Riemannove ploskve in analitična geometrija

Franc Forstnerič

18. januar 2014

Kazalo

Poglavje I

Uvod v Riemannove ploskve

I.1 Motivacija

Riemannova ploskev je enodimenzionalna kompleksna mnogoterost. Ime so dobile po genialnem nemškem matematiku ***Bernhardu Riemannu***, ki je v svoji disertaciji leta 1851 med drugim postavil nekaj bistvenih temeljev kompleksne analize in geometrije.

Poleg domen v kompleksni ravnini so najpreprostejši primeri ***Riemannova sfera*** in kompleksni torusi, imenovani tudi ***eliptične krivulje***. Zanimale nas bodo tako Riemannove ploskve kot tudi holomorfne funkcije na njih in holomorfne preslikave med njimi. Teorija Riemannovih ploskev leži na presečišču številnih področij matematike, od klasične kompleksne analize in analize na mnogoterostih, preko teorije kompleksnih in algebraičnih krivulj, do novejših uporab v simplektični geometriji, nizko dimenzionalni topologiji, teoriji strun, pa vse do kriptografije. Temelje modernih uporab teorije Riemannovih ploskev na področju simplektične geometrije in (nizko dimenzionalne) topologije je postavil ruski matematik ***Mikhael Gromov***, dobitnik ***Abelove nagrade*** v letu 2009.

Pojem Riemannove ploskve se je prvič eksplicitno pojavil leta 1913 v knjigi z naslovom 'Die Idee der Riemannschen Fläche' (Ideja Riemannove ploskve) nemškega matematika ***Hermanna Weyla*** (zadnja izdaja: Teubner-Archiv zur Mathematik. Supplement, 5. B. G., Teubner, Stuttgart, 1997). Več različnih motivov je vodilo do tega koncepta. Eden od njih je dejstvo, da analitično nadaljevanje holomorfnih funkcij na domenah v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ pogosto vodi do večličnih holomorfnih funkcij.

Primer 1. Kvadratni koren $\sqrt{z}$ je dobro definirana holomorfna funkcija na vsaki enostavno povezani domeni $D \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (v resnici dobimo dve funkciji $\pm\sqrt{z}$), vendar postane dvolična na $\mathbb{C}^*$, saj nimamo konzistentne izbire znaka korena. Podobno velja za kompleksni logaritem $\log z = \log |z| + \mathrm{i} \arg z$, ki ima neskončno vej, vsaki dve pa se razlikujeta za celoštevilski večkratnik števila $2\pi\mathrm{i}$. $\square$

Riemann (1951): Večlično holomorfno funkcijo f lahko razumemo kot enolično holomorfno funkcijo $\widetilde{f}$ na neki 'Riemannovi domeni' nad $\mathbb{C}$. Natančneje, konstruiramo lahko Hausdorffov topološki prostor X, lokalno homeomorfno projekcijo $\pi\colon X \to \mathbb{C}$ ter zvezno funkcijo $\widetilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$, tako da je za vsak lokalni inverz $(\pi|_U)^{-1}\colon \pi(U) \to U \subset X$ projekcije π kompozicija $\widetilde{f} \circ (\pi|_U)^{-1}\colon \pi(U) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija na množici $\pi(U) \subset \mathbb{C}$, ki predstavlja eno od vej dane holomorfne funkcije f. Največja taka ploskev $(X, \pi, \widetilde{f})$ se imenuje ***Riemannova ploskev funkcije*** f.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, bend left, "\widetilde{f}"] & \\
\mathbb{C} \supset D \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Primer 2. Naj bo $X = \mathbb{C}$ in $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eksponentna preslikava $\pi(z) = \mathrm{e}^z$. Njena zaloga vrednosti je $\pi(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ in π je lokalno biholomorfna. (Dejansko je eksponentna preslikava $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \mathrm{e}^z$, holomorfna krovna projekcija). Večlično holomorfno funkcijo $f(\zeta) = \log \zeta$ na domeni $D = \mathbb{C}^*$ lahko dvignemo v naslednjem diagramu do enolične holomorfne funkcije $\widetilde{f}(z) = z$ na ploskvi $X = \mathbb{C}$. $\square$

Druga naravna motivacija za razvoj teorije Riemannovih ploskev pa je bila njihova tesna zveza s kompleksnimi ter algebraičnimi krivuljami v kompleksnih mnogoterostih kot so Evklidski prostor $\mathbb{C}^n$, kompleksni projektivni prostor $\mathbb{CP}^n$ itd.

Kot preprost primer si oglejmo ***algebraične krivulje*** v $\mathbb{C}^2$. Vsaka taka krivulja je podana z neko enačbo

$$C = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2\colon P(z, w) = 0\},$$

kjer je $P \in \mathbb{C}[z, w]$ holomorfen polinom dveh kompleksnih spremenljivk:

$$P(z, w) = \sum_{j+k \le n} c_{j,k} z^j w^k = a_0(z) w^n + a_1(z) w^{n-1} + \cdots + a_n(z).$$

Stopnja $\mathrm{st}(P) \in \mathbb{Z}_+$ polinoma P je največja stopnja $j + k$ monomov $c_{j,k} z^j w^k$ v P z neničelnim koeficientom $c_{j,k} \neq 0$. Če je $\mathrm{st}(P) = n$, so koeficienti $a_j(z)$ v zgornjem zapisu polinomi v spremenljivki $z \in \mathbb{C}$ stopnje $\mathrm{st}(a_j) \le j$; torej je $a_0 \in \mathbb{C}$ konstanta. Po linearni zamenjavi koordinat (z, w) na $\mathbb{C}^2$, ki jo lahko izberemo poljubno blizu identiteti, smemo privzeti $a_0 \neq 0$. Fiksirajmo točko $z \in \mathbb{C}$. Po osnovnem izreku algebre ima polinomska enačba $P(z, w) = 0$ natanko n korenov $\alpha_1(z), \alpha_2(z), \ldots, \alpha_n(z)$, šteto z njihovo algebraično večkratnostjo. Torej je

$$P(z, w) = a_0 \prod_{j=1}^{n} (w - \alpha_j(z)).$$

Vietove formule nam podajajo zveze med koreni $\alpha_j(z)$ in koeficienti $a_i(z)$ danega polinoma. Številu n pravimo ***stopnja krivulje*** C.

Korenov $w_j(z)$ v splošnem ne moremo urediti tako, da bi dobili globalno dobro definirane funkcije, kar vidimo že v primeru polinoma $w^2 - z = 0$ s korenoma $w = \sqrt{z}$. Če so za neko vrednost $z = z_0 \in \mathbb{C}$ koreni $w_1(z_0), \ldots, w_n(z_0)$ med seboj različni, pa obstaja odprta okolica $U \subset \mathbb{C}$ točke z_0 (majhen odprt disk okrog z_0), na kateri so koreni $w_j(z)$ holomorfne (algebraične) funkcije spremenljivke $z \in U$. (Dokaz je podan v razd. III.10 o normalizaciji kompleksne krivulje.) Če je P nerazcepen v kolobarju polinomov $\mathbb{C}[z, w]$, potem so koreni polinoma $w \mapsto P(z, w)$ med seboj različni za vse razen končno mnogo vrednosti $E = \{z_1, \ldots, z_k\} \subset \mathbb{C}$ spremenljivke $z \in \mathbb{C}$. Množica E se imenuje ***diskriminantna množica*** polinoma P.

Označimo s $\pi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ koordinatno projekcijo $\pi(z, w) = z$. Zožitev $\pi|_C\colon C \to \mathbb{C}$ projekcije π na krivuljo C nam da ***razvejan analitičen krov***. Nad točkami $z_j \in E$ iz diskriminantne množice ležijo ***razvejišča*** preslikave $\pi|_C\colon C \to \mathbb{C}$, to so tiste točke $p \in C$, za katere projekcija $\pi|_C$ ni injektivna v nobeni okolici p v $\mathbb{C}$. Nad komplementom diskriminantne množice pa dobimo ***nerazvejano holomorfno krovno projekcijo***

$$\pi\colon C \setminus \pi^{-1}(E) \to \mathbb{C} \setminus E.$$

Za vsako kompleksno krivuljo C v poljubni kompleksni mnogoterosti X bomo konstruirali Riemannovo ploskev R in holomorfno preslikavo $f\colon R \to X$, tako da je $f(R) = C$ in je f biholomorfna razen v singularnih točkah krivulje C. (Glej izrek 66.) Par (R, f) s to lastnostjo imenujemo ***normalizacija*** kompleksne krivulje C.

Primer 3. Oglejmo si kompleksno krivuljo

$$C = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2\colon z^3 = w^2\}.$$

Točka $(0, 0) \in C$ je singularna točka krivulje C, saj nobena projekcija te krivulje na kakšno kompleksno premico skozi $(0, 0)$ v $\mathbb{C}^2$ ni injektivna v okolici te točke. Projekcija $\pi_1(z, w) = z$, zožena na C, je dvolisten razvejan krov $\pi_1\colon C \to \mathbb{C}$ z edinimi razvejiščem nad točko $z = 0$. (Za $z \neq 0$ dobimo $\pi_1^{-1}(z) \cap C = \{\pm\sqrt{z^3}\}$.) Podobno je projekcija $\pi_2(z, w) = w$, zožena na C, trolisten razvejan krov z edinimi razvejiščem nad točko $w = 0$.

Preslikava

$$f\colon R = \mathbb{C} \to C \subset \mathbb{C}^2, \quad f(\zeta) = (\zeta^2, \zeta^3)$$

je holomorfna ter injektivna. Njena zožitev na $\mathbb{C}^*$ preslika $\mathbb{C}^*$ biholomorfno na punktirano krivuljo $C \setminus \{(0, 0)\}$; torej f podaja normalizacijo krivulje C s kompleksno ravnino $R = \mathbb{C}$. Preslikava f ni biholomorfna v nobeni okolici točke 0. Spremenljivko $\zeta \in \mathbb{C}$ imenujemo ***uniformizacijska spremenljivka*** krivulje C. Iz enačb $z = \zeta^2$, $w = \zeta^3$ izrazimo $\zeta = w/z$. Torej je identiteta $\zeta \mapsto \zeta \in \mathbb{C}$ kompozicija holomorfne preslikave $f\colon \mathbb{C} \to C \subset \mathbb{C}^2$ in racionalne funkcije w/z na $\mathbb{C}^2$. No moremo pa ζ izraziti kot kompozicijo preslikave f in holomorfne funkcije na $\mathbb{C}^2$, kar se da preprosto preveriti z razvojem v potenčno vrsto. $\square$

I.2 Definicija Riemannove ploskve in primeri

V tem razdelku bomo najprej ponovili pojem topološke ploskve, zatem pa uvedli pojem Riemannove ploskve, to je topološka ploskev skupaj z izborom kompleksne strukture.

Definicija 1. ***Topološka mnogoterost*** realne dimenzije $n \in \mathbb{Z}_+$ (brez roba) je Hausdorffov, 2-števni topološki prostor X, ki je ***lokalno evklidski*** dimenzije n v naslednjem smislu:

- Za vsako točko $x_0 \in X$ obstaja odprta okolica $x_0 \in U \in X$ in homeomorfizem $\phi\colon U \to U'$ na neko odprto množico $U' \subset \mathbb{R}^n$.

Dimenzijo mnogoterosti označimo z $\dim X = \dim_{\mathbb{R}} X$.

Vsak par (U, ϕ) kot v zgornji definiciji imenujemo ***lokalna karta*** na X, inverzno preslikavo $\phi^{-1}\colon U' \to U \subset X$ pa imenujemo ***lokalna parametrizacija*** mnogoterosti X.

Topološki atlas na topološki mnogoterosti X je družina lokalnih kart $\mathcal{U} = \{(U_j, \phi_j)\}_{j\in J}$, za katero velja $\bigcup_{j\in J} U_j = X$ (to je, družina $\{U_j\}_{j\in J}$ je odprto pokritje prostora X).

Topološko mnogoterost z robom definiramo tako, da v zgornji definiciji nadomestimo modelni prostor $\mathbb{R}^n$ z zaprtim polprostorom

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n \geq 0\}\,.$$

Če je X topološka mnogoterost z robom, je ***rob mnogoterosti*** ∂X množica vseh točk $p \in X$, za katere obstaja lokalna karta (U, ϕ) na X, ki zadošča $p \in U$ in $\phi(p) \in \partial\mathbb{H}^n = \{x_n = 0\}$.

Rob ∂X je dobro definiran: če je $\phi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ za neko lokalno karto okrog točke $p \in X$, potem velja isto za vsako lokalno karto. To sledi iz točke (a) v naslednjem izreku. Točka (b) pa pove, da je število n v definiciji dimenzije mnogoterosti natanko določeno.

Izrek 1 (Brouwer). (a) *Če je odprta množica $U \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfna množici $V \subset \mathbb{R}^n$, potem je tudi množica V odprta v $\mathbb{R}^n$.*

(b) *Če je odprta neprazna množica $U \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfna odprti množici $V \subset \mathbb{R}^m$, potem je $n = m$.*

Očitno je rob ∂X topološka mnogoterost dimenzije $n - 1$ brez roba: $\partial(\partial X) = \emptyset$.

Izrek 2. *Vsaka topološka mnogoterost je:*

1. *lokalno povezana s potmi;*
2. *lokalno kompaktna;*
3. *števno kompaktna: $X = \cup_{j=1}^{\infty} K_j$, kjer je vsak K_j kompakt;*

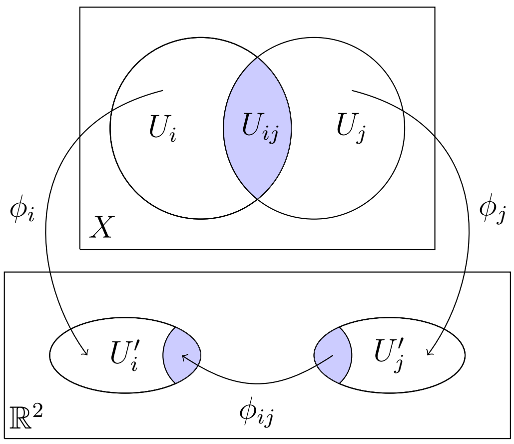
4. normalna (in s tem T_4, ker je tudi Hausdorffova);
5. metrizabilna;
6. parakompaktna.

Obstajajo lokalno evklidski Hausdorffovi topološki prostori, ki niso 2-števni (torej niso metrizabilni, števno kompaktni in parakompaktni). Primer je ***dolga premica*** (glej [9]).

Definicija 2. Naj bo X topološka mnogoterost brez roba realne dimenzije 2 ($\dim_{\mathbb{R}} X = 2$). ***Kompleksni atlas*** na X je družina $\mathcal{U} = \{(U_j, \phi_j) \colon j \in J\}$ lokalnih kart, kjer množice U_j tvorijo pokritje mnogoterosti X, tako da je za vsaki lokalni karti (U_i, ϕ_i) in (U_j, ϕ_j) z lastnostjo $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ homeomorfizem

$$\phi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} \colon \phi_j(U_{ij}) \to \phi_j(U_{ij})$$

biholomorfna preslikava. Preslikavi ϕ_{ij} pravimo ***prehodna preslikava*** med ϕ_j in ϕ_i.



