, kjer sta $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^n$,

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= \iint_\Omega p\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + q\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} + r\varphi_i\varphi_j dV,\\
b_i &= \iint_\Omega f\ \varphi_i\ dV - \iint_\Omega p\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} + q\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\varphi_i + r\varphi_0\varphi_i\ dV.
\end{aligned}$$

Naloga 4.5. *Na območju* $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ *rešujemo problem*

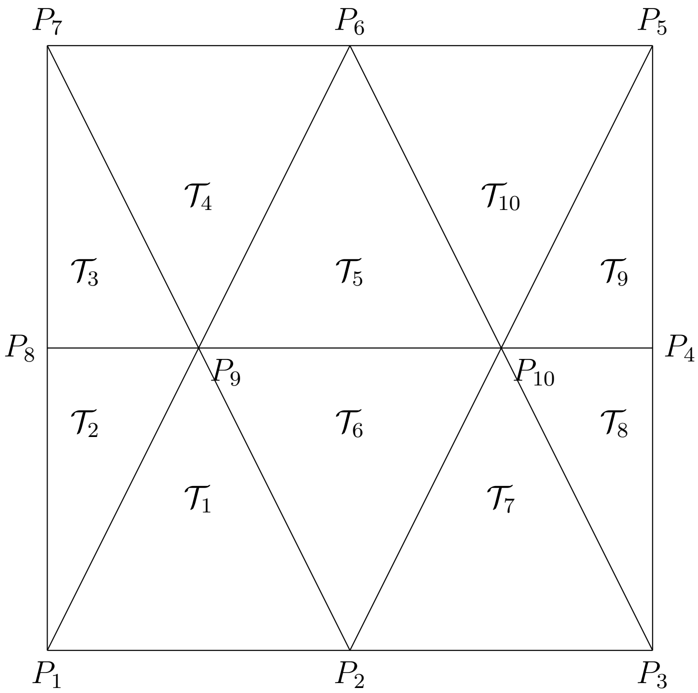
$$-\triangle u = 1, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

z metodo končnih elementov. Območje trianguliramo s premicami

$$y = \frac{1}{2}, \quad y = 2x, \quad y = 2 - 2x, \quad y = 2x - 1, \quad y = -2x + 1.$$

Približek k rešitvi iščemo v prostoru odsekoma linearnih funkcij nad dano triangulacijo. Zapišite bazne funkcije tega prostora, ki so na robu enake nič ter matrični sistem, ki določa aproksimacijsko rešitev.

Rešitev:
Triangulirano območje skupaj z oznakami trikotnikov in točk, ki jih določajo, vidimo na sledeči sliki:



Natančneje so

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad P_3 = (1,0), \quad P_4 = \left(1, \frac{1}{2}\right), \quad P_5 = (1,1),$$
$$P_6 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad P_7 = (0,1), \quad P_8 = \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad P_9 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad P_{10} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Označimo s $\mathbb{P}_n^2$ prostor polinomov dveh spremenljivk skupne stopnje $\leq n$. Dalje je

$$\mathbb{P}^2_{1,\mathcal{T}} = \mathrm{Lin}\left\{p : p\big|_{\mathcal{T}_i} \in \mathbb{P}_1^2, \mathcal{T}_i \in \mathcal{T}\right\} \cap \mathcal{C}(\mathcal{T})$$

prostor zveznih odsekoma linearnih funkcij na triangulacijo $\mathcal{T}$. Dimenzija tega prostora je enaka številu točk, ki sestavljajo triangulacijo, bazo pa tvorijo t.i. piramidne funkcije, ki imajo v eni točki triangulacije vrednost enako 1, v vseh ostalih točkah triangulacije pa so enake 0. Vidimo, da sta le dve taki, ki sta na robu enaki 0. Označimo ju s φ_1 in φ_2. Naj bo φ_1 tista, ki ima neničelno vrednost v točki $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, φ_2 pa tista, ki ima neničelno vrednost v točki $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Koeficienti funkcije φ_1 nad $\mathcal{T}_1$ so določeni z rešitvijo linearnega sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In sicer

$$\varphi_1(x,y) = a_1 + b_1 x + c_1 y = 2y, \quad (x,y) \in \mathcal{T}_1.$$

Podobno določimo keoficiente nad preostalimi trikotniki in dobimo

$$\varphi_1(x,y)=\begin{cases}2y, & (x,y)\in\mathcal{T}_1\\ 4x, & (x,y)\in\mathcal{T}_2\\ 4x, & (x,y)\in\mathcal{T}_3\\ 2-2y, & (x,y)\in\mathcal{T}_4\\ 2-2x-y, & (x,y)\in\mathcal{T}_5\\ 1-2x+y, & (x,y)\in\mathcal{T}_6\\ 0, & \text{sicer}\end{cases}$$

ter

$$\varphi_2(x,y)=\begin{cases}2x-y, & (x,y)\in\mathcal{T}_5\\ -1+2x+y, & (x,y)\in\mathcal{T}_6\\ 2y, & (x,y)\in\mathcal{T}_7\\ 4-4x, & (x,y)\in\mathcal{T}_8\\ 4-4x, & (x,y)\in\mathcal{T}_9\\ 2-2y, & (x,y)\in\mathcal{T}_{10}\\ 0, & \text{sicer}\end{cases}.$$

Izračunamo še parcialne odvode

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_1(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in\mathcal{T}_1\\ 4, & (x,y)\in\mathcal{T}_2\\ 4, & (x,y)\in\mathcal{T}_3\\ 0, & (x,y)\in\mathcal{T}_4\\ -2, & (x,y)\in\mathcal{T}_5\\ -2, & (x,y)\in\mathcal{T}_6\\ 0, & \text{sicer}\end{cases},\quad \frac{\partial}{\partial y}\varphi_1(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in\mathcal{T}_1\\ 0, & (x,y)\in\mathcal{T}_2\\ 0, & (x,y)\in\mathcal{T}_3\\ -2, & (x,y)\in\mathcal{T}_4\\ -1, & (x,y)\in\mathcal{T}_5\\ 1, & (x,y)\in\mathcal{T}_6\\ 0, & \text{sicer}\end{cases},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_2(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in\mathcal{T}_5\\ 2, & (x,y)\in\mathcal{T}_6\\ 0, & (x,y)\in\mathcal{T}_7\\ -4, & (x,y)\in\mathcal{T}_8\\ -4, & (x,y)\in\mathcal{T}_9\\ 0, & (x,y)\in\mathcal{T}_{10}\\ 0, & \text{sicer}\end{cases},\quad \frac{\partial}{\partial y}\varphi_2(x,y)=\begin{cases}-1, & (x,y)\in\mathcal{T}_5\\ 1, & (x,y)\in\mathcal{T}_6\\ 2, & (x,y)\in\mathcal{T}_7\\ 0, & (x,y)\in\mathcal{T}_8\\ 0, & (x,y)\in\mathcal{T}_9\\ -2, & (x,y)\in\mathcal{T}_{10}\\ 0, & \text{sicer}\end{cases}.$$

Iz šibke oblike PDE enačbe

$$\iint_\Omega u_x(x,y)v_x(x,y)+u_y(x,y)v_y(x,y)\;dxdy=\iint_\Omega v(x,y)dxdy$$

dobimo, da je aproksimacijska rešitev oblike

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(x, y) = \alpha_1 \varphi_1(x, y) + \alpha_2 \varphi_2(x, y),$$

kjer sta koeficienta α_1 in α_2 določena z enačbami

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

za

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y)\right)^2 \, dxdy, \\
a_{2,2} &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y)\right)^2 \, dxdy, \\
a_{1,2} &= a_{2,1} = \iint_\mathcal{D} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y)\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y)\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) \, dxdy, \\
b_1 &= \iint_\Omega \varphi_1(x, y) f(x, y) \, dxdy, \\
b_2 &= \iint_\Omega \varphi_2(x, y) f(x, y) \, dxdy, \quad f(x, y) = 1.
\end{aligned}$$

Pri računanju integralov nad trikotniki, si lahko pomagamo z *baricentričnimi koordinatami*. Poglejmo si jih podrobneje. Naj bo trikotnik $\mathcal{P}$ določen s točkami $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$. Vsako drugo točko $P = (x, y)$ v trikotniku lahko zapišemo kot kombinacijo

$$P = uP_1 + vP_2 + wP_3, \quad w = 1 - u - v,$$

oziroma

$$\begin{aligned}
x &= ux_1 + vx_2 + wx_3 = x_3 + u(x_1 - x_3) + v(x_2 - x_3), \\
y &= uy_1 + vy_2 + wy_3 = y_3 + u(y_1 - y_3) + v(y_2 - y_3).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Trojico (u, v, w) imenujemo baricentrične koordinate točke P, določene pa so s formulami

$$u = \frac{\mathrm{pl}\langle P, P_2, P_3\rangle}{\mathrm{pl}\langle P_1, P_2, P_3\rangle}, \quad v = \frac{\mathrm{pl}\langle P, P_3, P_1\rangle}{\mathrm{pl}\langle P_1, P_2, P_3\rangle}, \quad w = \frac{\mathrm{pl}\langle P, P_1, P_2\rangle}{\mathrm{pl}\langle P_1, P_2, P_3\rangle},$$

kjer $\mathrm{pl}\langle P_i, P_j, P_k\rangle$ označuje ploščino trikotnika, določenega z naštetimi točkami. Pri računanju integrala funkcije g nad trikotnikom $\mathcal{P}$ uporabimo formulo za uvedbo novih spremenljivk

$$\iint_\mathcal{P} g(x, y) \, dxdy = \int_0^1 du \int_0^{1-u} g(u, v)|J(u, v)| \, dv, \tag{4.7}$$

pri čemer je determinanta Jacobijeve matrike enaka

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}.$$

Uporabimo te formule za izračun koeficientov

$$b_1 = \sum_{i=1}^{6} \iint_{\mathcal{T}_i} \varphi_1(x,y)\; dxdy, \quad b_2 = \sum_{i=5}^{10} \iint_{\mathcal{T}_i} \varphi_2(x,y)\; dxdy.$$

