

Računska zahtevnost

tretja domača naloga

Rok za oddajo domače naloge je ponedeljek, 17. 2. 2014 ob 14.30. Oddaja je preko spletne učilnice ali v predalček asistenta (pritičje na Jadranski 19 (fizika)). Če imate vprašanja, se obrnite na asistenta ali profesorja oz. uporabite forum na učilnici. O nalogah se lahko pogovarjate, o rešitvah pa ne. Če boste uporabili vire (knjige, splet), jih prosimo navedite.

Naloga 1 (4 točke)

Podjetje ima na voljo tri različne stroje: M_1 , M_2 in M_3 in N opravil zanje. Za $j = 1, 2, 3$ označimo s $t_{i,j}$ čas, ki ga j -ti stroj potrebuje za i -to opravilo. V vsakem trenutku lahko vsak stroj opravlja največ eno opravilo in vsako opravilo mora v celoti in brez prekinitve opraviti en stroj. Naši stroji pa imajo tudi tehnično omejitev: j -ti stroj ne more nobenega posameznega opravila izvajati dlje kot T_j časa (lahko pa opravi več krajših opravil, četudi skupaj trajajo dlje kot T_j časa).

Za naslednja dva problema utemelji, ali sta v **P**, **NP** in ali sta krepko **NP**-polna. Predpostavi **P** \neq **NP**.

a) BREZT($N, t_{1,1} \dots t_{N,3}, T_1, T_2, T_3$)

Vhod: Število $N \in \mathbb{N}$ ter časi $t_{i,j} \in \mathbb{N}$ in $T_j \in \mathbb{N}$ za $i = 1, 2 \dots N$, $j = 1, 2, 3$.

Vprašanje: Ali lahko stroji M_1 , M_2 in M_3 opravijo vsa opravila v končnem času?

b) UPOŠTEVAJT($T, N, t_{1,1} \dots t_{N,3}, T_1, T_2, T_3$)

Vhod: Števili $T, N \in \mathbb{N}$ ter časi $t_{i,j} \in \mathbb{N}$ in $T_j \in \mathbb{N}$ za $i = 1, 2 \dots N$, $j = 1, 2, 3$.

Vprašanje: Ali lahko stroji M_1 , M_2 in M_3 opravijo vsa opravila v času T ?

Naloga 2 (4 točke)

Poglejmo naslednji problem:

PODMNOŽICE(A)

Vhod: Končna množica n racionalnih števil $A = \{a_1, a_2 \dots a_n\} \subset [0, 1]$, katerih dvojiški zapis je brez periode. Števila so podana v dvojiškem zapisu in ne kot ulomki.

Naloga: Minimiziraj število k , za katerega obstajajo take $A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq A$, da velja $A = \bigcup_i A_i$ in je za vsak i vsota števil v A_i največ 1.

a.) Pokaži, da je problem PODMNOŽICE **NP**-težak.

Namig 1: DELITEV.

Namig 2: Katere ulomke lahko zapišemo z neperiodičnim dvojiškim zapisom?

b.) Pokaži, da v primeru $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ ne obstaja ϵ -aproksimacijski algoritem za $\epsilon < 0.5$.

c.) Pokaži, da je naslednji algoritem 1-aproksimacijski za problem PODMNOŽICE:

Algoritem 1: PRIBLIŽEK(A)

Vhod: Množica n števil $A = \{a_1, a_2 \dots a_n\} \subset [0, 1]$

Izhod: $k \in \mathbb{N}$

$k = 0$

for $i = 1, 2 \dots n$ **do**

 Dodaj a_i v prvo množico izmed $A_1, A_2 \dots$, ki še ima prostor zanj (vsota števil ne preseže 1). Če taka ne obstaja, povečaj k za ena in ustvari množico $A_k = \{a_i\}$.

return k

Naloga 3 (2 točki)

Dan je naslednji verjetnostni algoritem:

Algoritem 2: KROMPIR(n)

Vhod: Število košar $n \in \mathbb{N}$

Izhod: \

Naj bodo $B_1, B_2 \dots B_n$ prazne košare, postavljene pred kmetijo.

while Vsaj ena košara je prazna **do**

 Pojdi na njivo po en velik krompir in ga položi v enakomerno naključno izbrano košaro pred kmetijo.

Koliko je pričakovano število kilometrov, ki jih moraš narediti v algoritmu, če je od kmetije do njive 500m? Odgovor je odvisen od n .

Namig: Koliko krompirjev rabimo, da iz i praznih košar pridemo na $(i - 1)$ praznih košar?