Prehodne preslikave zadoščajo naslednjim lastnostim, ki očitno sledijo iz definicij:

$$\begin{aligned}
\phi_{ii} &= \mathrm{Id} \quad \text{na } U'_i, \\
\phi_{ij} \circ \phi_{ji} &= \mathrm{Id} \quad (\Longleftrightarrow \phi_{ij} = \phi_{ji}^{-1}), \\
\phi_{ij} \circ \phi_{j,k} \circ \phi_{ki} &= \mathrm{Id} \quad (\Longleftrightarrow \phi_{ik} = \phi_{ij} \circ \phi_{j,k}).
\end{aligned}$$

Primer 4. ***(Riemannova sfera)*** Naj bo S^2 dvodimenzionalna sfera. Topološko lahko S^2 predstavimo kot kompaktifikacijo ravnine $\mathbb{C}$ z eno točko, $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Množici $U = \mathbb{C}$ in $V = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ sestavljata odprto pokritje S^2, pri čemer je $U \cap V = \mathbb{C}^*$. Naj bo preslikava $\phi \colon U \to \mathbb{C}$ kar identiteta, preslikava $\psi \colon V \to \mathbb{C}$ pa naj bo podana s predpisom

$$\psi(z) = \begin{cases} 1/z, & \text{za } z \in \mathbb{C}^*; \\ 0, & \text{za } z = \infty. \end{cases} \tag{I.2.1}$$

Prehodna preslikava $\phi \circ \psi^{-1} \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ je tedaj $(\phi \circ \psi^{-1})(\zeta) = 1/\zeta$, torej je biholomorfna. Zato je $\{(U, \phi), (V, \psi)\}$ kompleksni atlas na S^2. Ta atlas definira na sferi S^2 strukturo enorazsežne kompleksne mnogoterosti. (Glej def. 3.) Sfera S^2, opremljena s to kompleksno strukturo, se imenuje Riemannova sfera. □

Primer 5. Konstrukcijo Riemannove sfere iz prejšnjega primera lahko geometrično ponazorimo s pomočjo ***stereografske projekcije***. Predstavimo S^2 kot enotno sfero v $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ s koordinatami (x, y, u):

$$S^2 = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 + u^2 = 1\}.$$

Označimo z $N = (0, 0, 1)$ severni pol in s $P = (0, 0, -1)$ južni pol sfere. Koordinatno ravnino $\{u = 0\} = \mathbb{R}^2$ identificiramo s kompleksno ravnino $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y = z\}$. Premica skozi poljubno točko $(x, y, u) \in S^2 \setminus \{N\}$ in severnim polom N seka ravnino $\{u = 0\} \cong \mathbb{C}$ v točki

$$\phi(x, y, u) = \frac{x}{1-u} + \mathrm{i}\frac{y}{1-u}.$$

Podobno definiramo projekcijo iz južnega pola P in dobimo preslikavo

$$\psi(x, y, u) = \frac{x}{1+u} + \mathrm{i}\frac{y}{1+u}.$$

S tem dobimo na S^2 atlas z dvema kartama

$$\phi \colon U = S^2 \setminus \{N\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}, \qquad \psi \colon V = S^2 \setminus \{P\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}$$

in s prehodno preslikavo

$$\psi \circ \phi^{-1}(z) = 1/\overline{z}, \qquad z \in \mathbb{C}^*.$$

Če nadomestimo karto $\psi = \psi_1 + \mathrm{i}\psi_2$ s kompleksno konjugirano karto $\overline{\psi} = \psi_1 - \mathrm{i}\psi_2$, dobimo holomorfno prehodno preslikavo

$$\overline{\psi} \circ \phi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$$

kot v prejšnjem primeru. Torej kompleksni atlas $\{(U, \phi), (V, \overline{\psi})\}$ definira na S^2 strukturo Riemannove sfere (glej primer 4). □

Naj bosta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ kompleksna atlasa na topološki ploskvi X. Pravimo, da sta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ ***ekvivalentna***, če je $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ spet kompleksni atlas na X. To pomeni, da je za vsak $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{U}$ in za vsak $(V_j, \psi_j) \in \mathcal{V}$ prehodna preslikava $\phi_i \circ \psi_j^{-1}$ biholomorfna na svoji domeni. Očitno je $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici vseh kompleksnih atlasov na ploskvi X. Vsak ekvivalenčni razred vsebuje natanko en maksimalni atlas, ki ga dobimo kot unijo vseh atlasov v danem ekvivalenčnem razredu.

Definicija 3. ***Kompleksna struktura*** na topološki ploskvi X je določena z izborom ekvivalenčnega razreda kompleksnih atlasov na X, oziroma (kar je ekvivalentno) z izborom ***maksimalnega kompleksnega atlasa*** na X.

Primer 6. Naj bo ravnina $\mathbb{C}$ opremljena s standardno kompleksno strukturo, ki jo določa atlas $\mathcal{U} = \{(\mathbb{C}, \mathrm{Id})\}$. Naj bo $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ homeomorfizem, ki ni holomorfen. Novo kompleksno strukturo na $\mathbb{C}$ določimo z atlasom $\mathcal{V} = \{(\mathbb{C}, \phi)\}$. Očitno atlasa $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ nista ekvivalentna, torej dobimo dve različni kompleksni strukturi na $\mathbb{C}$. Vendar sta ti dve strukturi biholomorfni, kot bomo videli v nadaljevanju. $\square$

Definicija 4. Topološka ploskev X skupaj z izborom holomorfne strukture se imenuje ***Riemannova ploskev*** ali tudi ***enodimenzionalna kompleksna mnogoterost***.

Analogno definiramo pojem kompleksne mnogoterosti dimenzije $n > 1$. Modelni prostor je v tem primeru evklidski prostor $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Običajna identifikacija, ki jo bomo uporabljali tudi mi, je

$$\mathbb{C}^n \ni (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + \mathrm{i}y_1, \dots, x_n + \mathrm{i}y_n) \cong (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Za definicijo in osnovne lastnosti holomorfnih funkcij več spremenljivk glej §III.1.

Definicija 5. Naj bo X realna $2n$-dimenzionalna topološka mnogoterost. ***Kompleksen atlas*** na X je topološki atlas $\mathcal{U} = \{(U_j, \phi_j)\}$ s kartami $\phi_j\colon U_j \to U_j' \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, tako da so vse prehodne preslikave $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ biholomorfne. ***Kompleksna struktura*** na X je določena z izbiro ekvivalenčnega razreda kompleksnih atlasov, oz. z izbiro maksimalnega kompleksnega atlasa. ***Kompleksna mnogoterost*** kompleksne dimenzije n je realna mnogoterost X realne dimenzije $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$ skupaj z izborom kompleksne strukture. Kompleksno dimenzijo označimo z $\dim_{\mathbb{C}} X = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} X$.

Modelna kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije n je kompleksni evklidski prostor $\mathbb{C}^n$, opremljen z atlasom $\{(\mathbb{C}^n, \mathrm{Id})\}$. Drug zelo pomemben razred modelnih kompleksnih mnogoterosti so kompleksni projektivni prostori $\mathbb{CP}^n$.

Primer 7. ***Kompleksni projektivni prostor*** dimenzije n, $\mathbb{CP}^n$, definiramo kot množico vseh kompleksnih premic skozi izhodišče v $\mathbb{C}^{n+1}$ (to je, enodimenzionalnih kompleksnih podprostorov prostora $\mathbb{C}^{n+1}$). Vsaka kompleksna premica $\lambda \subset \mathbb{C}^{n+1}$ je določena z izborom poljubne točke $0 \neq z = (z_0, \dots, z_n) \in \lambda$; označimo to premico z $[z_0\colon z_1\colon \cdots\colon z_n]$. To so t.i. ***homogene koordinate*** na $\mathbb{CP}^n$. Očitno velja

$$[tz_0\colon tz_1\colon \cdots\colon tz_n] = [z_0\colon z_1\colon \cdots\colon z_n], \qquad t \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

in to so edine identifikacije. Torej je $\mathbb{CP}^n$ kvocient množice $\mathbb{C}^{n+1}_* = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ po ekvivalenčni relaciji, definirani z množenjem s poljubnim neničelnim kompleksnim številom. Kvocientno projekcijo označimo s

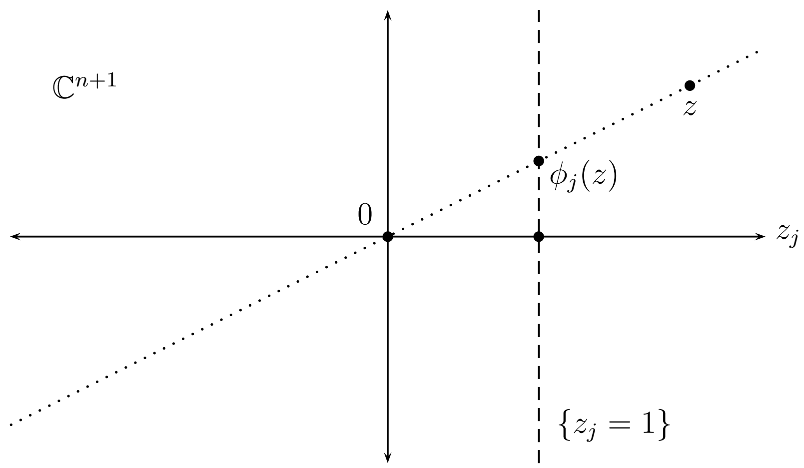
$$\pi\colon \mathbb{C}^{n+1}_* \longrightarrow \mathbb{CP}^n, \quad \pi(z_0, z_1, \dots, z_n) = [z_0\colon z_1\colon \cdots\colon z_n] \in \mathbb{CP}^n.$$

Na $\mathbb{CP}^n$ obstaja natanko ene struktura kompleksne mnogoterosti dimenzije n, za katero je projekcija π holomorfna preslikava (glej §I.3 in §III.1). Kompleksni atlas na $\mathbb{CP}^n$ sestavljajo karte (U_j, ϕ_j) $(j = 0, 1, \dots, n)$, kjer je

$$U_j = \{[z_0\colon z_1\colon \cdots\colon z_n] \in \mathbb{P}^n\colon z_j \neq 0\},$$

$$\phi_j\big([z_0\colon z_1\colon \cdots \colon z_n]\big) = \left(\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}\right) \in \mathbb{C}^n.$$

Če identificiramo $\mathbb{C}^n$ s hiperravnino $\{z_j = 1\}$ v $\mathbb{C}^{n+1}$, je $\phi_j([z_0\colon z_1\colon \cdots \colon z_n])$ ravno presečna točka kompleksne premice, ki jo določa vektor $(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}_*$, s hiperravnino $\{z_j = 1\} \cong \mathbb{C}^n$. (Pri tem izpustimo koordinato $z_j = 1$.) Glej sliko I.1.



Slika I.1: Afine koordinate na $\mathbb{CP}^n$

Očitno je ϕ_j bijekcija množice U_j na $\mathbb{C}^n$ z inverzno preslikavo

$$\phi_j^{-1}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = [\zeta_1\colon \ \ldots \colon \zeta_j\colon 1\colon \zeta_{j+1} \ldots \colon \zeta_n] \in \mathbb{CP}^n.$$

Za vsak par indeksov $0 \le i < j \le n$ velja

$$(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_{i+1}}, \ldots, \frac{\widehat{\zeta_{i+1}}}{\zeta_{i+1}}, \ldots, \frac{1}{\zeta_{i+1}}, \ldots \frac{\zeta_n}{\zeta_{i+1}}\right)$$

na množici $\{\zeta_{i+1} \neq 0\} \subset \mathbb{C}^n$. Ker so prehodne preslikave podane z ulomljenimi linearnimi funkcijami in so zato holomorfne izven ničelne množice imenovalca, je družina $\{(U_j, \phi_j)\colon j = 0, \ldots, n\}$ res kompleksni atlas na $\mathbb{CP}^n$.

V primeru $n = 1$ imamo dve karti $\phi_0\colon U_0 \to \mathbb{C}$, $\phi_1\colon U_1 \to \mathbb{C}$ s prehodno preslikavo $(\phi_0 \circ \phi_1^{-1})(\zeta) = 1/\zeta$. Torej je $\mathbb{CP}^1$ ravno Riemannova sfera (glej primer 4). $\square$

Vsaka domena (odprta množica) Ω v kompleksni mnogoterosti X je spet kompleksna mnogoterost iste dimenzije $\dim \Omega = \dim X$, atlas na Ω pa dobimo tako, da vsaki karti (U, ϕ) iz danega atlasa na X priredimo karto $(U \cap \Omega, \phi|_{U\cap\Omega})$.

Kartezični produkt $X \times Y$ dveh kompleksnih mnogoterosti je kompleksna mnogoterost, če jo opremimo s ***produktnim atlasom***: za vsak par kart (U, ϕ) na X in (V, ψ) na Y

dobimo karto $(U \times V, \phi \times \psi)$ an $X \times Y$. Pri tem je $(\phi \times \psi)(x, y) = (\phi(x), \psi(y))$. Očitno je $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.

Druge pomembne konstrukcije novih kompleksnih mnogoterosti so ***holomorfni krovi*** in ***holomorfni kvocienti***, ***kompleksne podmnogoterosti*** dane kompleksne mnogoterosti, ***holomorfni svežnji***, itd. Nekatere od teh konstrukcij si bomo ogledali v nadaljevanju. Poseben poudarek bo na povezavi med ***kompleksnimi krivuljami*** v kompleksnih mnogoterostih (to so kompleksno enodimenzionalne analitične množice) in Riemannovimi ploskvami; temu je posvečeno drugo poglavje.

I.3 Holomorfne funkcije in preslikave Riemannovih ploskev

Naj bo X Riemannova ploskev in $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ nek kompleksen atlas na X, ki določa izbrano kompleksno strukturo.

Definicija 6. Funkcija $f\colon X \to \mathbb{C}$ je ***holomorfna*** v točki $x \in X$, če obstaja lokalna karta $(U, \phi) \in \mathcal{U}$, tako da je $x \in U$ in je funkcija $f \circ \phi^{-1}\colon \phi(U) \to \mathbb{C}$ holomorfna. Funkcija f je holomorfna na X, če je holomorfna v vsaki točki $x \in X$.

Trditev 1. *Funkcija $f\colon X \to \mathbb{C}$ je holomorfna natanko tedaj, ko je za vsako lokalno karto (U, ϕ) iz maksimalnega atlasa na X funkcija $f \circ \phi^{-1}\colon \phi(U) \to \mathbb{C}$ holomorfna.*

Dokaz. Ker je vsak atlas $\mathcal{U}$ podmnožica pripadajočega maksimalnega atlasa $\widetilde{\mathcal{U}}$, je implikacija $(\Leftarrow)$ očitna.

Recimo sedaj, da je funkcija $f\colon X \to \mathbb{C}$ holomorfna v smislu definicije 6. Naj bo (U, ϕ) poljubna karta iz maksimalnega atlasa. Izberimo točko $x \in U$. Po predpostavki obstaja karta $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{U}$, $x \in U_i$, tako da je funkcija $f \circ \phi_i^{-1}\colon \phi_i(U_i) \to \mathbb{C}$ holomorfna. Očitno velja

$$f \circ \phi^{-1} = f \circ (\phi_i^{-1} \circ \phi_i) \circ \phi^{-1} = (f \circ \phi_i^{-1}) \circ (\phi_i \circ \phi^{-1}).$$

Prehodna preslikava $\phi_i \circ \phi^{-1}$ med dvema kartama v atlasu $\widetilde{\mathcal{U}}$ je biholomorfna na svoji domeni. Ker je kompozicija holomorfnih funkcij spet holomorfna, iz zgornje enačbe sledi, da je funkcija $f \circ \phi^{-1}$ holomorfna v okolici točke $\phi(x)$. $\square$

Zožitev kompleksne strukture na odprto podmnožico. Če je Ω odprta podmnožica v Riemannovi ploskvi X, dobimo na Ω inducirano strukturo Riemannove ploskve tako, da karte v danem holomorfnem atlasu $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ na X zožimo na Ω, torej vzamemo na Ω kompleksen atlas

$$\mathcal{V} = \{(U_i \cap \Omega, \phi_i|_{U_i \cap \Omega})\}.$$

Funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ je holomorfna v tej strukturi natanko tedaj, ko je holomorfna v originalni strukturi na X.

Definicija 7. Naj bosta X in Y Riemannovi ploskvi. Preslikava $f\colon X \to Y$ je holomorfna, če je zvezna in je za vsak par lokalnih kart (U, ϕ) na X in (V, ψ) na Y funkcija $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ holomorfna na svojem definicijskem območju.

$$\begin{array}{ccccc} X \supset & U & \xrightarrow{f} & V & \subset Y \\ & \downarrow \phi & & \downarrow \psi & \\ \mathbb{C}^n \supset & U' & \xrightarrow{\widetilde{f}} & V' & \subset \mathbb{C}. \end{array}$$

Enako kot v primeru funkcij preverimo, da je definicija neodvisna od izbire atlasov na X in Y v danih ekvivalenčnih razredih. Naj bosta $\mathcal{U} = \{(U_j, \phi_j)\}$ in $\mathcal{U}' = \{(U'_j, \phi'_j)\}$ ekvivalentna atlasa na X in $\mathcal{V} = \{(V_k, \psi_k)\}$ ter $\mathcal{V}' = \{(V'_k, \psi'_k)\}$ ekvivalentna atlasa na Y. Tedaj imamo za poljuben par kart

$$\begin{aligned} \psi_k \circ f \circ \phi_j^{-1} &= \psi_k \circ [(\psi'_l)^{-1} \circ \psi'_l] \circ f \circ [(\phi'_i)^{-1} \circ \phi'_i] \circ \phi_j^{-1} \\ &= [\psi_k \circ (\psi'_l)^{-1}] \circ [\psi'_l \circ f \circ (\phi'_i)^{-1}] \circ [\phi'_i \circ \phi_j^{-1}]. \end{aligned}$$

Funkciji v prvem in zadnjem oklepaju sta prehodni in s tem biholomorfni. Odtod sledi, da je funkcija $\psi_k \circ f \circ \phi_j^{-1}$ holomorfna natanko tedaj, ko je holomorfna funcija $\psi'_l \circ f \circ (\phi'_i)^{-1}$.