Na trikotniku $\mathcal{T}_1$, ki je določen s točkami P_1, P_2, P_9 dobimo, z upoštevanjem (4.6) ter (4.7),

$$\iint_{\mathcal{T}_1} \varphi_1(x,y) dxdy = \iint_{\mathcal{T}_1} 2y\; dxdy = \int_0^1 du \int_0^{1-u} 2\left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4}\; dudv = \frac{1}{24}.$$

Podobno izračunamo

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{T}_2} 4x\; dxdy = \frac{1}{48},\\
&\iint_{\mathcal{T}_3} 4x\; dxdy = \frac{1}{48},\\
&\iint_{\mathcal{T}_4} (2-2y)\; dxdy = \frac{1}{24},\\
&\iint_{\mathcal{T}_5} (2-2x-2y)\; dxdy = \frac{1}{24},\\
&\iint_{\mathcal{T}_6} (1-2x+y)\; dxdy = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

ter

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{T}_5} (2x-y)\; dxdy = \frac{1}{24},\\
&\iint_{\mathcal{T}_6} (-1+2x+y)\; dxdy = \frac{1}{24},\\
&\iint_{\mathcal{T}_7} 2y\; dxdy = \frac{1}{24},\\
&\iint_{\mathcal{T}_8} (4-4x)\; dxdy = \frac{1}{48},\\
&\iint_{\mathcal{T}_9} (4-4x)\; dxdy = \frac{1}{48},\\
&\iint_{\mathcal{T}_{10}} (2-2y)\; dxdy = \frac{1}{24},
\end{aligned}$$

od koder sledi

$$b_1 = \frac{5}{24}, \quad b_2 = \frac{5}{24}.$$

Koeficiente $a_{i,j}$ preprosto izračunamo s pomočjo vrednosti ploščin trikotnikov

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_1) = \mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_4) = \mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_5) = \mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_6) = \mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_7) = \mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_{10}) = \frac{1}{8},\\
&\mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_2) = \mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_3) = \mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_8) = \mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_9) = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

In sicer so

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= \iint_{\mathcal{T}_1} 4\ dxdy + \iint_{\mathcal{T}_2} 16\ dxdy + \iint_{\mathcal{T}_3} 16\ dxdy + \iint_{\mathcal{T}_4} 4\ dxdy + \iint_{\mathcal{T}_5} 5\ dxdy + \\
&+ \iint_{\mathcal{T}_6} 5\ dxdy = 4\mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_1) + 16\mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_2) + 16\mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_3) + 4\mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_4) + 5\mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_5) + 5\mathrm{pl}\,(\mathcal{T}_6) = \\
&= \frac{17}{4}, \\
a_{2,2} &= \iint_{\mathcal{T}_5} 5\ dxdy + \iint_{\mathcal{T}_6} 5\ dxdy + \iint_{\mathcal{T}_7} 4\ dxdy + \iint_{\mathcal{T}_8} 16\ dxdy + \iint_{\mathcal{T}_9} 16\ dxdy + \\
&+ \iint_{\mathcal{T}_{10}} 4\ dxdy = \frac{17}{4}, \\
a_{1,2} &= \iint_{\mathcal{T}_5} (-3)\ dxdy + \iint_{\mathcal{T}_6} (-3)\ dxdy = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Rešimo

$$\begin{pmatrix} \frac{17}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{24} \\ \frac{5}{24} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \frac{5}{84}, \quad \alpha_2 = \frac{5}{84}$$

in dobimo

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(x,y) = \frac{5}{84}\varphi_1(x,y) + \frac{5}{84}\varphi_2(x,y).$$

Poglavje 5

Reševanje paraboličnih PDE

Naloga 5.1. *Toplotno enačbo* $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *z začetnimi in robnimi pogoji*

$$u(0,x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}, \qquad u(t,0) = u(t,1) = 0,\ t \in [0,T],$$

rešujemo na območju $[0,T] \times [0,1]$ *z eksplicitno diferenčno metodo. Naj bo korak v* x*-smeri enak* $\delta x = \frac{1}{10}$ *ter naj bo Courantovo število* $\lambda = \frac{1}{6}$*. Zapišite enačbe, ki povezujejo neznane vrednosti na dveh zaporednih časovnih nivojih. Izračunajte približke* $\left(u_j^1\right)_j$ *na prvem časovnem nivoju.*

Rešitev:
Courantovo število λ pove razmerje med korakoma delitve v časovni in prostorski smeri:

$$\lambda = \frac{\delta t}{\delta x^2}.$$

Interval $[0,1]$ razdelimo ekvidistantno na $J+1 = 10$ delov s točkami

$$x_j = j\delta x, \quad j = 0, 1, \ldots, 10.$$

Iščemo približke

$$u_j^n \approx u(t_n, x_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, 10, \quad n = 0, 1, \ldots, N,$$

kjer so

$$t_n = n\delta t, \quad \delta t = \lambda \delta x^2 = \frac{1}{600}, \quad N = \left\lfloor \frac{T}{\delta t} \right\rfloor.$$

Iz začetnih pogojev dobimo

$$u_j^0 = \frac{j}{5}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \qquad u_j^0 = \frac{10-j}{5}, \quad j = 6, 7, 8, 9, 10,$$

iz robnih pa

$$u_0^n = 0, \quad u_{10}^n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Pri eksplicitni shemi aproksimiramo odvode na sledeč način

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) &\approx \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\delta t}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) &\approx \frac{u(t_n, x_{j-1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j+1})}{\delta x^2}
\end{aligned}
$$

in dobimo

$$
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\delta x^2}
$$

oziroma

$$
u_j^{n+1} = \lambda u_{j-1}^n + (1 - 2\lambda) + \lambda u_{j+1}^n.
$$

Približke torej računamo takole:

$$
\begin{aligned}
n = 0{,}1, \ldots, N& \\
u_0^{n+1} &= 0 \\
u_j^{n+1} &= \frac{1}{6}\left(u_{j-1}^n + 4u_j^n + u_{j+1}^n\right),\ j = 1, 2, \ldots, 9, \\
u_{10}^{n+1} &= 0
\end{aligned}
$$

Število izračunov lahko zmanjšamo, če upoštevamo, da je rešitev simetrična glede na premico $x = \frac{1}{2}$, to je $u\left(t, \frac{1}{2} + x\right) = u\left(t, \frac{1}{2} - x\right)$. Tedaj velja $u_{5+i}^n = u_{5-i}^n$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ in

$$
\begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \\ u_5^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & & \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & \\ & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \\ & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ & & & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ u_4^n \\ u_5^n \end{pmatrix}.
$$

Na prvem časovnem koraku dobimo

$$
u_1^1 = u_9^1 = \frac{1}{5}, \quad u_2^1 = u_8^1 = \frac{2}{5}, \quad u_3^1 = u_7^1 = \frac{3}{5}, \quad u_4^1 = u_6^1 = \frac{4}{5}, \quad u_5^1 = \frac{14}{15}.
$$

Grafičen prikaz vrednosti rešitve na območju $[0, 2] \times [0, 1]$ vidimo na sliki 5.1

