Računska zahtevnost

rešitev tretje naloge pri prvi domači nalogi

Naloga 3 (4 točke)

Opišite algoritem linearne časovne zahtevnosti (t.j. $O(n)$), ki na vhodu $w \in \mathbb{N}$ vrne tak $x \in \mathbb{N}$, da je $5^x = w$. Če w ni potenca petice, lahko algoritem vrne poljubno število. Števila so kodirana v dvojiškem sistemu (vhod in izhod sta nad abecedo $\Sigma = \{0, 1\}$).

Znotraj algoritma lahko uporabljate operacije, za katere smo na predavanjih ali vajah povedali, kako so zahtevne (npr. računanje determinante, seštevanje, množenje) in uporabljate izpeljane ocene za število korakov (npr. za množenje $O(n^2)$). Dodatno lahko uporabite dejstvo[1], da gre $\log_2 5$ na t mest natančno izračunati v času, ki je polinomski v t. Algoritem naj bo tako natančno opisan, da bo moč utemeljiti linearno časovno zahtevnost. To tudi storite.

Namig 1: Če w ni potenca petice, lahko algoritem vrne poljubno število. Torej je dovolj, da dovolj dobro ocenimo x.

Namig 2: Algoritem časovne zahtevnosti $O(n \log n)$ je vreden 2 točki.

Rešitev: Če je $5^x = w$, potem velja $x = \log_5 w = \frac{\log w}{\log 5}$, torej:

$$\frac{\lfloor \log w \rfloor}{\log 5} \leq x \leq \frac{\lfloor \log w \rfloor + 1}{\log 5}.$$

Vemo (smo pokazali na vajah), da je $n = \lfloor \log w \rfloor + 1 =$ (velikost vhoda). Naj bo l tako število s k dvojiškimi števkami za decimalno vejico, da velja $l - 2^{-k} \leq \log 5 \leq l + 2^{-k}$, tj. l aproksimira $\log 5$ na k mest natančno. Potem velja

$$\frac{n-1}{l + 2^{-k}} \leq x \leq \frac{n}{l - 2^{-k}}.$$

Za $k \geq (\log n + 1)$ je $\frac{n}{l-2^{-k}} - \frac{n-1}{l+2^{-k}} < 1$, torej je

$$x = \left\lfloor \frac{n}{l - 2^{-k}} \right\rfloor$$

.

[1] Glej http://en.wikipedia.org/wiki/Computational_complexity_of_mathematical_operations

Naš algoritem torej najprej izmeri dolžino vhoda, da dobi n ($O(n)$ korakov). Nato poračuna l, tj. $\log 5$ na ($k = \lfloor \log n \rfloor + 3$) mest natančno (št. korakov je polinomsko v $\log n$) in vrne $\left\lfloor \frac{n}{l - 2^{-k}} \right\rfloor$. Ker delimo števili, katerih dolžina zapisa je logaritemska v n, lahko tudi zadnje deljenje izvedemo s polinomsko koraki v $\log n$.

Časovna zahtevnost je torej $O(n)$.