Trditev 2. *Kompozicija holomorfnih preslikav je holomorfna.*

Dokaz. To sledi neposredno iz definicije holomorfne preslikave in dejstva, da je kompozicija holomorfnih funkcij med odprtimi množicami v kompleksni ravnini spet holomorfna. □

Definicija 8. Preslikava $f\colon X \to Y$ je ***biholomorfna***, če je bijektivna ter sta preslikavi f in $f^{-1}\colon Y \to X$ holomorfni.

Trditev 3. *Če je f bijektivna in holomorfna, je tudi f^{-1} holomorfna.*

Dokaz. Iz elementarne kompleksne analize vemo, da ima vsaka injektivna holomorfna funkcija $f\colon D \to \mathbb{C}$ na domeni $D \subset \mathbb{C}$ neničeln kompleksni odvod ($f'(z) \neq 0$ za vsak $z \in D$) in je posledično biholomorfna na svojo sliko $f(D)$. Trditev sledi. □

Primer 8. Naj bo $\mathcal{U} = \{(\mathbb{C}, \phi)\}$ atlas na $\mathbb{C}$, kjer je $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nek homeomorfizem, ki ni holomorfen. Označimo s $\widetilde{\mathbb{C}}$ tako dobljeno Riemannovo ploskev, to je $\mathbb{C}$ opremljeno s kompleksno strukturo, ki jo določa atlas $\mathcal{U}$. Naj bo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija. Iz definicije sledi, da je f holomorfna kot funkcija na $\widetilde{\mathbb{C}}$ natanko tedaj, ko je $f \circ \phi^{-1}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna v običajnem smislu. Odtod sledi, da je funkcija $f = \phi$ biholomorfna preslikava Riemanove ploskve $\widetilde{\mathbb{C}}$ na standardno kompleksno ravnino $\mathbb{C}$. □

I.4 Meromorfne funkcije

V tem razdelku bomo videli, da lahko meromorfne funkcije interpretiramo kot holomorfne preslikave v Riemannovo sfero.

Meromorfna funkcija f na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ je funkcija, ki je definirana in holomorfna razen na neki diskretni množici točk $\{a_j\} \subset \Omega$, v vsaki točki a_j pa velja $\lim_{z \to a_j} |f(z)| = +\infty$. Taka točka se imenuje ***pol*** funkcije f. V okolici pola a_j ima f razvoj v ***Laurentovo vrsto*** s končnim glavnim delom:

$$f(z) = \sum_{k=-n_j}^{\infty} c_k (z - a_j)^k.$$

Lahko vzamemo, da je $c_{-n_j} \neq 0$. Če izpostavimo vodilni člen, dobimo

$$f(z) = \frac{1}{(z-a_j)^{n_j}} \big(c_{-n_j} + c_{-n_j+1}(z - a_j) + \cdots \big) := \frac{g_j(z)}{(z-a_j)^{n_j}}, \tag{I.4.1}$$

kjer je funkcija $g_j(z)$ holomorfna na neki okolici točke a_j in je $g_j(a_j) = c_{-n_j} \neq 0$.

Funkcijo f razširimo do preslikave $\widetilde{f} \colon \Omega \to S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ s predpisom

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{za } z \notin \{a_j\}; \\ \infty, & \text{za } z = a_j. \end{cases}$$

Preslikava $\widetilde{f}$ je zvezna po definiciji topologije na Riemannovi sferi.

Trdimo, da je $\widetilde{f}$ holomorfna preslikava. Naj bo $\mathcal{U} = \{(\Omega, \mathrm{Id})\}$ atlas na Ω in $\mathcal{V} = \{(\mathbb{C}, \mathrm{Id}), (\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \psi)\}$ atlas na S, pri čemer je karta ψ podana s predpisom (I.2.1), torej $\psi(z) = 1/z$. V okolici točke $z_0 \in \Omega \setminus \{a_j\}$ vzamemo na S lokalno karto $(\mathbb{C}, \mathrm{Id})$ in s tem dobimo $\widetilde{f} = f$ na tej okolici. Torej velja $\mathrm{Id} \circ \widetilde{f} \circ \mathrm{Id}^{-1} = f$ v okolici z_0. To pomeni, da je $\widetilde{f}$ holomorfna v okolici z_0.

Naj bo sedaj $U \subset \Omega$ okolica točke a_j, ki ne vsebuje nobene druge točke a_k, $k \neq j$. Okolico U zmanjšamo, tako da je funkcija g_j v (I.4.1) definirana na U in je $g_j(z) \neq 0$ za vsak $z \in U$. V okolici točke $\widetilde{f}(a_j) = \infty \in S$ vzamemo na S karto $(\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \psi)$. Funkcija

$$\psi \circ \widetilde{f}(z) \circ \mathrm{Id}^{-1} = \begin{cases} \dfrac{(z-a_j)^{n_j}}{g_j(z)}, & z \in U \setminus \{a_j\}; \\ 0, & z = a_j \end{cases}$$

je holomorfna na U. To pomeni, da je preslikava $\widetilde{f} \colon \Omega \to S$ holomorfna v okolici točke a_j.

Zgornjo konstrukcijo lahko posplošimo na meromorfne funkcije na poljubni Riemannovi ploskvi X.

Definicija 9. Naj bo X Riemannova ploskev. ***Meromorfna funkcija na*** X je funkcija f, ki je definirana in holomorfna na komplementu $X \setminus \{a_j\}$ neke zaprte diskretne množice $\{a_j\} \in X$, v vsaki točki a_j pa velja $\lim_{x \to a_j} |f(x)| = \infty$. Množica $\{a_j\}$ se imenuje ***množica polov***, ali tudi ***polarna množica***, meromorfne funkcije f.

Iz definicije sledi, da je holomorfna funkcija $f \colon X \setminus \{a_j\} \to \mathbb{C}$ (kjer je $\{a_j\}$ diskretna množica v X) meromorfna na X natanko tedaj, ko ima vsaka točka a_j okolico $U_j \subset X$ in lokalno karto $\phi_j \colon U_j \to U_j' \subset \mathbb{C}$, tako da ima funkcija $f \circ \phi_j^{-1}$ odpravljivo singularnost ali pol v točki $\phi_j(a_j)$. Meromorfna funkcija na kompaktni Riemannovi ploskvi ima končno polarno množico, saj je vsaka zaprta diskretna množica v kompaktnem prostoru končna.

Zgornja konstrukcija pokaže naslednjo trditev.

Trditev 4. *Vsaka meromorfna funkcija f na Riemannovi ploskvi X se razširi do holomorfne preslikave $\widetilde{f} \colon X \to S$ s predpisom $\widetilde{f}(a_j) = \infty$ za vsak pol a_j funkcije f.*

$$\begin{tikzcd}
X \setminus \{a_j\} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\widetilde{f}"] & S
\end{tikzcd}$$

Označimo z $\mathcal{M}(X)$ obseg vseh meromorfnih funkcij na Riemannovi ploskvi X. Zgornja trditev nam torej pove, da je

$$\mathcal{M}(X) \cup \{f \equiv \infty\} \cong \mathcal{O}(X, S)$$

množica vseh holomorfnih preslikav $X \to S$ ploskve X v Riemannovo sfero.

Izrek 3. *Množica $\mathcal{M}(S)$ meromorfnih funkcij na Riemannovi sferi je v bijektivni korespondenci z množico racionalnih funkcij na $\mathbb{C}$:*

$$\mathcal{M}(S) \cong \left\{ \frac{P(z)}{Q(z)} \colon P, Q \text{ polinom} \right\}.$$

Dokaz. Vemo že, da vsaka racionalna funkcija na $\mathbb{C}$ določa holomorfno preslikavo $\mathbb{C} \to S$. Ker je funkcija $f(1/z) = P(1/z)/Q(1/z)$ racionalna funkcija spremenljivke z, lahko f razširimo do holomorfne preslikave $S \to S$.

Obratno, naj bo $F \colon S \to S$ nekonstantna holomorfna preslikava. Oglejmo si holomorfno preslikavo $f := F|_{\mathbb{C}} \colon \mathbb{C} \to S$. Množica $f^{-1}(\infty) = \{a_1, ..., a_n\} \subset \mathbb{C}$ je končna, saj je $F^{-1}(\infty) \subset S$ diskretna na kompaktu S. V točkah a_j ima f pole. Lahko jo zapišemo v obliki

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} P_j \left(\frac{1}{z - a_j} \right) + g(z),$$

kjer je polinom P_j izbran tako, da je $P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right)$ glavni del meromorfne funkcije f v točki a_j, $g(z)$ pa je cela funkcija. Trdimo, da je g polinom. Opazimo, da velja

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) = F(\infty),$$

saj je F zvezna kot preslikava $S \to S$.

Če je $F(\infty) = c \in \mathbb{C}$, potem je g omejena v okolici točke ∞ in zato na vsej ravnini $\mathbb{C}$; po Liouvillejevem izreku sledi $g \equiv c$. Recimo sedaj, da je $F(\infty) = \infty$. Potem je g cela holomorfna funkcija in prava preslikava $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kar pomeni, da je polinom. (Glej §I.8.) Za podrobnejši dokaz zadnje trditve si ogledamo funkcijo $h(z) = 1/g(1/z)$ v okolici točke $z = 0$. Iz predpostavke sledi, da je h holomorfna v neki punktirani okolici točke $z = 0$ in $\lim_{z\to 0} h(z) = 0$. Torej je 0 odpravljiva singularnost. Naj bo $h(z) = c_m z^m + O(z^{m+1})$ njen Taylorjev razvoj, kjer je $c_m \neq 0$. Torej je $|h(z)| \geq 2|c_m||z^m|$ v neki okolici $z = 0$. Odtod sledi neenakost $|g(z)| \leq |z^m|/2|c_m|$ za vse dovolj velike $|z|$. Posplošeni Liouvillejev izrek nam pove, da je g polinom stopnje največ m. (Pri slednjem gre za uporabo Cauchyjevih ocen za odvode reda $> m$ funkcije g v točki $z = 0$.) □

I.5 Kompleksni torusi

Definicija 10. Naj bo f meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$ in $0 \neq \omega \in \mathbb{C}$. Funkcija f se imenuje ω-***periodična***, če velja $f(z + \omega) = f(z)$ za vsak $z \in \mathbb{C}$.

Funkcija $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} z/\omega}$, je očitno ω-periodična in je krovna projekcija. (Glej rezdelek I.10 za več o krovnih projekcijah.) Praslika poljubnega števila $w \in \mathbb{C}$ je množica vseh števil oblike $z + k\omega$, $k \in \mathbb{Z}$, kjer je z poljubna rešitev enačbe $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} z/\omega} = w$. Odtod preprosto sledi naslednja trditev.

Trditev 5. *Vsaka ω-periodična meromorfna funkcija f na $\mathbb{C}$ je oblike*

$$f(z) = g\left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} z/\omega}\right),$$

kjer je g meromorfna funkcija na $\mathbb{C}^*$.

Torej so ω-periodične meromorfne funkcije na $\mathbb{C}$ v bijektivni korespondenci z meromorfnimi funkcijami na kvocientu $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega$.

Če je f holomorfna na $\mathbb{C}$, je g holomorfna na $\mathbb{C}^*$. Če zapišemo $g(\zeta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \zeta^n$, dobimo razvoj ω-periodične holomorfne funkcije v ***Fourierovo vrsto***:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n z/\omega}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sedaj si bomo ogledali ***dvojno periodične*** meromorfne funkcije na $\mathbb{C}$. Naj bosta $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ kompleksni števili, katerih kvocient ni realen: $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$. Množica

$$\Gamma = \{k\omega_1 + l\omega_2 \colon k, l \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C} \tag{I.5.1}$$

je prosta abelova grupa, generirano z ω_1 in ω_2; torej je izomorfna grupi $\mathbb{Z}^2$. Grupa Γ deluje na $\mathbb{C}$ kot grupa holomorfnih translacij $\{z \mapsto z + \gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$. Diskretno abelovo podgrupo evklidskega prostora imenujemo tudi ***mreža***.

Definicija 11. Naj bo Γ grupa (I.5.1). Meromorfna funkcija f na $\mathbb{C}$ je Γ-***periodična***, če velja $f(z+\gamma) = f(z)$ za vsak $\gamma \in \Gamma$ in $z \in \mathbb{C}$. Ekvivalentno, $f(z+\omega_1) = f(z)$ in $f(z+\omega_2) = f(z)$ za vsak $z \in \mathbb{C}$.

Vsako tako funkcijo f lahko predstavimo kot funkcijo na kvocientnem prostoru

$$\mathbb{C}/\Gamma = \{[z] \colon z \in \mathbb{C}\},$$

kjer velja $[z] = [z']$ natanko tedaj, ko je $z' - z \in \Gamma$. Ta kvocient topološko predstavlja torus $S^1 \times S^1 = \mathbb{T}$. (Glje sliko (I.3) na str. 34.)

Trditev 6. *Na torusu $\mathbb{C}/\Gamma = \mathbb{T}$ obstaja natanko ena kompleksna struktura (do biholomorfizma natančno), za katero je kvocientna projekcija $\pi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{T}$ holomorfna. Vsaka holomorfna Γ-periodična preslikava $f \colon \mathbb{C} \to S$ v Riemannovo sfero je oblike $f = g \circ \pi$, kjer je $g \colon \mathbb{T} \to S$ holomorfna.*

Dokaz. Kvocientna projekcija π je topološka krovna projekcija, kar pomeni, da ima vsaka točka $x \in \mathbb{T}$ odprto okolico $U \subset \mathbb{T}$, tako da je $\pi^{-1}(U) = \cup_{j=1}^{\infty} V_j$, kjer so V_j odprte in paroma disjunktne podmožice v $\mathbb{C}$ in je projekcija $\pi \colon V_j \to U$ homeomorfizem za vsak j. Za lokalne karte na $\mathbb{T}$ vzamemo lokalne inverze $\left(\pi|_{V_j}\right)^{-1} \colon U \to V_j$. Prehodna preslikava med dvema kartama,

$$\left(\pi|_{V_j}\right)^{-1} \circ \left(\left(\pi|_{V_k}\right)^{-1}\right)^{-1} = \left(\pi|_{V_j}\right)^{-1} \circ \pi|_{V_k},$$

je translacija $z \mapsto z + \gamma$ za nek $\gamma \in \Gamma$. Ker je translacija holomorfna, tako dobljene karte sestavljajo kompleksen atlas na $\mathbb{T}$. Ostale trditve preprosto preverimo podobno kot v primeru enojno periodičnih funkcij. $\square$

Primer 9. Weierstrassova funkcija $\wp$. Vsaki mreži $\Gamma \subset \mathbb{C}$ z dvema generatorjema priredimo meromorfno funkcijo na $\mathbb{C}$ s predpisom

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Gamma} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Preprosto je preveriti, da vrsta konvergira enakomerno na kompaktih v $\mathbb{C}$ (kot preslikava v Riemannovo sfero S) in da je njena vsota Γ-periodična funkcija na $\mathbb{C}$. Torej $\wp$ inducira holomorfno preslikavo $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Gamma \to S$ torusa v Riemannovo sfero. Za podrobno konstrukcijo Weierstrassova funkcije $\wp$ glej npr. [1]. $\square$

I.6 Riemannove ploskve kot kompleksne krivulje

I.7 Lastnosti holomorfnih preslikav med Riemannovimi ploskvami

Iz definicij sledi, da vse lokalne lastnosti holomorfnih funkcij veljajo tudi za holomorfne preslikave med Riemannovimi ploskvami. Oglejmo si nekaj najpomembnejših.

1. **Izrek o odprti preslikavi:** Nekonstantna holomorfna preslikava je odprta.

2. **Princip maksimuma:** Naj bo $f \in \mathcal{O}(X)$ holomorfna funkcija na X; potem $|f|$ nima nobenega strogega lokalnega maksimuma. Če ima $|f|$ v neki točki $x_0 \in X$ šibki lokalni maksimum (t.j., za vsak x blizu x_0 velja $|f(x_0)| \geq |f(x)|$), potem je f konstantna na povezani komponenti točke x_0.