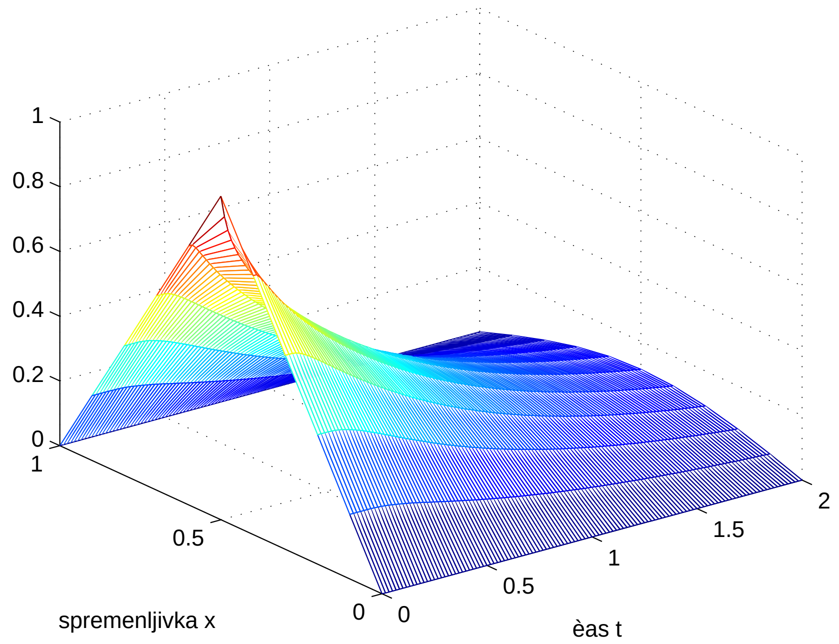
Naloga 5.2. *Toplotno enačbo* $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *z začetnimi in robnimi pogoji*

$$
u(0, x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2(1 - x), & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}, \qquad u(t, 0) = u(t, 1) = 0,\ t \in [0, T],
$$

rešujemo na območju $[0, T] \times [0, 1]$ *z*

1. *implicitno diferenčno metodo;*

2. *Crank–Nicolsonovo metodo;*



Slika 5.1: Rešitev parabolične PDE iz naloge 5.2 za $T \in [0, 2]$, $\delta x = 0.1$ in $\lambda = \frac{1}{6}$.

Naj bo korak v x-smeri enak $\delta x = \frac{1}{10}$ ter naj bo Courantovo število $\lambda = 1$. Zapišite enačbe, ki povezujejo neznane vrednosti na dveh zaporednih časovnih nivojih. Izračunajte približke $\left(u_j^1\right)_j$ na prvem časovnem nivoju.

Rešitev:
Iz Courantovega števila $\lambda = \frac{\delta t}{\delta x^2}$ dobimo, da mora biti $\delta t = 0.01$. Interval $[0, 1]$ razdelimo ekvidistantno na $J+1 = 10$ delov s točkami $x_j = j\delta x$, $j = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Iščemo približke

$$u_j^n \approx u(t_n, x_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, 10, \quad n = 0, 1, \ldots, N,$$

kjer sta

$$t_n = n\delta t, \quad N = \left\lfloor \frac{T}{\delta t} \right\rfloor.$$

Iz začetnih pogojev dobimo

$$u_j^0 = \frac{j}{5}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \qquad\qquad u_j^0 = \frac{10 - j}{5}, \quad j = 6, 7, 8, 9, 10,$$

iz robnih pa

$$u_0^n = 0, \quad u_{10}^n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Pri implicitni shemi računamo približke na sledeč način:

$$-\lambda u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda)u_j^{n+1} - \lambda u_{j+1}^{n+1} = u_j^n.$$

Z upoštevanjem simetrije $u_{5+i}^n = u_{5-i}^n$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, vidimo, da približke na $(n+1)$–vem časovnem nivoju izračunamo s pomočjo vrednosti na n–tem nivoju tako, da rešimo naslednji tridiagonalni sistem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & & & \\ -1 & 3 & -1 & & \\ & -1 & 3 & -1 & \\ & & -1 & 3 & -1 \\ & & & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \\ u_5^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ u_4^n \\ u_5^n \end{pmatrix}$$

Na prvem časovnem nivoju dobimo

$$\begin{aligned} u_1^1 &= u_9^1 = \frac{121}{615} = 0.196748, \\ u_2^1 &= u_8^1 = \frac{16}{41} = 0.390244, \\ u_3^1 &= u_7^1 = \frac{353}{615} = 0.573984, \\ u_4^1 &= u_6^1 = \frac{30}{41} = 0.731707, \\ u_5^1 &= \frac{101}{123} = 0.821138. \end{aligned}$$

Pri Crank–Nicolsonovi shemi

$$\begin{aligned} &-\theta\lambda u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\theta\lambda) u_j^{n+1} - \theta\lambda u_{j+1}^{n+1} = \\ &(1-\theta)\lambda u_{j-1}^n + (1 - 2(1-\theta)\lambda) u_j^n + (1-\theta)\lambda u_{j+1}^n, \qquad \theta = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

izračunamo približke na novem nivoju z rešitvijo sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \\ u_5^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ u_4^n \\ u_5^n \end{pmatrix}.$$

Na prvem časovnem nivoju dobimo

$$\begin{aligned} u_1^1 &= u_9^1 = \frac{36}{181} = 0.198895, \\ u_2^1 &= u_8^1 = \frac{358}{905} = 0.39558, \\ u_3^1 &= u_7^1 = \frac{528}{905} = 0.583425, \\ u_4^1 &= u_6^1 = \frac{668}{905} = 0.738122, \\ u_5^1 &= \frac{696}{905} = 0.769061. \end{aligned}$$

Naloga 5.3. *Parabolično parcialno diferencialno enačbo*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

z danimi začetnimi in robnimi pogoji

$$\begin{aligned} &u(0,x) = 1, \quad x \in [0,1], \\ &u_x(t,0) = u(t,0), \quad u_x(t,1) = -u(t,1), \qquad t \in [0,T], \end{aligned}$$

rešujemo na območju $[0,T] \times [0,1]$ z eksplicitno diferenčno metodo. Izberite $\delta x = \frac{1}{10}$ in Courantovo število $\lambda = \frac{1}{4}$. Zapišite enačbe, ki povezujejo neznane vrednosti na dveh zaporednih časovnih nivojih. Izračunajte približke $\left(u_j^1\right)_j$ na prvem, drugem in tretjem časovnem nivoju.

Rešitev:
Iz Courantovega števila sledi, da je $\delta t = \lambda \delta x^2 = \frac{1}{400}$. Iščemo približke $u_j^n \approx u(t_n, x_j)$ za $j = 0, 1, \ldots, J+1$, $n = 0, 1, \ldots, N$, kjer so

$$x_j = \frac{j}{10}, \quad t_n = n\delta t, \quad J = 9, \quad N = \left\lfloor \frac{T}{\delta t} \right\rfloor.$$

Začetni pogoji določijo

$$u_j^0 = 1, \quad j = 0, 1, \ldots, J+1.$$

Ostale vrednosti izračunamo z uporabo eksplicitnega pravila

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{4} u_{j-1}^n + \frac{1}{2} u_j^n + \frac{1}{4} u_{j+1}^n, \quad j = 0, 1, \ldots, J+1.$$

Pri $j = 0$ in $j = J+1$ nastopata neznaki u_{-1}^n ter u_{J+2}^n, ki ju določimo iz robnih pogojev z uporabo simetrične diference prvega odvoda na sledeč način:

$$\begin{aligned} \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2\delta x} &= u_0^n \quad \Longrightarrow \quad u_{-1}^n = u_1^n - 2\delta x u_0^n, \\ \frac{u_{J+2}^n - u_J^n}{2\delta x} &= -u_{J+1}^n \quad \Longrightarrow \quad u_{J+2}^n = u_J^n - 2\delta x u_{J+1}^n. \end{aligned}$$

Vstavimo izpeljane vrednosti v zgornjo formulo in dobimo dve novi enačbi

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} &= \frac{1}{4} u_{-1}^n + \frac{1}{2} u_0^n + \frac{1}{4} u_1^n = \frac{9}{20} u_0^n + \frac{1}{2} u_1^n, \\ u_{J+1}^{n+1} &= \frac{1}{4} u_J^n + \frac{1}{2} u_{J+1}^n + \frac{1}{4} u_{J+2}^n = \frac{1}{2} u_J^n + \frac{9}{20} u_{J+1}^n. \end{aligned}$$

Približke na novem časovnem nivoju torej izračunamo iz približkov na starem kot

$$\begin{pmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_9^{n+1} \\ u_{10}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{20} & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & & & \\ & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ & & & & \frac{1}{2} & \frac{9}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_9^n \\ u_{10}^n \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Pri $n = 1$ dobimo