3. Posledica: Če je X kompaktna Riemannova ploskev, potem je vsaka holomorfna funkcija na X konstantna. (Na vsaki Riemannovi ploskvi pa obstaja veliko meromorfnih funkcij, kar ni povsem trivialno dokazati.)

4. Za vsako nekonstantno holomorfno preslikavo $f\colon X \to Y$ na povezani Riemannovi ploskvi X je množica $f^{-1}(y)$ diskretna za poljuben $y \in Y$.

5. **Princip identičnosti:** Naj bosta $f, g \in \mathcal{O}(X, Y)$ dve holomorfni preslikavi Riemannove ploskve X v Riemannovo ploskev Y, pri čemer je X povezana. Če se f in g ujemata na neki množici $E \subset X$ s stekališčem v X, potem je $f \equiv g$.

6. Posledica: Naj bo X kompaktna povezana Riemannova ploskev. Če se holomorfni preslikavi $f, g\colon X \to Y$ ujemata na neki neskončni množici $E \subset X$, sledi $f \equiv g$.

7. Če je X kompaktna, $f \in \mathcal{O}(X, Y)$ nekonstanta in X, Y povezani, potem je f surjektivna in je zato $Y = f(X)$ kompaktna.

8. Če je preslikava f kot v prejšnji točki tudi injektivna, potem je biholomorfna.

I.8 Stopnja holomorfne preslikave

V tem razdelku bomo uvedli pojem stopnje preslikave. To lahko naredimo za holomorfne preslikave $f\colon X \to Y$ med dvema kompaktnima povezanima Riemannovima ploskvama, ali (splošneje) v primeru, ko je f ***prava holomorfna preslikava*** med ne nujno kompaktnimi Riemannovimi ploskvami. Videli bomo, da stopnja preslikave pomeni število točk na generično izbranem vlaknu $f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Stopnja je v resnici topološki pojem, ki ga lahko definiramo za preslikave med poljubnima sklenjenima orientiranima mnogoterostima iste dimenzije.

Najprej definirajmo ***stopnjo holomorfne preslikave v točki***. Naj bo $f\colon X \to Y$ neka nekonstantna holomorfna preslikava in $x_0 \in X$ poljubna točka. Izberimo lokalno karto (U, ϕ) na X, $x_0 \in U$, $\phi(x_0) = 0$, ter lokalno karto (V, ψ) na Y, $f(x_0) \in V$, $\psi(f(x_0)) = 0$. Potem v okolici izhodišča $z = 0$ velja

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = cz^d + O(z^{d+1}) \tag{I.8.1}$$

za nek par števil $d \in \mathbb{N}$ in $c \neq 0$. S pravilno izbiro kart lahko dosežemo več:

Izrek 4 (Izrek o lokalni obliki holomorfne pereslikave)**.** *Če je X povezana Riemannova ploskev in je $f\colon X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava v neko drugo Riemannovo ploskev, potem za vsako točko $x_0 \in X$ obstajata lokalni karti (U, ϕ) na X, (V, ψ) na Y ter število $d \in \mathbb{N}$, tako da velja $x_0 \in U$, $\phi(x_0) = 0$, $f(x_0) \in V$, $\psi(f(x_0)) = 0$ in*

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = z^d. \tag{I.8.2}$$

Dokaz. Izberemo nek par lokalnih kart na X in Y v okolici točk x_0 in $f(x_0)$, v katerih velja (I.8.1). Oglejmo si Taylorjev razvoj funkcije $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ okrog točke $0 \in \mathbb{C}$:

$$\tilde{f}(z) = cz^d + c_{d+1}z^{d+1} + \cdots = z^d h(z), \tag{I.8.3}$$

kjer je $h(z) = c + c_{d+1}z + \cdots$ holomorfna funkcija na neki okolici točke $0 \in \mathbb{C}$. Ker je $h(0) = c \neq 0$, ima h na neki morda manjši okolici holomorfen logaritem, torej je $h = \mathrm{e}^g$ za neko holomorfno funkcijo g na okolici 0. Označimo s θ holomorfno funkcijo

$$\theta(z) = z\,\mathrm{e}^{g(z)/d} = z\sqrt[d]{h(z)}.$$

Tedaj je $\theta'(0) = \sqrt[d]{h(0)} = \sqrt[d]{c} \neq 0$, torej je θ biholomorfna na neki okolici 0. Kompozicija $\tilde{\phi} = \theta \circ \phi$ je lokalna karta v okolici $x_0 \in X$. Iz (I.8.3) sledi $\tilde{f}(z) = \theta(z)^d$, torej je $\tilde{f} \circ \theta^{-1}(z) = z^d$. Odtod sledi

$$(\psi \circ f \circ (\tilde{\phi})^{-1})(z) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \theta^{-1})(z) = z^d.$$

Torej formula I.8.2 velja za par lokalnih part $\tilde{\phi}$ (na X) in ψ (na Y).

Definicija 12. (Oznake kot zgoraj.) ***Stopnja*** f v točki x_0 je število

$$\mathrm{st}_{x_0} f := d \in \mathbb{N}$$

Naloga. Pokaži, da je definicija stopnje v točki neodvisna od izbire lokalnih kart.

Če je f funkcija na domeni $D \subset \mathbb{C}$, potem je stopnja f v poljubni točki $z_0 \in D$ naravno število $d = d(z_0) \in \mathbb{N}$, določeno s pogojem

$$f^{(d)}(z_0) \neq 0 \quad \text{in} \quad f^{(k)}(z_0) = 0,\ 1 \leq k < d.$$

V posebnem torej velja

$$\mathrm{st}_{z_0} f = 1 \Longleftrightarrow f'(z_0) \neq 0,$$

kar pomeni, da je f lokalno biholomorfna v točki x_0.

Geometrijski pomen stopnje je razivden iz naslednje trditve, ki sledi iz izreka 4.

Trditev 7. *Naj bo $f\colon X \to Y$ neka nekonstantna holomorfna preslikava in $d = \mathrm{st}_{x_0} f \in \mathbb{N}$ njena stopnja v neki točki $x_0 \in X$. Potem obstajata okolica $U \subset X$ točke x_0 ter okolica $V \subset Y$ točke $y_0 = f(x_0)$, tako da ima vsaka točka $y \in V \setminus \{y_0\}$ natanko d različnih praslik $f^{-1}(y) \cap U$ v množici U.*

Dokaz. Izberimo par lokalnih kart (U, ϕ) in (V, ψ), v katerih velja (I.8.2), torej f istreza funkciji $z \mapsto z^d$. Za vsako točko $y \in V \setminus y_0\}$ tedaj velja

$$x \in f^{-1}(y) \cap U \Longleftrightarrow \phi(x)^d = \psi(y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Torej praslike $f^{-1}(y) \cap U = \{x_1, \ldots, x_d\}$ ustrezajo korenom stopnje d kompleksnega števila $z = \psi(y) \neq 0$.

Definicija 13. Točka $x \in X$ je ***kritična točka*** (ali ***razvejišče***) preslikave f, če je $\mathrm{st}_x f > 1$. (V lokalnih koordinatah to velja natanko tedaj, ko je odvod $f'(x) = 0$ funkcije f v točki x enak nič.) Množico vseh razvejišč preslikave f označujemo z $\mathrm{br} f \subset X$. Slika $f(\mathrm{br} f) \subset Y$ se imenuje ***množica kritičnih vrednosti*** preslikave f.

Če je f nekonstantna preslikava, je množica $\mathrm{br} f$ diskretna, kar najlažje vidimo v lokalnih koordinatah: vsaka ničla odvoda $f'(z)$ nekonstantne holomorfne funkcije je izolirana.

Če je množica $\mathrm{br} f$ končna (kar vselej velja v primeru, ko je X kompaktna in f nekonstantna), definiramo ***razvejiščno število***

$$b(f) = \sum_{x \in \mathrm{br} f} (\mathrm{st}_x f - 1) = \sum_{x \in X} (\mathrm{st}_x f - 1) \in \mathbb{Z}_+.$$

Izrek 5 (Izrek o stopnji preslikave)**.** *Naj bosta X, Y kompaktni povezani Riemannovi ploskvi ter $f \in \mathcal{O}(X, Y)$ nekonstantna holomorfna preslikava. Število*

$$d(y) = \sum_{x \in X,\ f(x) = y} \mathrm{st}_x f \tag{I.8.4}$$

*je neodvisno od točke $y \in Y$; to število $d = d(y)$ se imenuje **stopnja preslikave** f. Množica $\{y \in Y : \# f^{-1}(y) < d\}$ je končna.*

Tu smo z $\#A$ označili kardinalnost končne množice A, to je število njenih elementov. Intuitivno povedano je stopnja d ravno število rešitev enačbe $f(x) = y$, če jih štejemo z algebraičnimi večkratnostmi.

Izrek o stopnji pove, da holomorfna preslikava med kompaktnima povezanima Riemannovima ploskvama zavzame vse vrednosti v enakem številu točk (šteto z algebraičnimi večkratnostmi). V primeru, ko je $Y = S = \widehat{\mathbb{C}}$ Riemannova sfera, dobimo odtod naslednjo posledico.

Posledica 1. *Vsaka meromorfna funkcija na kompaktni Riemannovi ploskvi ima enako število ničel in polov (šteto z algebraičnimi večkratnostmi).*

Dokaz. (Izreka 5) Naj bo $y_0 \in Y$ ter $f^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$. (Množica praslik je končna, saj je diskretna in je X kompaktna.) Po trditvi 7 ima vsaka točka $x_j \in f^{-1}(y_0)$ neko odprto okolico $U_j \subset X$, tako da ima enačba $f(x) = y$ natanko $\mathrm{st}_{x_j} f = d_j$ rešitev $x_{j,1}, \ldots, x_{j,d_j} \in U_j$ za vsak $y \in Y$ v neki punktirani okolici točke y_0. Okolice U_j izberimo dovolj majhne, tako da so paroma disjunktne.

Če je točka $y \in Y$ dovolj blizu y_0, potem enačba $f(x) = y$ nima nobene rešitve x v množici $K := X \setminus \cup_{j=1}^n U_j$. V nasprotnem primeru bi našli neko zaporedje točk $\{e_i\}_{i=1}^\infty \in K$, tako da bi veljalo $\lim_{i\to\infty} f(e_i) = y_0$. Ker je K kompaktna, ima zaporedje e_i stekališče $e \in K$. Iz zveznosti sledi $f(e) = y_0$, kar je protislovje, saj je $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Trdimo, da so vse rešitve $x_{j,1}, \ldots, x_{j,d_j} \in U_j$ enačbe $f(x) = y$ (kjer je $y \neq y_0$ blizu y_0) enostavne, to je stopnje ena. V primerno izbranem paru lokalnih holomorfnih kart okrog točke $x_j \in f^{-1}(y_0)$ in okrog y_0 je f podana s funkcijo $z \mapsto z^{d_j}$. Gledamo torej rešitve enačbe $z^{d_j} = \omega \neq 0$. Teh rešitev je natanko d_j (ravno vsi d_j-ti koreni števila ω) in so enostavne, saj je odvod $d_j z^{d_j - 1}$ funkcije $z \mapsto z^{d_j}$ različen od nič, če je $z \neq 0$. (Na tem mestu lahko uporabimo tudi sklep, da so ničle odvoda nekonstantne holomorfne funkcije izolirane.) Odtod in iz zgoraj dokazanega dejstva, da ni drugih rešitev izven množice $\cup_{j=1}^n U_j$, sledi

$$d(y) = \sum_{f(x)=y} \mathrm{st}_x f = d_1 + d_2 + \cdots + d_n = d(y_0) \in \mathbb{N}$$

za vse točke $y \in Y$, ki so dovolj blizu y_0. Ker to velja za poljubno točko $y_0 \in Y$, je funkcija $Y \ni y \mapsto d(y) \in \mathbb{N}$ lokalno konstantna na Y, torej je konstantna, če je Y povezana.

Isti dokaz pokaže tudi, da so točke $y \in Y$, v katerih je $\#f^{-1}(y) < d$, izolirane. Očitno je $\#f^{-1}(y) < d$ natanko tedaj, ko na vlaknu $f^{-1}(y)$ obstaja točka x stopnje $\mathrm{st}_x f > 1$, to je kritična točka preslikave f (glej def. 13). Torej je

$$\{y \in Y : \#f^{-1}(y) < d\} = f(\mathrm{br} f)$$

ravno množica kritičnih vrednosti preslikave f. Ker je ploskev Y kompaktna, je ta množica končna. $\square$

Trditev 8. *Naj bosta X in Y kompaktni povezani Riemannovi ploskvi. Nekonstantna holomorfna preslikava $f\colon X \to Y$ ima stopnjo ena natanko tedaj, ko je f biholomorfna.*

Dokaz. Če je st$f > 1$, potem f ni injektivna in zato ni biholomorfna. V primeru st$f = 1$ pa je f injektivna in zato biholomorfna na svojo sliko $f(X) \subset Y$. Ker sta X in Y kompaktni in povezani, je $f(X) = Y$, torej je f biholomorfizem X na Y. □

Primer 10. Videli smo, da je vsaka holomorfna preslikava $f\colon S \to S$ Riemannove sfere podana z neko racionalno funkcijo $f = P/Q$. Lahko vzamemo, da sta polinoma P in Q tuja, torej je ulomek okrajšan. Označimo stopnjo polinoma P s st$P = n$. Pokaži, da velja

$$\mathrm{st} f = \max\{\mathrm{st}\, P, \mathrm{st}\, Q\}.$$

Primer 11. Pokaži, da ima preslikava $\mathbb{T} \to S$ torusa $\mathbb{T}$ v Riemannovo sfero S, določena z Weierstrasovo funkcijo $\wp$ (glej primer 9), stopnjo dve. Preslikav stopnje ena po trditvi 8 ni, saj torus ni homeomorfen sferi. □

I.9 Prave holomorfne preslikave

V tem razdelku si bomo ogledali pojem *prave preslikave* ter izrek 5 o stopnji posplošili na prave holomorfne preslikave Riemannovih ploskev. Prave holomorfne preslikave igrajo izjemno pomembno vlogo v kompleksni analizi in geometriji.

Definicija 14. Zvezna preslikava $f\colon X \to Y$ se imenuje ***prava***, če je za vsak kompakt $K \subset Y$ tudi njegova praslika $f^{-1}(K)$ kompakt.

Naloga. Naj bosta X in Y topološki mnogoterosti. Dokaži naslednje trditve.

1. Če je X kompaktna, je vsaka zvezna preslikava $f\colon X \to Y$ prava.

2. Preslikava f je prava natanko tedaj, ko je za vsako (zaprto) diskretno množico $E \subset X$ tudi njena slika $f(E)$ diskretna v Y.

3. Naj bosta $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ in $D_2 \subset \mathbb{R}^m$ omejeni odprti množici. Preslikava $f\colon D_1 \to D_2$ je prava natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $\{z_j\} \subset D_1$ z lastnostjo $z_j \to \partial D_1$ velja $f(z_j) \to \partial D_2$.

4. Vsaka prava preslikava je zaprta. (To pomeni, da je slika vsake zaprte množice v X zaprta množica v Y).

5. **Izrek o lokalizaciji prave preslikave:** Naj bo $f\colon X \to Y$ prava preslikava, K kompaktna množica v Y in $E = f^{-1}(K) \subset X$ njena praslika. Potem za vsako odprto množico $U \subset X$, ki vsebuje E, obstaja odprta množica $V \subset Y$, ki vsebuje K, tako da je $f^{-1}(V) \subset U$.

6. Če je $f\colon X \to Y$ prava holomorfna preslikava Riemannovih ploskev, potem je praslika $f^{-1}(y) \subset X$ poljubne točke $y \in Y$ končna množica v X.

7. Vsaka prava holomorfna preslikava $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je polinom. (Glej dokaz izreka 3.)

Izrek 5 lahko sedaj formuliramo v naslednji splošnejši obliki.

Izrek 6 (Izrek o stopnji prave holomorfne preslikave)**.** *Naj bo $f\colon X \to Y$ prava holomorfna preslikava povezanih Riemannovih ploskev. Potem je število $d(y)$ (I.8.4) neodvisno od točke $y \in Y$. To število imenujemo stopnja preslikave f.*

Dokaz. Dokaz ostane praktično nespremenjen, če dodamo naslednji argument. Naj bo $y_0 \in Y$ in $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$; ta množica je končna (glej zgornjo nalogo). Izberimo odprte okolice $x_j \in U_j \subset X$ kot v dokazu. Po izreku o lokalizaciji prave preslikave obstaja odprta okolica $V \subset Y$ točke y_0, tako da je $f^{-1}(V) \subset \cup_{j=1}^n U_j$. Enačba $f(x) = y$ torej nima rešitev izven množice $\cup_{j=1}^n U_j$. Ostali sklepi v dokazu ostanejo nespremenjeni. Množica razvejišč $\mathrm{br} f \subset X$ in njena slika $f(\mathrm{br} f) \subset Y$ sta diskretni, a ne nujno končni. □

Primer 12. V prejšnji nalogi smo videli, da je vsaka prava holomorfna preslikava $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ podana z nekim holomorfnim polinomom P. Stopnja te preslikave (v smislu zgornjega izreka) je enaka stopnji polinoma P. To preslikavo lahko razširimo do holomorfne preslikave $f\colon S \to S$ Riemannove sfere, ki v točki ∞ zavzame vrednost $f(\infty) = \infty$ z večkratnostjo n in nima drugih polov. □

Kot primer izreka 6 si oglejmo prave preslikave enotnega diska $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$.

Trditev 9. *Vsaka prava holomorfna preslikava $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ je oblike*

$$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}, \qquad a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{D}. \tag{I.9.1}$$

Naloga. Pokaži, da je stopnja te preslikave enaka d in da se f razširi do holomorfne preslikave $S \to S$ stopnje d. (Tu je $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Riemannova sfera.) □

Dokaz. Označimo produkt na desni strani (I.9.1) kot funkcijo $g(z)$. Produkt sestavljajo avtomorfizmi diska, ki preslikajo rob $\partial\mathbb{D} = \{|z| = 1\}$ nazaj v rob; torej je f prava preslikava.

Obratno, naj bo $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ prava holomorfna preslikava. Torej ima f končno mnogo ničel, recimo $a_1, ..., a_d \in \mathbb{D}$, ki jih navajamo z njihovo algebraično večkratnostjo. Naj bo g produkt v (I.9.1) s temi ničlami. Kvocient $h(z) := f(z)/g(z)$ je tedaj holomorfna funkcija brez ničel na disku z lastnostjo $\lim_{|z| \to 1} |h(z)| = 1$. Če h ni konstantna, po principu maksimuma velja $|h(z)| < 1$ za $z \in \mathbb{D}$. Ker je $h \neq 0$, lahko naredimo enak sklep za funkcijo $1/h$ in dobimo $1/|h(z)| < 1$. To pomeni $1 < 1$, kar pa ni res. Zato je $h(z)$ konstantna funkcija in $|h| = 1$, torej $h = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ za nek $\theta \in \mathbb{R}$. □

I.10 Krovni prostori

V tem razdelku bomo ponovili nekaj osnovnih dejstev iz elementarne homotopske teorije in teorije krovnih prostorov. Za bolj poglobljeno obravnavo glej npr. [15]. Razdelek je priprava na uniformizacijsko teorijo Riemannovih ploskev v §I.12.

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednje dejstvo. Naj bo $\pi\colon Y \to X$ lokalni homeomorfizem topoloških ploskev. Potem za vsako strukturo Riemannove ploskve na X obstaja natanko ena (do biholomorfizma natančno) struktura Riemannove ploskve na Y, tako da je π holomorfna preslikava. Lokalne karte v kompleksnem atlasu na Y so kar kompozicije $\phi_\alpha \circ \pi$, kjer so ϕ_α lokalne karte v izbranem kompleksnem atlasu na X.

X.1 Homotopija poti in preslikav

Naj bo X topološka mnogoterost. (Obravnavane pojme lahko uspešno študiramo na širšem razredu topoloških prostorov, ki so povezani s potmi in lokalno povezani s potmi.)

Homotopija poti v X z začetno točko $p \in X$ in končno točko $q \in X$ je družina poti $\gamma_s\colon [0,1] \to X$, ki je zvezno odvisna od parametra $s \in [0,1]$, tako da za vsak $s \in [0,1]$ velja $\gamma_s(0) = p$ in $\gamma_s(1) = q$.

Homotopijo poti lahko razumemo kot zvezno preslikavo $\gamma\colon [0,1]^2 \to X$; pri fiksni vrednosti parametra $s \in [0,1]$ dobimo pot $[0,1] \ni t \mapsto \gamma_s(t) = \gamma(t,s)$.

Poti γ_0 in γ_1 s skupno začetno točko p in končno točko q sta homotopni ($\gamma_0 \simeq \gamma_1$), če obstaja homotopija poti od γ_0 do γ_1.

V primeru $p = q$ so poti od p do q *zanke* v p. Dve zanki proglasimo za ekvivalenti, če sta homotopni (kot zanki v p). Množica ekvivalenčnih razredov zank

$$\pi_1(X;p) = \{[\gamma]\colon \gamma \text{ je zanka pripeta v točki } p\}$$

se imenuje ***fundamentalna grupa*** prostora X z bazno točko p. Lahko je preveriti, da je to grupa za operacijo ***stik poti*** $\gamma\gamma'$; to je zanka, ki jo dobimo, če gremo najprej po prvi zanki γ, zatem pa še po drugi zanki γ'.

Naloga. Dokaži, da je ekvivalenčni razred stika zank $[\gamma\gamma']$ odvisen samo od ekvivalenčnih razredov $[\gamma]$ in $[\gamma']$, ni pa odvisen od izbire predstavnikov ekvivalenčnih razredov.

Če je X povezana mnogoterost, potem sta za poljubni dve točki $p, q \in X$ fundamentalni grupi $\pi_1(X;p)$ in $\pi_1(X;q)$ med seboj izomorfni, vendar v splošnem nimamo naravne izbire izomorfizma. Dejansko, če izberemo pot λ v X z začetkom v p in koncem v q, potem je za vsako zanko γ v p pot $\widetilde{\gamma} = \lambda^{-1}\gamma\lambda$ zanka v q. (Pri tem pomeni λ^{-1} inverzno pot, ki jo dobimo s spremembo smeri na poti λ.) Lahko je videti, da preslikava $\gamma \mapsto \lambda^{-1}\gamma\lambda$

inducira izomorfizem $\phi_\lambda : \pi_1(X;p) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X;q)$. Ta izomorfizem je v splošnem odvisen od homotopnega razreda poti λ. Če je λ' nekaj druga pot v X od p do q, je

$$(\lambda')^{-1}\gamma\lambda' = (\lambda')^{-1}\lambda\lambda^{-1}\gamma\lambda\lambda^{-1}\lambda' = \sigma(\lambda^{-1}\gamma\lambda)\sigma^{-1}$$

kjer je $\sigma = (\lambda')^{-1}\lambda$. Odtod vidimo, da je

$$\phi_{\gamma'} = [\sigma]^{-1} \circ \phi_\gamma \circ \sigma \colon \pi_1(X;p) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X;q),$$

pri čemer $[\sigma]$ označuje produkt na $\pi_1(X;q)$, induciran s stikom $\gamma \mapsto \sigma\gamma$. Torej se pri zamenjavi poti izomorfizem $\pi_1(X;p) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X;q)$ spremeni za notranji avtomorfizem grupe $\pi_1(X;q)$. Kljub temu, da nimamo naravnega izomorfizma med fundamentalnimi grupami v različnih baznih točkah, pogosto izpustimo bazno točko in pišemo kar $\pi_1(X)$.

Prostor X se imenuje ***enostavno povezan***, če je $\pi_1(X;p) = 0$ za vsako točko $p \in X$. Očitno je X enostavno povezan natanko tedaj, ko vsaka povezana komponenta X' prostora X vsebuje točko $p \in X'$, tako da je $\pi_1(X';p) = 0$. Torej je X enostavno povezan natanko tedaj, ko je vsaka njegova povezana komponenta enostavno povezana.

Vsaka zvezna preslikava $f\colon X \to Y$ inducira homomorfizem fundamentalnih grup

$$f_* = \pi_1(f)\colon \pi_1(X;p) \to \pi_1(Y;f(p)).$$

Preslikava f_* je inducirana s kompozicijo: Za poljubno zanko γ v X, pripeto v neki točki $p \in X$, je $f \circ \gamma$ zanka v Y pripeta v $f(p)$, njen homotopni razred v $\pi_1(Y;f(p))$ pa je odvisen le od homotopnega razreda $[\gamma] \in \pi_1(X;p)$. Torej dobimo na ta način preslikavo fundamentalnih grup. Ker kompozicija ohranja operacijo 'stik zank' na fundamentalni grupi, je f_* homomorfizem grup.

Splošnejši pojem homotopije je naslednji. Za poljuben par topoloških prostorov X, Y in zveznih preslikav $f, g\colon Y \to X$ je **homotopija** od f do g zvezna preslikava $F\colon Y \times [0,1] \to X$, tako da velja

$$F(\cdot\,,0) = f, \qquad F(\cdot\,,1) = g.$$

Homotopijo lahko razumemo kot družino zveznih preslikav $f_s = F(\cdot\,,s)\colon Y \to X$, ki je zvezno odvisna od parametra $s \in [0,1]$. Preslikavi $f, g : Y \to X$ sta **homotopni**, kar označimo $f \simeq g$, če obstaja kakšna homotopija od f do g. Podobno kot pri poteh zlahka ugotovimo, da je $\simeq$ ekvivalenčna relacija na množici $\mathcal{C}(Y,X)$ vseh zveznih preslikav $Y \to X$. Kvocientno množico (to je, množico homotopnih razredov preslikav $Y \to X$) označimo z $[Y,X]$.

X.2 Enoličnost dviga in monodromijski izrek

Naj bo $\pi\colon Y \to X$ lokalni homeomorfizem in $f\colon Z \to X$ neka zvezna preslikava. ***Dvig*** preslikave f (glede na π) je zvezna preslikava $\widetilde{f}\colon Z \to Y$, tako da je $\pi \circ \widetilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Trditev 10. *Naj bo Z povezana in naj bosta preslikavi $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2\colon Z \to Y$ dviga iste preslikave. Če velja $\widetilde{f}_1(z_0) = \widetilde{f}_2(z_0)$ za neko točko $z_0 \in Z$, potem je $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$.*

Dokaz. Množica $E = \{z \in Z \colon \widetilde{f}_1(z) = \widetilde{f}_2(z)\}$ je odprta, ker je π lokalni homeomorfizem, in zaprta, ker sta $\widetilde{f}_1$ in $\widetilde{f}_2$ zvezni preslikavi. Če E ni prazna, sledi, da je enaka Z. $\square$

Izrek 7. *Naj bo $\pi\colon Y \to X$ lokalni homeomorfizem in naj bo $\gamma_s\colon [0,1] \to X$ ($s \in [0,1]$) homotopija poti med točkama p in q v X. Naj bo $y_0 \in Y$, $\pi(y_0) = p$. Recimo, da za vsak $s \in [0,1]$ obstaja dvig $\widetilde{\gamma}_s\colon [0,1] \to Y$ poti γ_s, tako da velja $\widetilde{\gamma}_s(0) = y_0$ za vsak $s \in [0,1]$. Potem je končna točka $\widetilde{\gamma}_s(1) =: y_1$ neodvisna od $s \in [0,1]$.*

Dokaz. Ker je π lokalni homeomorfizem, lahko s pomočjo enoličnosti lokalnih dvigov pokažemo, da je družina dvigov $\widetilde{\gamma}_s$ zvezno odvisna od parametra $s \in [0,1]$. (Dokaz je podoben kot v izreku 8 spodaj, le da privzamemo obstoj dviga.) Zato je tudi končna točka $\widetilde{\gamma}_s(1) \in Y$ zvezno odvisna od s. Ker je $\pi(\widetilde{\gamma}_s(1)) = \gamma_s(1) = q$ za vsak $s \in [0,1]$ in je vlakno $\pi^{-1}(q) \subset Y$ diskretno, je preslikava $[0,1] \ni s \mapsto \widetilde{\gamma}_s(1) \in \pi^{-1}(q) \subset Y$ konstantna. $\square$

X.3 Krovni prostori in dvig preslikav

Definicija 15. Zvezna preslikava $\pi\colon Y \to X$ je ***krovna projekcija*** ali ***krov*** nad X, Y pa je ***krovni prostor*** nad prostorom X, če ima vsaka točka $x_0 \in X$ odprto okolico $U \subset X$, tako da je $\pi^{-1}(U) = \sqcup_j V_j$, kjer so V_j odprte paroma disjunktne podmnožice Y ter je $\pi|V_j\colon V_j \to U_j$ homeomorfizem za vsak indeks j. Prostor X se imenuje **bazni prostor**, Y pa **totalni prostor** krova.

Dva krova $\pi\colon Y \to X$ in $\pi'\colon Y' \to X$ (nad isto bazo X) sta ***izomorfna***, če obstaja homeomorfizem $\Phi\colon Y \to Y'$, ki zadošča pogoju $\pi' \circ \Phi = \pi$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y' \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & X \end{tikzcd}$$

To pomeni, da Φ preslika vsako vlakno $\pi^{-1}(x) = Y_x$ prvega krova bijektivno na vlakno Y'_x drugega krova nad isto bazno točko $x \in X$. Vsak tak homeomorfizem $\Phi\colon Y \to Y'$ se imenuje ***izomorfizem krovnih prostorov***.

Krov $\pi\colon Y \to X$ je ***trivialen***, če je izomorfen produktnemu krovu $Y' = X \times E \to X$, kjer je E neka diskretna množica. Očitno lahko E identificiramo z vlaknom $\pi^{-1}(x)$ danega krova nad poljubno točko $x \in X$.

Iz definicije krova sledi, da je vsak krovni prostor ***lokalno trivialen***, to je, vsaka točka v bazi X ima odprto okolico $U \subset X$, nad katero je krov trivialen.

Naj bo X povezan. Krovna projekcija $\pi\colon Y \to X$ se imenuje ***univerzalna krovna projekcija*** (in Y je ***univerzalni krovni prostor*** prostora X), če je prostor Y povezan in enostavno povezan.

Sedaj bomo dokazali nekaj najpomembnejših izrekov o obstoju dviga poti in dviga homotopije v krovu. Osnovni problem opisuje naslednji diagram, kjer je $\pi\colon Y \to X$ krovna projekcija, $f : Z \to X$ je dana zvezna preslikava, vprašanje pa je obstoj dviga $F : Z \to Y$, to je zvezne prelikave, ki zadošča pogoju $\pi \circ F = f$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Izrek 8 (Dvig poti v krovu)**.** *Če je $\pi\colon Y \to X$ krovna projekcija in je $\gamma\colon [0,1] \to X$ pot v X, potem za vsako točko $y_0 \in Y$, za katero je $\pi(y_0) = p = \gamma(0)$, obstaja natanko ena pot $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to Y$, ki zadošča pogojema $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$ in $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.*

Dokaz. Izberemo delitev $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ intervala $[0,1]$, tako da za vsak $k = 0, 1, \ldots, n-1$ slika $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset X$ segmenta $[t_k, t_{k+1}]$ leži v neki odprti povezani množici $U_k \subset X$, nad katero je krov $\pi\colon Y \to X$ trivialen. Naj bo $V_0 \subset Y$ tista povezana komponenta praslike $\pi^{-1}(U_0)$, ki vsebuje točko y_0. Zožitev projekcije $\pi|_{V_0}\colon V_0 \to U_0$ je homeomorfizem, zato lahko definiramo dvig $\widetilde{\gamma}$ nad intervalom $[0, t_1]$ s predpisom

$$\widetilde{\gamma}(t) = (\pi|_{V_0})^{-1}(\gamma(t)), \quad 0 \le t \le t_1.$$

Sedaj ponovimo isti postopek nad množico U_1. Naj bo V_1 tista povezana komponenta praslike $\pi^{-1}(U_1)$, ki vsebuje točko $y_1 = \widetilde{\gamma}(t_1)$. Dvig na $[t_1, t_2]$ definiramo s predpisom

$$\widetilde{\gamma}(t) = (\pi|_{V_1})^{-1}(\gamma(t)), \quad t_1 \le t \le t_2.$$

Po n korakih dobimo dvig $\widetilde{\gamma}(t)$ za vse $t \in [0,1]$. $\square$

Izrek 9 (Dvig enostavno povezane domene v krovu)**.** *Naj bo $\pi\colon Y \to X$ krovna projekcija in $f\colon Z \to X$ zvezna preslikava. Če je Z enostavno povezana, potem obstaja dvig $F\colon Z \to Y$ (torej velja $\pi \circ F = f$). Če je Z povezana, je dvig natanko določen z izborom vrednosti $F(z_0)$ v poljubno izbrani točki $z_0 \in Z$.*

Dokaz. Lahko privzamemo, da je Z povezana. Naj bo $z_0 \in Z$ poljubna točka. Za poljubno točko $z \in Z$ izberemo pot $\gamma\colon [0,1] \to Z$ od $\gamma(0) = z_0$ do $\gamma(1) = z$. Izberimo točko $y_0 \in Y$, ki zadošča $\pi(y_0) = f(z_0) \in X$. Po prejšnjem izreku obstaja dvig $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to Y$ z začetno točko $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$. Končna točka $\widetilde{\gamma}(1)$ je po monodromijskem izreku odvisna le od homotopnega razreda poti γ od z_0 do z. Ker je Z enostavno povezana, je zato tudi neodvisna od poti. Preslikava $F\colon Z \to Y$, definirana s predpisom $F(z) = \widetilde{\gamma}(1)$, je dvig preslikave f. Ni težko preveriti, da je F zvezna, saj lahko bližnje točke med seboj povežemo s potmi v majhni okolici. $\square$

Posledica 2. *Naj bo $\pi\colon Y \to X$ krovna projekcija. Če je bazni prostor X povezan in enostavno povezan, je krov trivialen.*

Dokaz. Izberimo točko $x_0 \in X$. Naj bo $E = \pi^{-1}(x_0) \subset Y$ vlakno projekcije. Izberimo točko $y \in E$. Ker je X enostavno povezan, lahko identiteto $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ dvignemo do preslikave $F_y\colon X \to Y$, ki zadošča pogojem $\pi \circ F_y = \mathrm{Id}_X$ in $F_y(x_0) = y$. Preslikava $\Phi\colon X \times E \to Y$, podana s predpisom $\Phi(x,y) = F_y(x)$, je izomorfizem produktnega krova $\tau\colon X \times E \to X$ na krov $\pi\colon Y \to X$. $\square$

Naslednji rezultat o dvigu homotopije v krovu je posplošitev izreka 8.