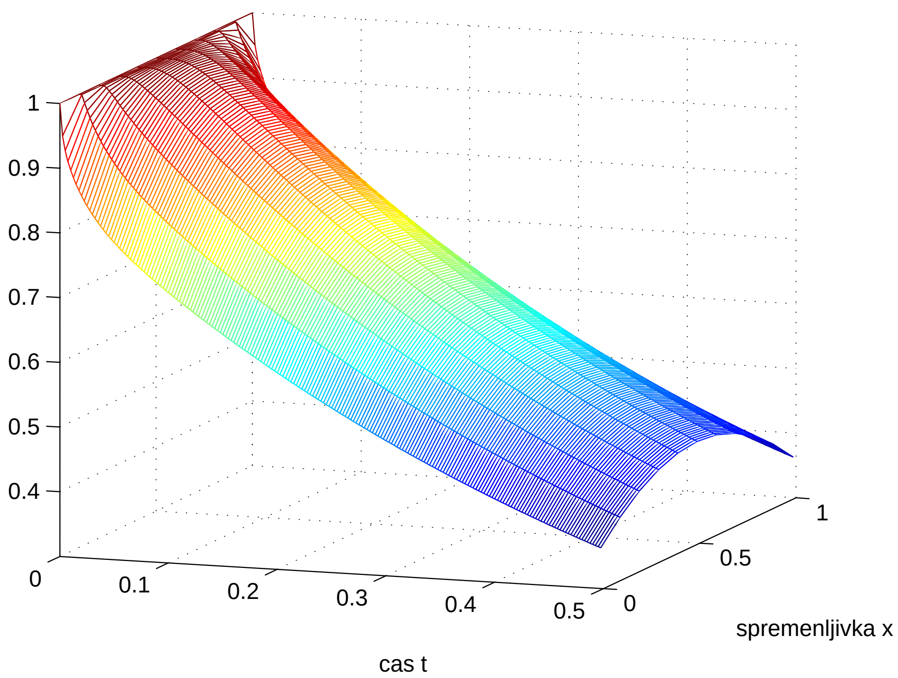
$$u_1^1 = u_9^1 = \frac{19}{20}, \quad u_2^1 = u_8^1 = 1, \quad u_3^1 = u_7^1 = 1, \quad u_4^1 = u_6^1 = 1, \quad u_5^1 = 1,$$

pri $n = 2$

$$u_1^2 = u_9^2 = 0.9275, \quad u_2^2 = u_8^2 = 0.9875, \quad u_3^2 = u_7^2 = 1, \quad u_4^2 = u_6^2 = 1, \quad u_5^2 = 1,$$

in pri $n = 3$

$$u_1^3 = u_9^3 = 0.911125, \quad u_2^3 = u_8^3 = 0.975625, u_3^3 = u_7^3 = 0.996875, \quad u_4^3 = u_6^3 = 1, u_5^3 = 1.$$



Slika 5.2: Rešitev parabolične PDE iz naloge 5.3 za $T \in [0, 1/2]$, $\delta x = 0.1$ in $\lambda = \frac{1}{4}$.

Rešitev za $t \in [0, 1/2]$ je prikazana na sliki 5.2.

Število neznank bi lahko zmanjšali z upoštevanjem simetrije glede na premico $x = \frac{1}{2}$. Preveriti moramo, da je $u\left(t, \frac{1}{2} - x\right) = u\left(t, \frac{1}{2} + x\right)$ za $x \in [0, 1/2]$. Enačba in začetni pogoji temu ustrezajo. Preverimo še simetrijo na robu, to je $u(t, 0) = u(t, 1)$. Le ta sledi iz enakosti $-u_x\left(t, \frac{1}{2} - x\right) = u_x\left(t, \frac{1}{2} + x\right)$ pri $x = 1/2$.

Naloga 5.4. *Parabolično parcialno diferencialno enačbo*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

z danimi začetnimi in robnimi pogoji

$$
\begin{aligned}
&u(0,x) = f(x), \quad x \in [0,a], \\
&u(t,0) = g(t), \quad u(t,a) = h(t), \qquad t \in [0,T],
\end{aligned}
$$

rešujemo na območju $[0,T] \times [0,a]$ *z eksplicitno diferenčno metodo. Izpeljite lokalno napako diferenčnih apoksimacij. Ali lahko izberete Courantovo število* λ *tako, da bo metoda konvergentna in da bo lokalna napaka reda* $\mathcal{O}\left(\delta x^4\right)$*?*

Rešitev:
Označimo z D zvezni diferencialen operator in z D_δ diskretni diferenčni operator:

$$
\begin{aligned}
Du(x,y) &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x,y), \\
D_\delta u(x,y) &= \frac{u(t+\delta t, x) - u(t,x)}{\delta t} - \frac{u(t, x-\delta x) - 2u(t,x) + u(t, x+\delta x)}{\delta x^2}.
\end{aligned}
$$

Lokalna napaka τ_j^n v točki (t_n, x_j) je definirana kot

$$
\tau_j^n = (D - D_\delta)u(t_n, x_j).
$$

Poglejmo si njen razvoj okrog točke (t_n, x_j) za dovolj gladko funkcijo u:

$$
\begin{aligned}
\tau_j^n &= \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) - \frac{u(t_n + \delta t, x_j) - u(t_n, x_j)}{\delta t} + \\
&+ \frac{u(t_n, x_j - \delta x) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_j + \delta x)}{\delta x^2} = \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) - \frac{1}{\delta t}\left(u + \delta t u_t + \frac{1}{2}\delta t^2 u_{tt} + \mathcal{O}\left(\delta t^3\right) - u\right)(x_n, y_j) + \\
&+ \frac{1}{\delta x^2}\left(u - \delta x u_x + \frac{1}{2}\delta x^2 u_{xx} - \frac{1}{6}\delta x^3 u_{xxx} + \frac{1}{24}\delta x^4 u_{xxxx} + \mathcal{O}\left(\delta x^5\right) - 2u\right)(t_n, x_j) + \\
&+ \frac{1}{\delta x^2}\left(u + \delta x u_x + \frac{1}{2}\delta x^2 u_{xx} + \frac{1}{6}\delta x^3 u_{xxx} + \frac{1}{24}\delta x^4 u_{xxxx} + \mathcal{O}\left(\delta x^5\right)\right)(t_n, x_j) = \\
&= -\frac{1}{2}\delta t\ u_{tt}(t_n, x_j) + \frac{1}{12}\delta x^2 u_{xxxx}(t_n, x_j) + \mathcal{O}\left(\delta x^4\right) + \mathcal{O}\left(\delta t^2\right).
\end{aligned}
$$

Ker funkcija u zadošča enačbi $u_t = u_{xx}$, zanjo velja

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4},
$$

od koder sledi

$$
\begin{aligned}
\tau_j^n &= \left(-\frac{1}{2}\delta t + \frac{1}{12}\delta x^2\right) u_{xxxx}(t_n, x_j) + \mathcal{O}\left(\delta x^4 + \delta t^2\right) = \\
&= \left(-\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{12}\right)\delta x^2 u_{xxxx}(t_n, x_j) + \mathcal{O}\left(\delta x^4\right),
\end{aligned}
$$

pri čemer smo upoštevali $\delta t = \lambda \delta x^2$. Vidimo, da je lokalna napaka najmanjša, to je reda $\mathcal{O}(\delta x^4)$, če izberemo $\lambda = \frac{1}{6}$. V tem primeru je eksplicitna metoda oblike

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{6} u_{j-1}^n + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} u_{j+1}^n.$$

Preverimo še, kdaj bo metoda konvergentna. Naj bo $e = u_\delta - u$, kjer u označuje točno rešitev, u_δ pa numerični približek. Tedaj je

$$(D_\delta e)(t_n, x_j) = (D_\delta u_\delta - D_\delta u)(t_n, x_j) = (Du - D_\delta u)(t_n, x_j) = (D - D_\delta) u(t_n, x_j) = \tau_j^n,$$

oziroma

$$\frac{e_j^{n+1} - e_j^n}{\delta t} - \frac{e_{j-1}^n - 2e_j^n + e_{j+1}^n}{\delta x^2} = \tau_j^n.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} e_j^{n+1} &= \lambda e_{j-1}^n + (1 - 2\lambda) e_j^n + \lambda e_{j+1}^n + \delta t \tau_j^n \\ \left|e_j^{n+1}\right| &\leq \lambda \left|e_{j-1}^n\right| + |1 - 2\lambda| \left|e_j^n\right| + \lambda \left|e_{j+1}^n\right| + \delta t \left|\tau_j^n\right| \\ \left|e_j^{n+1}\right| &\leq \lambda \epsilon_n + |1 - 2\lambda| \epsilon_n + \lambda \epsilon_n + \delta t \tau_n, \end{aligned}$$

kjer je

$$\epsilon_n := \left\| \left(e_j^n\right)_j \right\|_\infty, \quad \tau_n := \left\| \left(\tau_j^n\right)_j \right\|_\infty, \quad \tau := \max_{n=0,1,\ldots,N} \tau_n.$$

Če je $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$, velja

$$\left|e_j^{n+1}\right| \leq \epsilon_n + \delta t \tau_n.$$

Ker je to res za vsak j, velja tudi

$$\epsilon_{n+1} \leq \epsilon_n + \delta t \tau_n \leq \epsilon_n + \delta t \tau.$$

Neenakost iteriramo in dobimo

$$\epsilon_n \leq \epsilon_{n-1} + \delta t \tau \leq \epsilon_{n-2} + 2\delta t \tau \leq \cdots \leq \epsilon_0 + n\delta t \tau = \epsilon_0 + T\tau \overset{\delta t \to 0, \delta x \to 0}{\rightarrow} 0.$$

Metoda je torej konvergentna za vse $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, torej tudi za $\lambda = \frac{1}{6}$.

Ponovitev teorije:

Rešujemo splošno linearno parcialno diferencialno enačbo reda m oblike

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u, \quad \mathcal{L} = \sum_{i=0}^m c_i(x) \frac{\partial^i}{\partial x^i}, \quad \text{na} \quad (0, T) \times [a, b]$$

s predpisanimi začetnimi in robnimi pogoji. Območje diskretiziramo:

$$\begin{aligned} &u_j^n \approx u(t_n, x_j), \quad x_j = a + j\delta x, \quad t_n = n\delta t, \quad j = 0, 1, \ldots, J+1, \quad n = 0, 1, \ldots, N, \\ &\delta x = \frac{b - a}{J + 1}, \quad N = \left\lfloor \frac{T}{\delta t} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Označimo z $\boldsymbol{u}^n = \left(u_j^n\right)$ vektor neznank na n–tem časovnem nivoju. Naj bo diferenčna metoda takšna, da približke na novem nivoju izračunamo kot

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = A\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{b}^n, \tag{5.1}$$

kjer je A prehodna matrika, odvisna od Courantovega števila $\lambda := \frac{\delta t}{\delta x^m}$, v vektorju $\boldsymbol{b}^n$ pa so skriti robni pogoji. *Diferenčna metoda je reda* r, če velja

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}^{n+1} - A\widetilde{\boldsymbol{u}}^n - \boldsymbol{b}^n = \mathcal{O}\left(\delta x^{r+m}\right), \quad \delta x \to 0,$$

za vse $n \geq 0$ in ne obstaja začetni pogoj, pri katerem bi bila razlika oblike $o\left(\delta x^{r+m}\right)$. Pri tem $\widetilde{\boldsymbol{u}}^n$ označuje točne vrednosti rešitve v točkah (t_n, x_j), $j = 1, 2, \ldots, J$.
Metoda je stabilna, če za vsak $T > 0$ obstaja konstanta $C = C(T)$, da za numerično rešitev velja

$$\|\boldsymbol{u}^n\|_{2,\delta} \leq C, \quad n = 0, 1, \ldots, N, \quad \delta x \to 0,$$

kjer je vektorska norma definirana kot

$$\|\boldsymbol{v}\|_{2,\delta} := \sqrt{\delta x}\, \|\boldsymbol{v}\|_2 .$$

To pomeni, da je numerična rešitev na poljubnem kompaktnem intervalu $[0, T]$ v normi $\|\cdot\|_{2,\delta}$ omejena neodvisno od korakov mreže, ko se ti poljubno manjšajo. Veljata sledeča izreka:
Izrek o stabilnosti: *Naj bo prehodna matrika A normalna za vsak poljuben dovolj majhen $\delta x > 0$ in naj bo Courantovo število konstantno. Če obstaja konstanta $K \geq 0$, da velja*

$$\rho(A) \leq e^{K\delta t}, \quad \delta x \to 0,$$

potem je diferenčna metoda stabilna.

Laxov ekvivalenčni izrek: *Diferenčna metoda je konvergentna natanko takrat, ko je stabilna in konsistentna (reda vsaj 1).*

Naloga 5.5. *Z matrično metodo raziščite stabilnost implicitne sheme*

$$-\lambda u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda)\, u_j^{n+1} - \lambda u_{j+1}^{n+1} = u_j^n, \quad \lambda = \frac{\delta t}{\delta x^2},$$

za reševanje problema $u_t = u_{xx}$ s pogoji

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in [0, 1], \qquad u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \qquad t \in [0, T]$$

na območju $[0, T] \times [0, 1]$.

Rešitev:
Pri implicitni metodi so približki na $(n+1)$–vem koraku določeni z rešitvijo tridiagonalnega linearnega sistema enačb $U\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^n$,

$$U = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & & & \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ & & & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-1}^{n+1} \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{J-1}^n \\ u_J^n \end{pmatrix},$$

kjer so

$$u_j^n \approx u(t_n, x_j), \quad x_j = j\delta x, \quad t_n = n\delta t, \quad j = 1,2,\ldots,J, \quad n = 1,2,\ldots,N,$$
$$\delta x = \frac{1}{J+1}, \quad N = \left\lfloor \frac{T}{\delta t} \right\rfloor.$$

Matrika U je simetrična, prav tako matrika A. Simetrične matrike so normalne matrike. Če pokažemo, da za spektralni polmer matrike A velja $\rho(A) \leq 1$, potem je metoda zagotovo stabilna. V ta namen si poglejmo lastne vrednosti matrike U. Naj γ_k označuje k–to lastno vrednost. Po Gerschgorinovem izreku ležijo vse lastne vrednosti matrike U v uniji krogov

$$\{z \in \mathbb{C}, |z - (1+2\lambda)| \leq 2\lambda\} \cup \{z \in \mathbb{C}, |z - (1+2\lambda)| \leq \lambda\}.$$

Če leži γ_k v prvem krogu, potem velja

$$|\gamma_k - (1+2\lambda)| \leq 2\lambda \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq \gamma_k \leq 1+4\lambda,$$

če leži v drugem, pa

$$|\gamma_k - (1+2\lambda)| \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad 1+\lambda < \gamma_k \leq 1+3\lambda.$$

Sledi, da je $\gamma_k \geq 1$ za vse $k = 1,2,\ldots,J$. Lastne vrednosti matrike A pa so enake γ_k^{-1} in zanje velja $0 < \gamma_k^{-1} \leq 1$, kar implicira $\rho(A) \leq 1$ in dokazuje stabilnost.

Dokažimo stabilnost še na drug način. In sicer izračunajmo vse lastne vrednosti matrike U. Naj bo

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Njene lastne vrednosti β_k, $k = 1,2,\ldots,J$, so enake

$$\beta_k = 4\sin^2\left(\frac{\pi k}{2(J+1)}\right), \quad k = 1,2,\ldots,J.$$

Od tod vidimo, da so lastne vrednosti matrike $U = I + \lambda B$ enake

$$\gamma_k = 1 + 4\lambda \sin^2\left(\frac{\pi k}{2(J+1)}\right) > 1.$$

Ker so lastne vrednosti matrike A enake γ_k^{-1} in $0 < \gamma_k^{-1} < 1$, sledi $\rho(A) < 1$, kar dokazuje stabilnost.

Naloga 5.6. *Z matrično metodo raziščite stabilnost Crank–Nicolsonove sheme*

$$\begin{aligned} &-\theta\lambda u_{j-1}^{n+1} + (1+2\theta\lambda)u_j^{n+1} - \theta\lambda u_{j+1}^{n+1} = \\ &(1-\theta)\lambda u_{j-1}^n + (1-2(1-\theta)\lambda)u_j^n + (1-\theta)\lambda u_{j+1}^n, \qquad \theta = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

za reševanje problema $u_t = u_{xx}$ s pogoji

$$u(0,x) = f(x), \quad x \in [0,1], \qquad\qquad u(t,0) = u(t,1) = 0, \qquad t \in [0,T]$$

na območju $[0,T] \times [0,1]$.

Rešitev:
Pri Crank–Nicolsonovi metodi so približki na $(n+1)$–vem koraku določeni z rešitvijo tridiagonalnega linearnega sistema enačb $U_1 \boldsymbol{u}^{n+1} = U_2 \boldsymbol{u}^n$ za

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & -\lambda & & & \\ -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda \\ & & & -\lambda & 2+2\lambda \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & \lambda & & & \\ \lambda & 2-2\lambda & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 2-2\lambda & \lambda \\ & & & \lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix}$$

in

$$\boldsymbol{u}^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{J-1}^n \\ u_J^n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-1}^{n+1} \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix},$$

kjer so

$$\begin{aligned} &u_j^n \approx u(t_n, x_j), \quad x_j = j\delta x, \quad t_n = n\delta t, \quad j = 1,2,\ldots,J, \quad n = 1,2,\ldots,N, \\ &\delta x = \frac{1}{J+1}, \quad N = \left\lfloor \frac{T}{\delta t} \right\rfloor. \end{aligned}$$

pri analizi stabilnosti moramo torej obravnavati lastne vrednosti matrike $A := U_1^{-1} U_2$. Če zapišemo

$$U_1 = 2I + \lambda B, \quad U_2 = 2I - \lambda B,$$

kjer je B definirana z (5.2), potem vidimo, da so lastne vrednosti matrike A enake

$$\alpha_k = \frac{2 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{\pi k}{2(J+1)}\right)}{2 + 4\lambda \sin^2\left(\frac{\pi k}{2(J+1)}\right)}, \quad k = 1, 2, \ldots, J.$$

Očitno je $-1 < \alpha_k \leq 1$ za poljuben $\lambda > 0$, od koder sledi, da je $\rho(A) \leq 1$ in metoda je stabilna.

Z uporabo Gerschgorinovega izreka lahko stabilnost dokažemo na sledeč način. Zapišemo

$$A = (2I + \lambda B)^{-1}(-2I - \lambda B + 4I) = -I + 4U_1^{-1}.$$

Ker je matrika A simetrična, moramo preveriti, da je

$$\left|\frac{4}{\gamma} - 1\right| \leq 1,$$

oziroma, da velja $2 \leq \gamma$, za vsako lastno vrednost γ matrike U_1. Vemo, da lastne vrednosti matrike U_1 ležijo v uniji Gerschgorinovih krogov

$$\{z \in \mathbb{C}, |z - 2 - 2\lambda| \leq 2\lambda\} \cup \{z \in \mathbb{C}, |z - 2 - 2\lambda| \leq \lambda\}.$$

Če leži γ v prvem disku, potem mora biti

$$2 \leq \gamma \leq 2 + 4\lambda,$$

če leži v drugem pa

$$2 + \lambda \leq \gamma \leq 2 + 3\lambda.$$

V obeh primeri velja $\gamma \geq 2$, saj je $\lambda > 0$, kar dokazuje stabilnost.