Izrek 10 (Dvig homotopije)**.** *Naj bo $\pi\colon Y \to X$ krovna projekcija in $f : Z \times [0,1] \to X$ neka homotopija v X. Denimo, da obstaja dvig $F_0\colon Z \to Y$ preslikave $f_0 = f(\cdot\,,0) : Z \to X$. Potem obstaja tudi dvig $F\colon Z \times [0,1] \to Y$ homotopije f, tako da je $F_0 = F(\cdot\,,0)$.*

Izrek prikazuje naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, "\mathrm{inkl}"'] & Y \arrow[d, "\pi"'] \\ Z \times [0,1] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Dokaz. Za vsako točko $z \in Z$ je $f^z = f(z,\cdot\,)\colon [0,1] \to X$ pot v X. Po izreku 8 obstaja natanko en dvig $F^z\colon [0,1] \to Y$ poti f^z z začetno točko $F_0(z) \in Y$. Tako kot v dokazu monodromijskega izreka 7 vidimo, da so dvigi F^z zvezno odvisni od točke $z \in Z$. Iz njih sestavimo preslikavo $F\colon Z \times [0,1] \to Y$ s predpisom $F(z,t) = F^z(t)$, $t \in [0,1]$. Očitno je F dvig homotopije f. $\square$

Izrek 10 ima naslednjo očitno posledico.

Posledica 3. *Naj bo $\pi\colon Y \to X$ krov in $f_0, f_1 : Z \to X$ homotopni zvezni preslikavi. Potem obstaja dvig preslikave f_0 v Y natanko tedaj, ko obstaja dvig preslikave f_1 v Y.*

Posledica 4. *Naj bo $\pi\colon Y \to X$ krovna preslikava. Potem je homomorfizem fundamentalni grup $\pi_*(\pi_1(Y)) \to \pi_1(X)$ injektiven (to je, monomorfizem).*

Dokaz. Naj bo γ zanka v Y, pripeta v neki točki $q \in Y$. Potem je $\lambda = \pi \circ \gamma$ zanka v X, pripeta v $p = \pi(q)$. Če je λ trivialna (homotopna konstanti), lahko homotopijo dvignemo v homotopijo poti v Y z začetno točko q. Končna točka te homotopije je neodvisna od parametra homotopije po monodromijskem izreku, torej dobimo homotopijo zank. Sledi, da je $[\gamma] = 0 \in \pi_1(Y)$. $\square$

Naslednji izrek podajan zadosten in potreben pogoj za obstoj dviga preko induciranih homomorfizmov fundamentalnih grup.

Izrek 11. *Naj bo $\pi\colon Y \to X$ krov. Zvezna preslikava $f : Z \to X$ povezane mnogoterosti Z v bazni prostor X ima dvig $F : Z \to Y$ natanko tedaj, ko velja*

$$f_*(\pi_1(Z)) \subset \pi_*(\pi_1(Y)).$$

Dokaz (skica)**.** Postopamo kot v dokazu izreka 9. Izberimo točko $z_0 \in Z$. Za poljubno točko $z \in Z$ izberemo pot $\gamma\colon [0,1] \to Z$ od $\gamma(0) = z_0$ do $\gamma(1) = z$. Naj bo $x_0 = f(z_0) \in X$ in $x = f(z) \in X$. Izberimo točko $y_0 \in Y$, ki zadošča pogoju $\pi(y_0) = x_0$. Po izreku 8 obstaja pot $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to Y$ z začetno točko $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$, ki zadošča $\pi \circ \widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ (to je, $\widetilde{\gamma}$ je dvig poti $f \circ \gamma\colon [0,1] \to X$). Končna točka $y = \widetilde{\gamma}(1) \in Y$ leži nad točko $\gamma(1) = x \in X$ in je po monodromijskem izreku odvisna le od homotopnega razreda poti γ od z_0 do z.

Naj bo γ' neka druga pot v Z od z_0 do z. Zanka $\sigma = \gamma^{-1}\gamma'$ določa element fundamentalne grupe $\pi_1(Z; z)$. Po predpostavki leži $[f \circ \sigma] = f_*[\sigma] \in \pi_1(X; x)$ v sliki $\pi_*(\pi_1(Y; y))$. Torej obstaja zanka $\lambda : [0,1] \to Y$ v y, ki zadošča $f \circ \sigma = \pi \circ \lambda$. Iz enoličnosti dviga vidimo, da se poti $\widetilde{\gamma}^{-1}$ in $\widetilde{\gamma}'$ sestavita v zanko v točki $y \in Y$, zato je $\widetilde{\gamma}'(1) = y = \widetilde{\gamma}(1)$.

Iz dokazanega sledi, da lahko (enako kot v dokazu izreka 9) definiramo dvig $F\colon Z \to Y$ preslikave $f\colon Z \to X$ s predpisom $F(z) = \widetilde{\gamma}(1)$ za poljuben izbor poti γ od z_0 do z. $\square$

X.4 Krovne translacije

Naj bo $\pi\colon Y \to X$ krov. Zvezna preslikava $g\colon Y \to Y$ je ***krovna translacija*** (ali ***krovna transformacija***), če je $\pi \circ g = \pi$. Ekvivalentno, g je krovna translacija natanko tedaj, ko preslika vlakno $\pi^{-1}(x) \subset Y$ nad poljubno točko $x \in X$ samo vase. Grupo vseh krovnih translacij krova π označimo z $\mathrm{Deck}(\pi)$.

Krovna translacija je očitno dvig projekcije $\pi\colon Y \to X$ glede na to isto projekcijo, kot je prikazano v naslednjem diagramu:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

Predpostavimo, da je Y povezana. Iz enoličnosti dviga preslikave v krov sledi, da je vsaka krovna translacija $g \in \mathrm{Deck}(\pi)$ natanko določena z vrednostjo $g(y_0)$ v poljubni točki

$y_0 \in Y$. Če je $g(y_0) = y_0$ za neko točko $y_0 \in Y$, potem je $g = \mathrm{Id}_Y$ identična preslikava. Nekonstantna krovna translacija torej nima nobene negibne točke.

Naj bo $U \subset X$ odprta povezana množica, nad katero je krov trivialen: $\pi^{-1}(U) = \sqcup_j V_j$ in je $\pi\colon V_j \to U$ homeomorfizem za vsak j. Potem krovna translacija g permutira med seboj množice V_j.

Če je krov $\pi\colon Y \to X$ gladek (oz. holomorfen), je vsaka krovna preslikava gladka (oz. holomorfna). To sledi iz zgoraj opisane lokalne reprezentacije krovne translacije kot permutacije med množicami V_j v prasliki $\pi^{-1}(U)$.

X.5 Prostor orbit povsem nezveznega delovanja grupe homeomorfizmov

Videli smo že, da grupa $\mathrm{Deck}(\pi)$ krovnih translacij deluje na Y brez negibnih točk. Ni težko preveriti, da je to delovanje tudi ***povsem nezvezno***, kar pomeni naslednje:

- Za vsako točko $y_0 \in Y$ obstaja okolica $V \subset Y$, tako da je $gV \cap V = \emptyset$ za vsak $g \in \mathrm{Deck}(\pi)$, $g \neq \mathrm{Id}$. (Tu je $gV = \{g(y)\colon y \in V\}$.)
- Za vsak par točk $y_0, y_1 \in Y$, ki nista na isti orbiti, obstajata odprti okolici $V_0 \ni y_0$, $V_1 \ni y_1$, tako da je $gV_0 \cap V_1 = \emptyset$ za vsak $g \in \mathrm{Deck}(\pi)$.

Krov $\pi\colon Y \to X$ se imenuje ***regularen*** ali ***Galoisov***, če grupa krovnih translacij $\mathrm{Deck}(\pi)$ deluje tranzitivno na vsakem vlaknu $\pi^{-1}(x)$, $x \in X$. V tem primeru je bazni prostor X ravno prostor orbit tega delovanja.

Sedaj bomo opisali obratni postopek.

Naj bo Γ neka abstraktna grupa. ***Delovanje grupe*** Γ na mnogoterosti Y kot grupa homeomorfizmov je preslikava $\theta\colon \Gamma \times Y \to Y$, tako da je za vsak element $g \in \Gamma$ preslikava $\theta_g = \theta(g,\cdot)\colon Y \to Y$ homeomorfizem mnogoterosti Y in velja

$$\theta_{gg'} = \theta_g \circ \theta_{g'} \qquad \forall g, g' \in \Gamma.$$

To je v resnici ***levo delovanje***; podobno definiramo ***desno delovanje*** z zahtevo $\theta_{gg'} = \theta_{g'} \circ \theta_g$ $\forall g, g' \in \Gamma$. Analogno definiramo delovanje Γ kot grupe difeomorfizmov, biholomorfizmov ipd.

Primer 13. Grupa $GL_n(\mathbb{R})$ vseh obrnljivih $n \times n$ matrik deluje na $\mathbb{R}^n$ s predpisom $(A, v) \mapsto Av$ (produkt matrike in vektorja). Podobno grupa $GL_n(\mathbb{C})$ deluje na $\mathbb{C}^n$. Oqv citno sta to levi delovanji; desno delovanje dobimo npr. s predpisom $(A, v) \mapsto A^{-1}v$.

Primer 14. Grupa $\mathbb{Z}$ deluje na $\mathbb{R}$ kot grupa translacij $(n, x) \mapsto x + n$. Grupa $\mathbb{Z}^2$ deluje na $\mathbb{C}$ kot grupa translacij $(k, n, z) \mapsto z + k + in$.

Delovanje θ se imenuje ***zvesto***, če je preslikava $\theta_g\colon Y \to Y$ enaka identiteti natanko tedaj, ko je $g = 1_\Gamma$ identiteta grupe Γ. S prehodom na kvocientno grupo Γ/Γ_0 po jedru delovanja $\Gamma_0 = \{g \in \Gamma\colon \theta_g = \mathrm{Id}_Y\}$ vselej dobimo zvesto delovanje.

Denimo sedaj, da neka grupa Γ deluje kot grupa homoeomorfizmov na topološki mnogoterosti Y. Za vsako točko $y \in Y$ označimo z Γy njeno ***orbito***:

$$\Gamma y = \{\gamma(y)\colon \gamma \in \Gamma\}.$$

Trditev 11. *Če grupa Γ deluje (kot grupa homoeomorfizmov) na Y povsem nezvezno in brez negibnih točk, potem ima* ***prostor orbit***

$$X = Y/\Gamma = \{\Gamma y\colon y \in Y\}$$

strukturo topološke mnogoterosti, tako da je kvocientna projekcija $\pi\colon Y \to X$, $\pi(y) = \Gamma y$, krovna projekcija in je $\Gamma = \mathrm{Deck}(\pi)$ njena grupa krovnih translacij.

Za dokaz glej npr. Boothby [3] ali [9].

Analogen rezultat velja v gladkem ali holomorfnem primeru. Konkretno, če je Y Riemannova ploskev, na kateri deluje neka grupa holomorfnih avtomorfizmov $\Gamma \subset \mathrm{Aut}\, Y$ povsem nezvezno in brez negibnih točk, je prostor orbit $X = Y/\Gamma$ tudi Riemannova ploskev, kvocientna projekcija $\pi\colon Y \to X$ pa je holomorfna krovna projekcija z grupo krovnih translacij $\mathrm{Deck}(\pi) = \Gamma$. Vsak krov, dobljen z delovanjem grupe kot je opisano zgoraj, je torej regularen.

X.6 Obstoj univerzalnega krovnega prostora

Izrek 12. *Za vsako povezano mnogoterost X obstaja povezana in enostavno povezana mnogoterost Y ter (univerzalna) krovna projekcija $\pi\colon Y \to X$. Univerzalni krov je določen do izomorfizma krovov natančno.*

Dokaz. Najprej dokažimo enoličnost. Denimo, da sta $\pi\colon Y \to X$ in $\pi'\colon Y' \to X$ dve krovni projekciji, kjer sta mnogoterosti Y in Y' povezani in enostavno povezani. Izberimo neko točko $p \in X$ in par točk $y \in \pi^{-1}(p)$ ter $y' \in (\pi')^{-1}(x)$. Po izreku 9 (o dvigu preslikave enostavno povezane domene v krov) obstajata preslikavi $\Phi\colon Y \to Y'$ in $\Psi\colon Y' \to Y$, ki zadoščata pogojem

$$\pi' \circ \Phi = \pi, \quad \pi \circ \Psi = \pi', \quad \Phi(y) = y', \quad \Psi(y') = y. \tag{I.10.1}$$

Iz teh pogojev sledi, da preslikava $\Theta = \Psi \circ \Phi\colon Y \to Y$ zadošča $\pi \circ \Theta = \pi$ in $\Theta(y) = y$. To pomeni, da je $\Theta \in \mathrm{Deck}(\pi)$ krovna preslikava, ki ohranja točko y, zato je identiteta na Y. Analogno vidimo, da je $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{Y'}$.

Izberimo točko $p_0 \in X$. Za vsako točko $p \in X$ naj bo Y_p množica vseh homotopnih razredov poti v X od p_0 do p. Naj bo $Y = \sqcup_{p\in X} Y_p$ disjunktna unija s projekcijo $\pi\colon Y \to X$, ki preslika Y_p v točko p. Trdimo, da obstaja na Y struktura topološke mnogoterosti, tako da je $\pi\colon Y \to X$ univerzalna krovna projekcija in je Y povezana.

Za dokaz izberimo poljubno točko $q \in X$ in neko povezano in enostavno povezano (ali kar kontraktibilno) odprto okolico $U \subset X$ točke q. Izberimo neko pot $\gamma\colon [0,1] \to X$ od $\gamma(0) = p_0$ do $\gamma(1) = q$. Za vsak $t \in [0,1]$ označimo z $\gamma_t\colon [0,1] \to X$ pot

$$\gamma_t(s) = \gamma(st), \qquad s \in [0,1].$$

Očitno je γ_t pot od $\gamma_t(0) = p_0$ do $\gamma_t(1) = \gamma(t)$; torej je preslikava

$$[0,1] \ni t \mapsto [\gamma_t] \in Y$$

dvig poti γ v Y. Opazujmo sedaj množico poti

$$\widetilde{V}_\gamma = \{\gamma\sigma\colon \sigma \text{ je pot v } U \text{ od } q \text{ do } p\}.$$

Ker je U enostavno povezana, sta poljubno dve poti σ, σ' v U od q do p med seboj homotopni, torej sta tudi poti $\gamma\sigma$ in $\gamma\sigma'$ homotopni. Odtod sledi, da se množica

$$V_\gamma = \{[\gamma\sigma] \in Y\colon \sigma \text{ je pot v } U \text{ od } q \text{ do } p\}$$

s projekcijo π preslika bijektivno na U. Za dve različni poti γ, γ' v X od p_0 do q je bodisi $V_\gamma = V_{\gamma'}$ (kadar sta poti homotopni), bodisi $V_\gamma \cap V_{\gamma'} = \emptyset$ (kadar poti γ, γ' nista homotopni. Poleg tega lahko vsako pot λ v X od p_0 do p zapišemo v obliki $\lambda = \gamma\sigma$, kjer je γ neka pot od p_0 do q in je σ pot v U od q do p.