Naloga 5.7. *Z matrično metodo raziščite stabilnost eksplicitne sheme*

$$u_j^{n+1} = \lambda u_{j-1}^n + (1 - 2\lambda)u_j^n + \lambda u_{j+1}^n, \quad \lambda = \frac{\delta t}{\delta x^2}$$

za reševanje problema $u_t = u_{xx}$ s pogoji

$$\begin{aligned} &u(0, x) = f(x), \quad x \in [0, 1], \\ &u_x(t, 0) = c_1(u(t, 0) - c_2), \quad u_x(t, 1) = -c_3(u(t, 1) - c_4) \qquad t \in [0, T] \end{aligned}$$

na območju $[0, T] \times [0, 1]$, pri čemer so c_i konstante in velja $c_1 > 0$, $c_3 > 0$.

Rešitev:
Naj bodo

$$\begin{aligned} &u_j^n \approx u(t_n, x_j), \quad x_j = j\delta x, \quad t_n = n\delta t, \quad j = 0, 1, \ldots, J+1, \quad n = 0, 1, \ldots, N, \\ &\delta x = \frac{1}{J+1}, \quad N = \left\lfloor \frac{T}{\delta t} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Pri eksplicitni shemi uporabimo zvezo

$$u_j^{n+1} = \lambda u_{j-1}^n + (1-2\lambda)u_j^n + \lambda u_{j+1}^n.$$

Iz aproksimacije robnih pogojev dobimo

$$\begin{aligned} \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2\delta x} &= c_1\left(u_0^n - c_2\right) \quad \Longrightarrow \quad u_{-1}^n = u_1^n - 2\delta x c_1\left(u_0^n - c_2\right), \\ \frac{u_{J+2}^n - u_J^n}{2\delta x} &= -c_3\left(u_{J+1}^n - c_4\right) \quad \Longrightarrow \quad u_{J+2}^n = u_J^n - 2\delta x c_3\left(u_{J+1}^n - c_4\right). \end{aligned}$$

Približki $\boldsymbol{u}^n = \left(u_j^{n+1}\right)_{j=0}^{J+1}$ *na* $(n+1)$*–vem koraku so določeni z enačbami*

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = A\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{b}$$

za

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 2\lambda & & & \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ & & & \lambda & a_{J+2,J+2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} &a_{1,1} = 1 - 2\lambda\left(1 + \delta x c_1\right), \quad a_{J+2,J+2} = 1 - 2\lambda\left(1 + \delta x c_3\right), \\ &\boldsymbol{b} = 2\lambda\delta x\left(c_1 c_2, 0, 0, \ldots, 0, c_3 c_4\right) \end{aligned}$$

Matrika A *je simetrična. Njene lastne vrednosti ležijo v uniji Gerschgorinovih krogov*

$$\{z \in \mathbb{C}, |z - a_{1,1}| \leq 2\lambda\} \cup \{z \in \mathbb{C}, |z - (1-2\lambda)| \leq 2\lambda\} \cup \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{J+2,J+2}| \leq 2\lambda\}.$$

Recimo, da leži lastna vrednost γ *v prvem krogu. Tedaj velja*

$$1 - 2\lambda\left(2 + \delta x c_1\right) \leq \gamma \leq 1 - 2\lambda\delta x c_1.$$

Če bo

$$-1 \leq 1 - 2\lambda\left(2 + \delta x c_1\right) \quad \text{in} \quad 1 - 2\lambda\delta x c_1 \leq 1,$$

potem bo metoda zagotovo stabilna. Za $c_1 > 0$ *je drugi pogoj vselej izpolnjen, prvi pa drži za vse*

$$\lambda \leq \frac{1}{2 + c_1\delta x}.$$

Če leži γ *v drugem Gerschgorinovem krogu, sledi pogoj* $\lambda \leq \frac{1}{2}$*, iz zadnjega kroga pa dobimo*

$$\lambda \leq \frac{1}{2 + c_3\delta x}.$$

Če povzamemo rezultate, dobimo zadosten pogoj za stabilnost:

$$\lambda \leq \min\left\{\frac{1}{2 + c_1\delta x}, \frac{1}{2 + c_3\delta x}\right\}.$$

Fourierova metoda
Naj bo diferenčna metoda oblike

$$\sum_{k=-\underline{m}_\ell}^{\overline{m}_\ell} \beta_k(\lambda) u_{j+k}^{n+1} = \sum_{k=-\underline{m}_e}^{\overline{m}_e} \gamma_k(\lambda) u_{j+k}^{n}.$$

Pripišemo ji dva rodovna polinoma

$$\beta(z,\lambda) = \sum_{k=-\underline{m}_\ell}^{\overline{m}_\ell} \beta_k(\lambda) z^k, \quad \gamma(z,\lambda) = \sum_{k=-\underline{m}_e}^{\overline{m}_e} \gamma_k(\lambda) z^k$$

ter kvocient

$$\sigma(z,\lambda) = \frac{\gamma(z,\lambda)}{\beta(z,\lambda)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lambda > 0.$$

Velja: Diferenčna metoda je za dano Courantovo število stabilna natanko takrat, ko je

$$\left|\sigma\left(e^{\mathrm{i}\varphi},\lambda\right)\right| \le 1 \quad \text{za vse} \quad \varphi \in [0,2\pi].$$

Naloga 5.8. *S Fourierovo metodo raziščite stabilnost eksplicitne in θ–metode za reševanje problema $u_t = u_{xx}$ s pogoji*

$$u(0,x) = f(x), \quad x \in [0,1], \qquad u(t,0) = u(t,1) = 0, \qquad t \in [0,T]$$

na območju $[0,T] \times [0,1]$.

Rešitev:

1. **Eksplicitna metoda.** *Metodi*

$$u_j^{n+1} = \lambda u_{j-1}^n + (1-2\lambda) u_j^n + \lambda u_{j+1}^n$$

priredimo rodovna polinoma

$$\beta(z,\lambda) = z^0 = 1, \quad \gamma(z,\lambda) = \lambda z^{-1} + (1-2\lambda) + \lambda z$$

in

$$\begin{aligned} \sigma(e^{\mathrm{i}\varphi},\lambda) &= \lambda e^{-\mathrm{i}\varphi} + (1-2\lambda) + \lambda e^{\mathrm{i}\varphi} = \\ &= 2\lambda \frac{e^{-\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} + 1 - 2\lambda = \\ &= 1 - 2\lambda + 2\lambda\cos\varphi = \\ &= 1 + 2\lambda(\cos\varphi - 1) = \\ &= 1 - 4\lambda \sin^2\frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Iz pogoja

$$\left|\sigma(e^{\mathrm{i}\varphi},\lambda)\right| = \left|1 - 4\lambda\sin^2\frac{\varphi}{2}\right| \le 1 \quad \text{za vse} \quad \varphi \in [0,2\pi]$$

dobimo, da je eksplicitna metoda stabilna natanko takrat, ko je $0 < \lambda \le \frac{1}{2}$.

2. **θ–metoda.** *Metodi*

$$\begin{aligned}
&-\theta\lambda u_{j-1}^{n+1}+(1+2\theta\lambda)u_j^{n+1}-\theta\lambda u_{j+1}^{n+1}=\\
&(1-\theta)\lambda u_{j-1}^{n}+(1-2(1-\theta)\lambda)u_j^{n}+(1-\theta)\lambda u_{j+1}^{n},\quad 0\le\theta\le 1,
\end{aligned}$$

priredimo rodovna polinoma

$$\begin{aligned}
\beta(z,\lambda)&=-\theta\lambda z^{-1}+(1+2\theta\lambda)-\theta\lambda z,\\
\gamma(z,\lambda)&=(1-\theta)\lambda z^{-1}+(1-2(1-\theta)\lambda)+(1-\theta)\lambda z
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
\sigma(e^{\mathrm{i}\varphi},\lambda)&=\frac{(1-\theta)\lambda e^{-\mathrm{i}\varphi}+(1-2(1-\theta)\lambda)+(1-\theta)\lambda e^{\mathrm{i}\varphi}}{-\theta\lambda e^{-\mathrm{i}\varphi}+(1+2\theta\lambda)-\theta\lambda e^{\mathrm{i}\varphi}}\\
&=\frac{2\lambda(1-\theta)\cos\varphi+1-2\lambda(1-\theta)}{-2\lambda\theta\cos\varphi+1+2\lambda\theta}=\\
&=\frac{1-4\lambda(1-\theta)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{1+4\lambda\theta\sin^2\frac{\varphi}{2}}.
\end{aligned}$$

Za stabilnost moramo obravnavati pogoj $-1\le\sigma(e^{\mathrm{i}\varphi},\lambda)\le 1$ za vsak $\varphi\in[0,2\pi]$. Ker je imenovalec pozitiven, je pogoj izpolnjen, če velja

$$\begin{aligned}
-1-4\lambda\theta\sin^2\frac{\varphi}{2}&\le 1-4\lambda(1-\theta)\sin^2\frac{\varphi}{2}\quad\text{in}\\
1-4\lambda(1-\theta)\sin^2\frac{\varphi}{2}&\le 1+4\lambda\theta\sin^2\frac{\varphi}{2}.
\end{aligned}$$

Drugi pogoj je izpolnjen za vse $\lambda>0$, prvi pogoj pa se poenostavi v

$$-1\le 2\lambda(2\theta-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}\quad\text{za vse}\quad\varphi\in[0,2\pi].$$

Če je $\frac{1}{2}\le\theta\le 1$, je pogoj izpolnjen za vsak $\lambda>0$. Za $0\le\theta<\frac{1}{2}$ pa mora veljati

$$-1\le 2\lambda(2\theta-1)\quad\Longrightarrow\quad\lambda\le\frac{1}{2(1-2\theta)}.$$

Metoda θ je torej za $\frac{1}{2}\le\theta\le 1$ stabilna za vsak $\lambda>0$, za $0\le\theta<\frac{1}{2}$ pa mora veljati $\lambda\le\frac{1}{2(1-2\theta)}$.

Naloga 5.9. *Pokažite, da so vse lastne vrednosti matrike*

$$A=\begin{pmatrix}
a & b & & & \\
c & a & b & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & c & a & b\\
 & & & c & a
\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad bc\ge 0,$$

enake

$$\lambda_k=a+2\sqrt{bc}\cos\frac{k\pi}{n+1},\quad k=1,2,\dots,n.$$

Rešitev:
Iz enakosti $Ax = \lambda x$ dobimo diferenčne enačbe

$$\begin{aligned}(a-\lambda)x_1 + bx_2 &= 0\\ cx_{j-1} + (a-\lambda)x_j + bx_{j+1} &= 0, \quad j = 2,3,\ldots,n-1,\\ cx_{n-1} + (a-\lambda)x_n &= 0.\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferenčnih enačb dobimo z nastavkom $x_j = r^j$, ki implicira karakteristični polinom

$$br^2 + (a-\lambda)r + c = 0,$$

katerega ničli sta enaki

$$r_{1,2} = \frac{-(a-\lambda) \pm \sqrt{(a-\lambda)^2 - 4bc}}{2b} = \sqrt{\frac{c}{b}}\left(-\frac{a-\lambda}{2\sqrt{bc}} \pm \sqrt{\frac{(a-\lambda)^2}{4bc} - 1}\right).$$

Recimo, da je

$$-\frac{a-\lambda}{2\sqrt{bc}} = \cos\varphi \tag{5.3}$$

za nek kot φ. Sledi

$$r_{1,2} = \sqrt{\frac{c}{b}}\,(\cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi) = \sqrt{\frac{c}{b}} e^{\pm \mathrm{i}\,\varphi}$$

in splošna rešitev diferenčne enačbe je oblike

$$x_j = \alpha r_1^j + \beta r_2^j.$$

Iz robnih pogojev izpeljemo

$$\begin{aligned}(a-\lambda)\left(\alpha r_1 + \beta r_2\right) + b\left(\alpha r_1^2 + \beta r_2^2\right) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \alpha + \beta = 0,\\ (a-\lambda)\left(\alpha r_1^n + \beta r_2^n\right) + c\left(\alpha r_1^{n-1} + \beta r_2^{n-1}\right) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1.\end{aligned}$$

Enačba

$$1 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = e^{2\,\mathrm{i}\,\varphi(n+1)}$$

pa je izpolnjena za vse

$$\varphi = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Iz (5.3) nato izpeljemo, da je so lastne vrednosti enake

$$\lambda = a + 2\sqrt{bc}\cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Poglavje 6

Reševanje hiperboličnih PDE

Naloga 6.1. *Valovno enačbo*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

z začetnimi in robnimi pogoji

$$\begin{aligned} &u(0,x) = \sin(\pi x), \quad u_t(0,x) = 0, \quad x \in [0,1], \\ &u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t \in [0,T], \end{aligned}$$

rešujemo na območju $[0,T] \times [0,1]$ *z diferenčno metodo. Naj bo korak v* x*-smeri enak* $\delta x = \frac{1}{10}$ *ter naj bo Courantovo število* $\lambda = 1$. *Zapišite enačbe, ki povezujejo neznane vrednosti na dveh zaporednih časovnih nivojih. Izračunajte približke* $\left(u_j^1\right)_j$ *na prvem časovnem nivoju.*

Rešitev:
Z diferenčno metodo iščemo približke

$$u_j^n \approx u(t_n, x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, J = 9, \quad n = 2, 3, \ldots, N, \quad x_j = j\delta x, \quad t_n = n\delta t,$$

pri čemer sta

$$\delta x = \frac{1}{J+1} = \frac{1}{10}, \quad \delta t = \frac{T}{N}.$$

Odvode aproksimiramo s simetričnimi diferencami in dobimo enačbe

$$\frac{u_j^{n-1} - 2u_j^n + u_j^{n+1}}{\delta t^2} = 4\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\delta x^2}$$

oziroma

$$u_j^{n+1} = (2 - 2\lambda^2)u_j^n + \lambda^2 u_{j-1}^n + \lambda^2 u_{j+1}^n - u_j^{n-1}, \quad \lambda = \frac{2\delta t}{\delta x}$$

Iz predpisanega Courantovega števila sledi $\delta t = \frac{1}{20}$. *Označimo začetne pogoje z* $f(x) = \sin(\pi x)$ *in* $g(x) = 0$. *Iz njih dobimo*

$$u_j^0 = u(0, x_j) = f(x_j).$$

Rabimo še približke na prvem časovnem nivoju. V ta namen si pogledamo razvoj

$$\begin{aligned} u(\delta t, x_j) &= u(0, x_j) + \delta t u_t(0, x_j) + \frac{1}{2}\delta t^2 u_{tt}(0, x_j) + \mathcal{O}\left(\delta t^3\right) = \\ &= f(x_j) + \delta t g(x_j) + \frac{1}{2}\delta t^2 4 u_{xx}(0, x_j) + \mathcal{O}\left(\delta t^3\right). \end{aligned}$$

Drugi odvod po x nadomestimo s simetrično diferenco in dobimo

$$\begin{aligned} u_j^1 &= u_j^0 + \delta t g(x_j) + \frac{1}{2}\delta t^2 4 \frac{u_{j-1}^0 - 2u_j^0 + u_{j+1}^0}{\delta x^2} = \\ &= (1-\lambda^2) f(x_j) + \delta t g(x_j) + \frac{1}{2}\lambda^2 (f(x_{j-1}) + f(x_{j+1})). \end{aligned}$$

Vrednosti na začetnih dveh časovnih nivojih so torej enake

$$\begin{aligned} u_j^0 &= \sin\frac{j\pi}{10}, \\ u_j^1 &= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{(j-1)\pi}{10} + \sin\frac{(j+1)\pi}{10}\right), \end{aligned} \qquad j = 1, 2, \ldots, 9,$$

sledeče pa so določene kot

$$\begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_8^{n+1} \\ u_9^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_8^n \\ u_9^n \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, \ldots, N.$$

Pri $n = 2$ dobimo

$$\boldsymbol{u}^2 = \begin{pmatrix} 0.250000000000000 \\ 0.475528258147577 \\ 0.654508497187474 \\ 0.769420884293813 \\ 0.809016994374947 \\ 0.769420884293813 \\ 0.654508497187474 \\ 0.475528258147577 \\ 0.250000000000000 \end{pmatrix}.$$

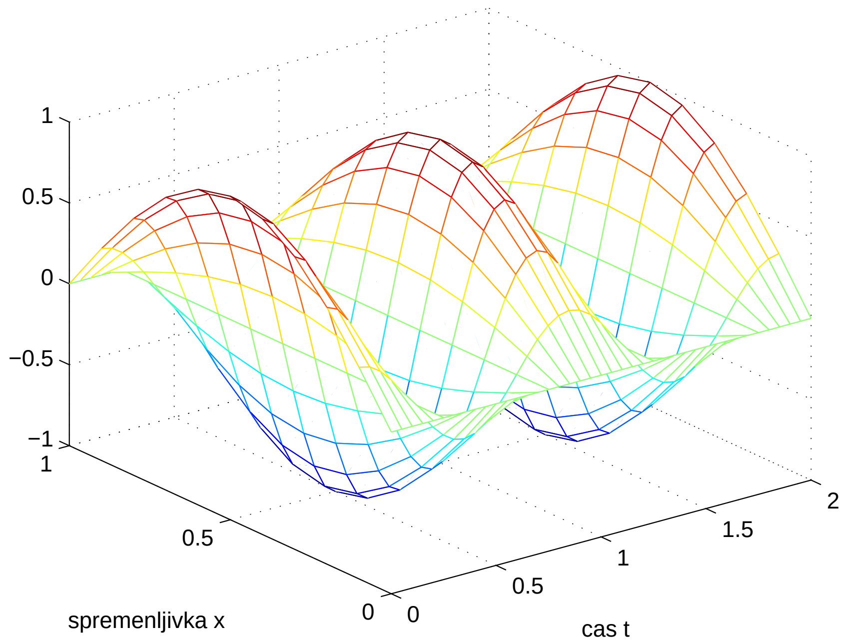
Rešitev za $t \in [0, 2]$ je prikazana na sliki 6.1

Naloga 6.2. *Advekcijsko enačbo*

$$u_t + u_x = 0, \quad u(0, x) = f(x), \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0,$$

rešujemo na območju $[0, T] \times [0, 1]$ z Lax-Friedrichsovo metodo

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right)}{\delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\delta x} = 0, \quad \delta t = \lambda \delta x.$$



Slika 6.1: Rešitev hiperbolične PDE iz naloge 6.1 za $T \in [0, 2]$, $\delta x = 0.1$ in $\lambda = 1$.