Odtod sledi, da je $\pi^{-1}(U)$ enaka disjunktni uniji množic V_{γ_j} za paroma nehomotopne poti γ_j od p_0 do q. Topologijo na Y definiramo z zahtevo, da je vsaka bijekcija $\pi\colon V_\gamma \to U$ homeomorfizem. Torej je $\pi\colon Y \to X$ krovna projekcija, ki je trivialna nad vsako od množic $U \subset X$ v zgornji konstrukciji.

Da je Y povezena, sledi iz dejstva, da je vsak par poti v X z isto začetno točko $p_0 \in X$ in poljubno končno točko med seboj homotopen preko homotopije, ki fiksira le začetno točko. (Pot lahko homotopno skrčimo v začetno točko, če je končna točka prosta.)

Sedaj moramo dokazati še, da je Y enostavno povezana. Izberimo točko $y_0 \in Y$, ki ustreza konstantni poti $\gamma_0(t) = p_0 \in X$. Naj bo λ poljubna zanka v Y, pripeta v y_0. Njena projekcija $\gamma = \pi \circ \lambda$ je tedaj zanka v X. Po izreku 8 o obstoju in enoličnosti dviga poti v krov je λ ravno dvig γ z začetno točko $\lambda(0) = y_0$. Torej je $\lambda(1) = [\gamma] \in Y$ ravno element, ki ga določa razred zanke γ v fundamentalni grupi $\pi_1(X; p_0)$. Ker je λ zanka, je $[\gamma] = 0 \in \pi_1(X; p_0)$, torej je γ homotopna konstanti. Dvig te homotopije (izrek 10) ter monodromijski izrek nam povesta, da je tudi λ homotopna konstantni zanki $[0,1] \ni t \mapsto y_0$. Ker je bila λ poljubna zanka v y_0, sledi $\pi_1(Y; y_0) = 0$. Ker je Y povezana, to velja za poljubno točko $y_0 \in Y$. $\square$

Podobna konstrukcija nam da naslednji splošnejši izrek.

Izrek 13. *Naj bo X povezana mnogoterost in $p \in X$ poljubna točka. Za vsako podgrupo $G \subset \pi_1(X;p)$ fundamentalne grupe X obstaja povezana in enostavno povezana mnogoterost Y ter krovna projekcija $\pi\colon Y \to X$, tako da za poljubno točko $q \in \pi^{-1}(p)$ velja $\pi_*(\pi_1(Y;q)) = G$.*

Dokaz ((skica))**.** Mnogoterost Y konstruiramo kot množico vseh ekvivalenčnih razredov poti $\gamma\colon [0,1] \to X$ s fiksno začetno točko $\gamma(0) = p \in X$ glede na ekvivalenčno relacijo

$$\gamma \sim \gamma' \iff \gamma(1) = \gamma'(1) \text{ in } [\gamma(\gamma')^{-1}] \in G \subset \pi_1(X;p).$$

Zanke v X, ki pripadajo podrupi $G \subset \pi_1(X;p)$, se dvignejo v krov Y kot zanke, ostale zanke v $\pi_1(X;p) \setminus G$ pa se v Y odprejo v smislu, da ima dvig zanke v prostor Y različno začetno in končno točko (torej ni več zanka). □

X.7 Fundamentalna grupa baze kot grupa krovnih translacij

Opisali bomo delovanje fundamentalne grupe $\pi_1(X)$ in njenih kvocientnih grup kot grupe krovnih translacij na krovih nad X.

Oglejmo si najprej primer, ko je $\pi\colon Y \to X$ univerzalni krov. Bazni prostor X naj bo povezan. Kot smo videli v §X.6, lahko vlakno $Y_x = \pi^{-1}(x)$ nad poljubno točko $x \in X$ identificiramo s homotopnimi razredi poti v X od izbrane točke $p \in X$ do točke x. Izberimo sedaj zanko γ v X, pripeto v p. (Ta predstavlja element fundamentalne grupe $\pi_1(X;p)$.) Če neko pot $\lambda\colon [0,1] \to X$ od $\lambda(0) = p$ do $\lambda(1) = x$ (ta določa element v Y_x) predkomponiramo z zanko γ, dobimo novo pot $\gamma\lambda$ od p do x in s tem nov element vlakna Y_x. Preverimo lahko, da je dobljeni element odvisen samo od homotopskih razredov zanke γ in poti λ. S tem dobimo krovno translacijo $g_\gamma \in \mathrm{Deck}(\pi)$, ki je identiteta le v primeru, ko je γ homotopna konstanti (torej predstavlja trivialni element grupe $\pi_1(X;p)$). Stiku $\gamma\gamma'$ dveh zank očitno pripada element $g_\gamma \circ g_{\gamma'}$. Poleg tega se da videti, da je vsak element grupe $\mathrm{Deck}(\pi)$ oblike g_γ za neko zanko γ. Grupa $\pi_1(X) \cong \pi_1(X;p)$ s tem deluje zvesto na Y kot grupa $\mathrm{Deck}(\pi)$ vseh krovnih translacij.

Ista konstrukcija deluje v primeru, ko je $\pi\colon Y \to X$ regularen (Galoisov) krov, ki pripada neki podgrupi edinki $G \lhd \pi_1(X)$, v smislu da je $G = \pi_*(\pi_1(Y))$. V tem primeru zanke $\gamma \in \pi_1(X;p)$, ki pripadajo podgrupi G, inducirajo identično translacijo g_γ na Y, kvocientna grupa $\pi_1(X)/G = \Gamma$ pa deluje zvesto in tranzitivno na Y kot grupa vseh krovnih translacij.

Da mora biti G edinka, vidimo takole. Naj bosta λ in λ' dve poti v X od p do x, tako da zanka $\sigma := \lambda(\lambda')^{-1}$ določa element podgrupe $G \subset \pi_1(X;p)$. (To pomeni, da λ in λ' določata isti element vlakna Y_x krova $\pi : Y \to X$.) Da bo preslikava $g_\gamma\colon Y \to Y$, ki pripada zanki γ v p, dobro definirana, morata tudi novi poti $\gamma\lambda$ in $\gamma\lambda'$ zadoščati pogoju

$$[(\gamma\lambda)(\gamma\lambda')^{-1}] = [\gamma][\lambda(\lambda')^{-1}][\gamma]^{-1} = [\gamma][\sigma][\gamma]^{-1} \in G.$$

To velja za vsak par $[\gamma] \in \pi_1(X;p)$ in $[\sigma] \in G$ natanko tedaj, ko je G podgrupa edinka v fundamentalni grupi $\pi_1(X;p)$.

Krov $\pi_G\colon Y_G \to X$, ki pripada podgrupi $G \subset \pi_1(X)$, je enolično določen do izomorfizma krovov, kar vidimo podobno kot pri univerzalnih krovih (glej §X.6). Če sta $\pi\colon Y \to X$ in $\pi'\colon Y' \to X$ dva krova, kjer sta Y in Y' povezani tako da velja $\pi_*(\pi_1(Y)) = G = \pi'_*(\pi_1(Y'))$, nam izrek 11 zagotavlja obstoj preslikav $\Phi\colon Y \to Y'$ in $\Psi\colon Y' \to Y$, ki zadoščata pogojem (I.10.1); torej sta Φ in Ψ med seboj inverzna izomorfizma krovov.

Naslednji izrek je povzetek dosedanjih spoznanj v tem razdelku.

Izrek 14. *Za vsako povezano mnogoterost X obstaja bijektivna korespondenca med podgrupami G fundamentalne grupe $\pi_1(X)$ in izomorfnostnimi razredi krovov $\pi_G\colon Y_G \to X$ s povezanim totalnim prostorom Y_G in fundamentalno grupo $\pi_1(Y_G) = G$. Če je $G \lhd \pi_1(X)$ podgrupa edinka v $\pi_1(X)$, je krov $\pi_G\colon Y_G \to X$ Galoisov in velja* $\mathrm{Deck}(\pi_G) \cong \pi_1(X)/G$.

Če je $\widetilde{X} \to X$ univerzalni krov, potem za vsak krov $\pi_G\colon X_G \to X$ obstaja krovna projekcija $\tau\colon \widetilde{X} \to X_G$, za katero je $\mathrm{Deck}(\tau) = G$.

Obravnava teorija deluje v vseh razredih krovnih prostorov. Če je Y kompleksna mnogoterost (npr. Riemannova ploskev) in je $\Gamma \subset \mathrm{Aut}\, Y$ grupa holomorfnih avtomorfizmov, ki deluje na Y povsem nezvezno in brez negibnih točk, dobimo holomorfni krovni prostor $\pi\colon Y \to X = Y/\Gamma$ z grupo $\mathrm{Deck}(\pi) = \Gamma$. Obratno, če je $\pi\colon Y \to X$ holomorfna krovna projekcija, je vsaka krovna preslikava holomorfni avtomorfizem mnogoterosti Y, torej je $\mathrm{Deck}(\pi) \subset \mathrm{Aut}\, Y$. Regularnim holomorfnim krovom $\pi\colon Y \to X$ ustrezajo grupe edinke $G \lhd \pi_1(X)$, kot je opisano zgoraj, ter $\mathrm{Deck}(\pi) = \pi_1(X)/G$.

I.11 Uniformizacijska teorija Riemannovih ploskev

Glavni rezultat, omenjen brez dokaza v tem razdelku, je ***Riemann-Koebejev izrek*** o klasifikaciji enostavno povezanih Riemanovih ploskev. Ta izrek nam skupaj s teorijo krovnih prostorov iz prejšnjega razdelka omogoča predstaviti vsako Riemannovo ploskev kot holomorfen kvocient ene od treh ploskev: Rimannove sfere $S = \mathbb{CP}^1$, kompleksne ravnine $\mathbb{C}$, ali enotnega diska $\mathbb{D}$. Videli bomo, da S pokriva le samo sebe, $\mathbb{C}$ pa pokriva samo sebe, punktirano ravnino $\mathbb{C}^*$ ter kompleksne toruse. Vse ostale Riemannove ploskve so holomorfni kvocienti diska $\mathbb{D}$.

Naj bo X Riemannova ploskev. Po rezultatih prejšnjega razdelka obstaja univerzalna krovna projekcija $\pi\colon Y \to X$. Na ploskvi Y obstaja natanko določena struktura Riemannove ploskve, za katero je π holomorfna krovna projekcija. Torej je $X = Y/\Gamma$ holomorfni kvocient ploskve Y po neki grupi $\Gamma \subset \mathrm{Aut}\, Y$ holomorfnih avtomorfizmov ploskve Y, ki deluje na Y povsem nezvezno in brez negibnih točk. (Γ je ravno grupa krovnih translacij krovne projekcije π in je izomorfna fundamentalni grupi $\pi_1(X)$ ploskve Y.)

To pomeni, da dobimo vse Riemannove ploskve tako, da

(A) najprej poiščemo vse enostavno povezane Riemannove ploskve Y;

(B) za vsako od ploskev Y v točki (A) poiščemo vse podgrupe $\Gamma \subset \operatorname{Aut} Y$ grupe holomorfnih avtomorfizmov, ki delujejo na Y povsem nezvezno in brez negibnih točk.

Odgovor na točko (A) nam podaja naslednji klasični izrek. Sorazmerno preprost dokaz lahko najdemo v [17].

Izrek 15. (Riemann – Koebe) *Vsaka povezana in enostavno povezana Riemannova ploskev je biholomorfna eni od ploskev $\mathbb{CP}^1$ (Riemannova sfera), $\mathbb{C}$, ali $\mathbb{D}$ (enotni disk).*

Navedeni izrek je posplošitev ***Riemannovega upodobitvenega izreka***, po katerem je vsako enostavno povezano območje Ω v $\mathbb{C}$, ki ni enako $\mathbb{C}$, biholomorfno disku $\mathbb{D}$. Ta klasičen rezultat je dokazan v vsakem standardnem učbeniku iz kompleksne analize.

$\mathbb{CP}^1$ je kompaktna in zato ni homeomorfna drugima dvema. Ploskvi $\mathbb{C}$ in $\mathbb{D}$ sta gladko difeomorfni, biholomorfni pa nista, saj je po Liouvillejevem izreku vsaka omejena holomorfna funkcija na $\mathbb{C}$ konstantna.

Za rešitev drugega vprašanja si ogledamo grupe avtomorfizmov teh treh enostavno povezanih Riemannovih ploskev.

Avtomorfizmi Riemannove sfere so ulomljene linearne funkcije

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0.$$

Lahko je preveriti, da ima vsaka taka preslikava negibno točko. Torej grupa $\operatorname{Aut} \mathbb{CP}^1$ ne vsebuje nobene netrivialne podgrupe, ki bi delovala brez negibnih točk, zato Riemannova sfera $\mathbb{CP}^1$ nima nobenega netrivialnega kvocienta. Drugače povedano, če je $\pi\colon \mathbb{CP}^1 \to X$ krovna preslikava, je π biholomorfna in $X \cong \mathbb{CP}^1$.

Holomorfni avtomorfizmi ravnine $\mathbb{C}$ so afino linearne funkcije $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$. Ta preslikava je brez negibne točke natanko tedaj, ko je $a = 1$ in $b \neq 0$, torej ko je translacija $\phi_b(z) = z + b$. Torej moramo poiskati podgrupe v Abelovi grupi $\mathbb{C}$, ki delujejo povsem nezvezno na $\mathbb{C}$ kot grupa translacij.

Naj bo $\Gamma = \langle \phi_b \rangle$ neskončna ciklična grupa, generirana z eno translacijo. Preprosto je preveriti, da Γ deluje na $\mathbb{C}$ povsem nezvezno. Kvocient $\mathbb{C}/\Gamma$ je biholomorfen punktirani ravnini $\mathbb{C}^*$; kvocientno projekcijo $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma \cong \mathbb{C}^*$ realizira funkcija $\pi(z) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} z/b}$. (Glej razdelek I.5.) S pomočjo konjugacije (linearne zamenjave koordinate na $\mathbb{C}$) lahko prevedemo na primer periode $b = 1$.

Drug možen primer je $\Gamma = \langle \phi_{b_1}, \phi_{b_2} \rangle$, torej ko imamo ciklično grupo z dvema generatorjema $b_1, b_2 \in \mathbb{C}^*$. Če je razmerje b_1/b_2 realno, je bodisi Γ neskončna ciklična grupa z enim generatorjem (to je v primeru, ko je b_1/b_2 racionalno število in sta zato b_1 in b_2 celoštevilska večkratnika istega števila b) in smo v prejšnjem primeru, bodisi je razmerje b_1/b_2 iracionalno število; v tem primeru grupa ne deluje povsem nezvezno, saj je orbita točke $0 \in \mathbb{C}$ povsod gosta na realni premici skozi b_1 in b_2.

Denimo sedaj, da razmerje b_2/b_1 ni realno. S konjugacijo prevedemo na primer $b_1 = 1$, $b_2 = \omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Kvocient $\mathbb{C}/\Gamma$ je sedaj kompleksni torus, določen s številom ω. (Glej razdelek I.5.)

Punktirana ravnina in kompleksni torusi so edini holomorfni kvocienti ravnine $\mathbb{C}$. To vidimo z analizo podgrup $\Gamma \subset \mathbb{C}$ z vsaj tremi generatorji: bodisi lahko reduciramo na primer grupe z največ dvema generatorjema, kot smo naredili v prejšnjem primeru, bodisi grupa ne deluje povsem nezvezno kot grupa translacij ravnine $\mathbb{C}$.