1. *Izračunajte red in vodilni koeficient lokalne napake.*
2. *Določite pogoje na Courantovo število λ, da bo metoda stabilna. Uporabite Fourierovo metodo.*

Rešitev:
Označimo z $\mathcal{L}_\delta$ diferenčni operator za dano metodo in naj bo $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}$. Za $\mathcal{L}_\delta$ velja

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\delta u(t_n, x_j) &= \frac{1}{\delta t}\left(u(t_n + \delta t, x_j) - \frac{1}{2}u(t_n, x_j + \delta x) - \frac{1}{2}u(t_n, x_j - \delta x)\right) + \\
&+ \frac{1}{2\delta x}\left(u(t_n, x_j + \delta x) - u(t_n, x_j - \delta x)\right) = \\
&= \frac{1}{\delta t}\left(u + \delta t u_t + \frac{1}{2}\delta t^2 u_{tt} + \frac{1}{6}\delta t^3 u_{ttt}\right)(t_n, x_j) + \mathcal{O}\left(\delta t^3\right) + \\
&- \frac{1}{2\delta t}\left(2u + \delta x^2 u_{xx} + \frac{1}{12}\delta x^4 u_{xxxx}\right)(t_n, x_j) + \mathcal{O}\left(\frac{\delta x^6}{\delta t}\right) + \\
&+ \frac{1}{2\delta x}\left(2\delta x u_x + \frac{1}{3}\delta x^3 u_{xxx}\right)(t_n, x_j) + \mathcal{O}\left(\delta x^4\right) = \\
&= \left(u_t + \frac{1}{2}\delta t u_{tt} + \frac{1}{6}\delta t^2 u_{ttt} - \frac{1}{2}\frac{\delta x^2}{\delta t}u_{xx} + u_x + \frac{1}{6}\delta x^2 u_{xxx}\right)(t_n, x_j) + \\
&+ \mathcal{O}\left(\delta t^3 + \frac{\delta x^4}{\delta t} + \delta x^4\right).
\end{aligned}
$$

Z upoštevanjem $\delta t = \lambda \delta x$ in $u_t = -u_x$ dobimo

$$\mathcal{L}_\delta u(t_n, x_j) = u_t + u_x + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\delta x u_{xx} + \frac{1}{6}\left(1-\lambda^2\right)\delta x^2 u_{xxx} + \mathcal{O}\left(\delta x^3\right)$$

in lokalna napaka se glasi

$$\tau_j^n = (\mathcal{L}_\delta - \mathcal{L})u(t_n, x_j) = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\delta x u_{xx} + \frac{1}{6}\left(1-\lambda^2\right)\delta x^2 u_{xxx} + \mathcal{O}\left(\delta x^3\right)$$

Pri analizi stabilnosti s pomočjo Fourierove metode moramo obravnavati vrednosti

$$\sigma(z,\lambda) = \frac{1}{2}(1+\lambda)z^{-1} + \frac{1}{2}(1-\lambda)z$$

za vse z na enotski kompleksni krožnici. Izpeljemo, da je

$$\sigma\left(e^{i\varphi},\lambda\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}\right) + \frac{1}{2}\lambda\left(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}\right) = \cos\varphi - \lambda i \sin\varphi$$

in

$$\left|\sigma\left(e^{i\varphi},\lambda\right)\right|^2 = (\cos\varphi - \lambda i \sin\varphi)(\cos\varphi + \lambda i\sin\varphi) = 1 + (\lambda^2-1)\sin^2\varphi.$$

Ker je metoda stabilna natanko takrat, ko velja pogoj $|\sigma(e^{i\varphi},\lambda)| \le 1$ za vse $\varphi \in [0,2\pi]$, dobimo, da mora biti

$$\lambda \in (0,1].$$

Naloga 6.3. *Analizirajte stabilnost in red lokalne napake metode žabjih skokov*

$$u_j^{n+2} = \lambda\left(u_{j-1}^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}\right) + u_j^n,$$

za reševanje problema

$$u_t + u_x = 0, \quad u(0,x) = f(x).$$

Rešitev:
Z metodo žabjih skokov računamo približke $\boldsymbol{u}^\ell = (u_j^\ell)_{j=1}^J$, $\ell = 1,2,\ldots,N$, na sledeč način:

$$\boldsymbol{u}^{n+2} = A\boldsymbol{u}^{n+1} + \boldsymbol{u}^n, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & & & \\ \lambda & 0 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 0 & -\lambda \\ & & & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Zapišemo lahko tudi

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{n+2} \\ \boldsymbol{u}^{n+1} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{n+1} \\ \boldsymbol{u}^{n} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} A & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Po nalogi 5.9 so lastne vrednosti matrike A enake

$$\alpha_k = 2\lambda\,\mathrm{i}\cos\frac{k\pi}{J+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, J.$$

Ker so lastne vrednosti β matrike B in lastne vrednosti α matrike A povezane z enačbo

$$\alpha = \frac{\beta^2 - 1}{\beta},$$

dobimo, da je $2J$ lastnih vrednosti matrike B enakih

$$\beta_{k,\pm} = \lambda\,\mathrm{i}\cos\frac{k\pi}{J+1} \pm \sqrt{1 - \lambda^2\cos^2\frac{k\pi}{J+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, J.$$

Recimo, da je $\lambda \in (0, 1]$. Tedaj obstajajo koti γ_k, $k = 1, 2, \ldots, J$, da je

$$\lambda\cos\frac{k\pi}{J+1} = \sin\gamma_k$$

in

$$\beta_{k,\pm} = \pm e^{\mathrm{i}\gamma_k}, \quad |\beta_{k,\pm}| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, J, \quad \rho(B) = 1.$$

Za $\lambda \in (0, 1]$ je torej metoda stabilna.

Če izberemo $\lambda > 1$, pa dobimo, da je

$$\beta_{k,\pm} = \mathrm{i}\,e^{\pm\gamma_k}, \quad \rho(B) > 1,$$

kar implicira nestabilnost.

Pri obravnavi lokalne napake si pogledamo razvoj diferenčnega operatorja

$$D_\delta u(t_{n+1}, x_j) = \frac{1}{2\delta t}\left(u(t_{n+2}, x_j) - u(t_n, x_j)\right) + \frac{1}{2\delta x}\left(u(t_{n+1}, x_{j+1}) - u(t_{n+1}, x_{j-1})\right),$$

iz katerega metoda sledi, okrog točke (t_{n+1}, x_j). Dobimo

$$\begin{aligned} D_\delta u(t_{n+1}, x_j) &= u_t(t_{n+1}, x_j) + \frac{1}{6}\delta t^2 u_{ttt}(t_{n+1}, x_j) + \mathcal{O}\left(\delta t^4\right) + \\ &\quad + u_x(t_{n+1}, x_j) + \frac{1}{6}\delta x^2 u_{xxx}(t_{n+1}, x_j) + \mathcal{O}\left(\delta x^4\right) \end{aligned}$$

in lokalna napake je enaka

$$\tau_j^{n+1} = \frac{1}{6}(1 - \lambda^2)\delta x^2 u_{xxx}(t_{n+1}, x_j) + \mathcal{O}\left(\delta x^4\right).$$

Literatura

[1] S.D. Conte, C. de Boor: Elementary Numerical Analysis, McGraw Hill, New York, 1980.

[2] E. Isaacson, H.B. Keller: Analysis of Numerical Methods, John Wiley, New York, 1966.

[3] D. Kincaid, W. Cheney: Numerical Analysis, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1996.

[4] J. Kozak: Numerična analiza, DMFA - založništvo, Ljubljana 2008.

[5] W. F. Ames: Numerical Methods for Partial Differential Equations, London: Nelson, cop., 1969.

[6] G. D. Smith: Numerical Solution of Partial Differential Equations, Oxford: Clarendon Press, 1985.

[7] D. U. von Rosenberg: Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations, New York: American Elsevier, 1969.