Vse ostale Riemannove ploskve so holomorfni kvocienti diska $\mathbb{D}$. Teh je zelo veliko, kot bomo videli pri topološki klasifikaciji v naslednjem razdelku. Z drugo besedo, grupa holomorfnih avtomorfizmov diska,

$$\operatorname{Aut}\mathbb{D} = \left\{ z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}; \quad a \in \mathbb{D},\ \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

ima veliko diskretnih podgrup, ki delujejo na $\mathbb{D}$ povsem nezvezno in brez negibnih točk.

I.12 Topološka klasifikacija Riemannovih ploskev

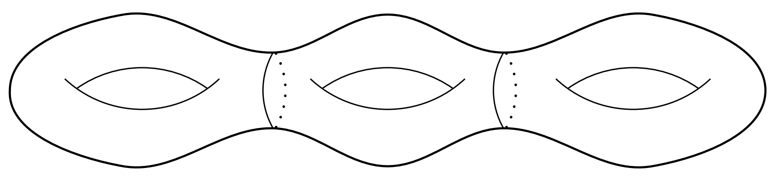
V tem razdelku bomo brez dokazov navedli nekaj osnovnih dejstev o topološki klasifikaciji orientabilnih ploskev ter o klasifikaciji kompleksnih struktur na takih ploskvah. Več o tej temi lahko bralec najde v monografiji [6].

Sklenjena ploskev je kompaktna ploskev brez roba. Ker je vsaka Riemannova ploskev orientabilna (saj biholomorfne preslikave ohranjajo orientacijo), se bomo pri klasifikaciji omejili na orientabilne ploskve.

Izrek 16. *Vsaka orientabilna sklenjena topološka ploskev je homeomorfna natanko eni od ploskev S_g ($g \in \mathbb{Z}_+$), kjer je S_0 sfera, S_g za $g \geq 1$ pa povezana vsota g kopij torusa $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$. Število g imenujemo **rod ploskve**. (Glej sliko I.2.)*

Povezana vsota $R = R_1 \# R_2$ dveh ploskev je ploskev, ki jo dobimo (topološko ali gladko) tako, da iz vsake od obeh ploskev izrežemo disk $\Delta_j \subset R_j$ ($j = 1, 2$), nato pa ploskvi z robom $R_1 \setminus \Delta_1$ in $R_2 \setminus \Delta_2$ zlepimo vzdolž krožnic $\partial\Delta_1$ in $\partial\Delta_2$. Pri tem moramo paziti na orientacijo. Lahko si tudi predstavljamo, da obe ploskvi z izrezanima diskoma zlepimo s pomočjo cilindra $\Sigma = S^1 \times [0, 1]$, kateregа rob $\partial\Sigma = (S^1 \times \{0\}) \cup (S^1 \times \{1\})$ je disjunktna unija dveh krožnic; ti krožnici nalepimo vzdolž krožnic $\partial\Delta_1$ oziroma $\partial\Delta_2$. Operacijo lahko seveda poljubno mnogokrat ponovimo. Pri tem igra torus posebno vlogo; pogosto pravimo, da je povezana vsota $M \# \mathbb{T}$ poljubne ploskve M s torusom ploskev, ki smo jo dobili z dodatkom enega ročaja na M.

Vsako ploskev S_g lahko opremimo s strukturo gladke (in tudi realno analitične) ploskve in jo vložimo kot gladko hiperploskev v $\mathbb{R}^3$.

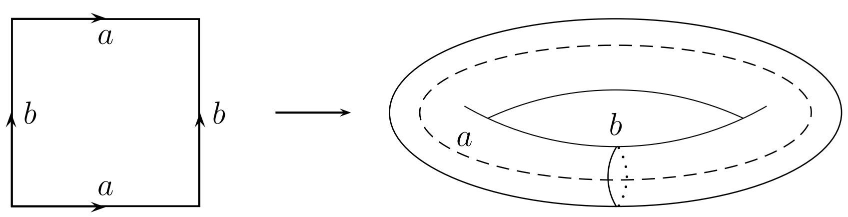


Slika I.2: Orientabilna ploskev roda $g = 3$

Podoben rezultat velja za neorientabilne sklenjene ploskve: Vsaka od njih je povezana vsota končnega števila kopij realne projektive ravnine $\mathbb{RP}^2$. Povezana vsota dveh kopij $\mathbb{RP}^2$ je ***Kleinova steklenica*** $K = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$; povezana vsota dveh Kleinovih steklenic $K \# K$ je homeomorfna povezani vsoti $K \# \mathbb{T}$, torej Kleinovi steklenici z ročajem, itd. Neorientabilne ploskve so vložljive v $\mathbb{R}^4$, niso pa vložljive v $\mathbb{R}^3$; pač pa dopuščajo imerzije s samopresečišči v $\mathbb{R}^3$.

Oglejmo si sedaj fundamentalno grupo $\pi_1(S_g)$ orientabilne ploskve roda g. Pri $g = 0$ je grupa trivialna, saj je 2-sfera $S_0 = S^2$ enostavno povezana.

Fundamentalna grupa torusa ($g = 1$) je prosta abelova grupa z dvema generatorjema a, b, torej $\pi_1(S_1) = \pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Generatorja lahko predstavimo z zankama, ki ju dobimo iz stranic kvadrata pri identifikaciji nasprotnih dveh stranic:



Slika I.3: Generatorja fundamentalne grupe torusa

Ploskev S_g lahko dobimo tudi tako, da v poligonu s $4g$ stranicami označimo po štiri zaporedne stranice z $a_j, b_j, a_j^{-1}, b_j^{-1}$, nato pa po dva in dva robova poligona, označena z isto črko, zlepimo v predpisani smeri, podobno kot smo naredili pri $g = 1$, da smo iz kvadrata dobili torus. Odtod vidimo, da je za vsak $g \geq 1$ fundamentalna grupa $\pi_1(S_g)$ orientabilne ploskve roda g prosta grupa na $2g$ generatorjih z eno relacijo:

$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g \rangle / (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1).$$

Njena ***abelacija***, ki je hkrati ***prva homološka grupa*** $H_1(S_g, \mathbb{Z})$ ploskve S_g s celimi koeficienti $\mathbb{Z}$, je prosta abelova grupa na $2g$ generatorjih:

$$Ab[\pi_1(S_g)] \cong H_1(S_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

Poleg roda g je osnovna topološka karakteristika ploskve M njeno Eulerjevo število $\chi(M)$. Ena od možnih definicij je

$$\chi(M) = e_0 - e_1 + e_2, \tag{I.12.1}$$

kjer je e_0 število vozlišč, e_1 število robov in e_2 število ploskev (trikotnikov) v katerikoli triangulaciji ploskve M. S pomočjo opisa ploskve S_g kot identifikacijskega prostora poligona s $4g$ stranicami je lahko videti, da je njeno Eulerjevo število enako

$$\chi(S_g) = 2 - 2g, \qquad g = 0, 1, 2, \ldots.$$

V posebnem je torej $\chi(S_0) = \chi(\mathbb{CP}^1) = 2$ in $\chi(S_1) = \chi(\mathbb{T}) = 0$. Eulerjevo število lahko na enak način definiramu tudi za neorientabilne ploskve. Izkaže se, da je Eulerjevo število neorientabilne ploskve M_g roda g (to je povezana vsota g kopij $\mathbb{RP}^2$) enako

$$\chi(M_g) = 2 - g.$$

Trditev 12. *Če sta X in Y sklenjeni orientirani ploskvi in je $f\colon X \to Y$ d-listna krovna projekcija, potem velja*

$$\chi(X) = d\,\chi(Y), \qquad 2 - 2g_X = d(2 - 2g_Y). \tag{I.12.2}$$

Dokaz. Izberimo triangulacijo ploskve Y z lastnostjo, da je vsak trikotnik triangulacije vsebovan v neki enostavno povezani množici $U \subset Y$, nad katero je krov $f\colon X \to Y$ trivialen. Praslika te triangulacije s preslikavo f je triangulacija ploskve X, ki ima d-krat toliko vozlišč, robov in trikotnikov kot osnovna triangulacija ploskve Y. Rezultat sledi iz definicije (I.12.1) Eulerjevega števila. $\square$

Do sedaj smo obravnavali S_g le kot topološko oz. gladko ploskev. Zanima nas, ali obstaja na S_g tudi kakšna kompleksna struktura in koliko je med seboj različnih struktur. Pri $g = 0$ smo na sferi $S_0 = S^2$ že opisali kompleksno strukturo Riemannove sfere (oz. enodimenzionalnega projektivnega prostora $\mathbb{CP}^1$). Prav tako smo pri $g = 1$ našli realno dvoparametrično družino med seboj nebiholomorfnih kompleksnih struktur na torusu $\mathbb{T}$ (kot kvocienti $\mathbb{C}/\Gamma$ po diskretnih abelovih podgrupah $\Gamma \subset \mathbb{C}$ z dvema generatorjema). Podobno velja tudi na ploskvah S_g roda $g > 1$.

Izrek 17. *Na vsaki orientabilni sklenjeni ploskvi S_g obstaja kompleksna struktura.*

Eden od naravnih načinov uvedbe kompleksne strukture na orientabilni ploskvi M je preko izbire Riemannove metrike $\mathfrak{g}$ na M. V vsaki točki $p \in M$ je $\mathfrak{g}$ skalarni produkt na tangentni ravnini T_pM. Skupaj z izbiro orientacije na M dobimo natanko eno linearno preslikavo $J_p\colon T_pM \to T_pM$, ki vsakemu enotnemu vektorju $e \in T_pM$ priredi njemu ortogonalni enotni vektor $J_p\,e$, tako da je par $(e, J_p\,e)$ pozitivna ortonormalna baza ravnine T_pM. Operator $J\colon TM \to TM$ je gladko odvisen od bazne točke $p \in M$ (odvisno od gladkosti metrike $\mathfrak{g}$) in zadošča ključni lastnosti

$$J^2 = -\,\mathrm{Id} \quad \text{na} \quad TM.$$

Vsaj tak operator se imenuje ***skoraj kompleksna struktura*** na M. S pomočjo operatorja J lahko na vsak tangentni prostor T_pM vpeljemo strukturo enorazsežnega kompleksnega prostora s predpisom

$$\mathrm{i}e = \sqrt{-1}e := J_p\, e, \quad \forall e \in T_pM.$$

(Enačba $J_p^2 = -I$ je kompatibilna z zahtevo $\mathrm{i}^2 = -1$.) Sedaj poiščemo lokalne karte $\phi\colon U \to U' \subset \mathbb{C}$ na majhnih odprtih množicah $U \subset M$, ki zadoščajo Cauchy-Riemannovi enačbi

$$d\phi_p(J_p\, e) = \mathrm{i}\cdot d\phi_p(e), \quad e \in T_pM,\ p \in M.$$

Vsaki lokalni rešitvi te enačbe pravimo J-holomorfna funkcija. Račun pokaže, da je v poljubno izbranih lokalnih koordinatah na M to eliptičen sistem dveh parcialnih diferencialnih enačb, soroden običajnemu Cauchy-Riemannovemu sistemu. Sistem je rešljiv v majhni okolici vsake točke in tako dobimo J-holomorfne lokalne karte, ki pokrijejo M. S pomočjo verižnega pravila je preprosto preveriti, da je za poljubni dve J-holomorfni karti $\phi\colon U \to U' \subset \mathbb{C}$, $\psi\colon V \to V' \subset \mathbb{C}$ na M prehodna preslikava $\phi\circ\psi^{-1}\colon \psi(U\cap V) \to \phi(U\cap V)$ biholomorfna v standardnem smislu (saj smo na podmnožicah ravnine $\mathbb{C}$).

Na ta način smo iz vsake Riemannove metrike $\mathfrak{g}$ na M dobili operator $J = J^{\mathfrak{g}}$ in prirejen kompleksen atlas na M, ki določa na M strukturo Riemannove ploskve. Obratno, vsako kompleksno strukturo na M lahko dobimo na opisani način, če za $\mathfrak{g}$ izberemo metriko, za katero je vsak par vektorjev $e, ie \in T_pM$ ortogonalen.

Ostane nam vprašanje, koliko različnih kompleksnih struktur obstaja na dani gladki ploskvi $M = S_g$ roda g. Odgovor je seveda odvisen od tega, kako razumemo pojem 'biti različen'. Ekvivalenčna relacija na množici vseh kompleksnih struktur, ki se najpogosteje uporablja, je naslednja. Dve kompleksni strukturi na ploskvi S_g proglasimo za ekvivalentni, če obstaja homeomorfizem $f\colon S_g \to S_g$, ki je homeotopen identiteti (to je, lahko ga zvezno deformiramo v identiteto preko družine homeomorfizmov $f_t\colon M \to M$, $t \in [0, 1]$), tako da je f biholomorfna preslikava iz prve strukture v drugo strukturo.

Kvocientni prostor množice vseh kompleksnih struktur po tej ekvivalenčni relaciji se imenuje ***Teichmüllerjev prostor*** $\mathcal{T}(S_g) = \mathcal{T}_g$. Ta prostor je homeomorfen realnemu evklidskemu prostoru dimenzije $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{T}_g = 6g - 3$, $g \geq 1$. Na sferi ($g = 0$) pa obstaja natanko ena kompleksna struktura glede na opisano relacijo. Za teorijo Teichmüllerjevih prostorov glej npr. O. Lehto [13].

Poleg sklenjenih ploskev se pogosto obravnavajo tudi ***Riemannove ploskve z robom***. Naj bo $S_{g,m}$ topološka ploskev roda g z m robnimi komponentami; to dobimo, če iz sklenjene ploskve S_g odstranimo m paroma disjunktnih diskov. Očitno obstaja na $S_{g,m}$ veliko različnih kompleksnih struktur, ki jih dobimo z zožitvijo kompleksnih struktur na S_g. Teichmüllerjeva teorija je razvita tudi za končne Riemannove ploskve z robom.

Poleg opisanih obstaja še nepregledna množica bolj kompliciranih Riemannovih ploskev, ki niso nujno končnega roda in imajo lahko zelo kompliciran rob z neskončnim številom robnih komponent. Uniformizacijska teorija obstaja za odprte množice z največ števno mnogo robnimi komponentami v Riemannovi sferi ali v kompleksnem torusu. Znano je npr., da je vsaka odprta množica $\Omega \subset \mathbb{CP}^1$ z največ števno mnogo robnimi komponentami konformno ekvivalentna (biholomorfna) neki ***krožni domeni*** oblike $\Omega' = \mathbb{CP}^1 \setminus \cup_j \overline{\Delta}_j$, kjer je $\overline{\Delta}_j$ končna ali števna družina paroma disjunktni zaprti diskov polmera $r_j \geq 0$ (v primeru $r_j = 0$ je disk $\overline{\Delta}_j$ točka); glej [13].

Primer bolj kompliciranih množic so domene $\Omega = X \setminus K$, kjer je X Riemannova ploskev in K neka ***Cantorjeva množica*** v X (neštevna kompaktna množica brez izoliranih točk, katere komponente povezanosti so točke). Zelo malo je znanega o tem, kdaj sta dve taki domeni med seboj konformno ekvivalentni.

I.13 Riemann - Hurwitzova formula

Naj bosta X in Y sklenjeni Riemannovi ploskvi ter $f\colon X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava. Vemo, da je f razvejan krov s končno mnogo razvejišči $x_1, x_2, ..., x_n \in X$; to so točke, v katerih je $\mathrm{st}_{x_j} f =: d_j > 1$. V ostalih točkah je $\mathrm{st}_x f = 1$. ***Razvejiščno število*** preslikave f je število

$$b(f) := \sum_{x \in X} (\mathrm{st}_x f - 1) = \sum_{j=1}^{n} (d_j - 1) \geq 0. \tag{I.13.1}$$

Torej je f nerazvejana krovna projekcija natanko tedaj, ko $b(f) = 0$.

Spomnimo se, da je *stopnja preslikave* $f\colon X \to Y$ število različnih točk na generično izbranem vlaknu $f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Stopnjo označimo z $\mathrm{st}(f) \in \mathbb{N}$.

Z $\chi(X)$ značimo Eulerjevo število ploskve X (glej §I.12). Če je X kompaktna (sklenjena) orientabilna ploskev roda $g \in \mathbb{Z}_+$, je $\chi(X) = 2 - 2g$.

Naslednji izrek je posplošitev formule (I.12.2), v kateri je $b(f) = 0$.

Izrek 18 (Riemann-Hurwitzova formula). *Naj bosta X in Y sklenjeni Riemannovi ploskvi in $f\colon X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava stopnje $d \geq 1$. Potem velja*

$$\chi(X) = d\chi(Y) - b(f). \tag{I.13.2}$$

Torej je razvejiščno število $b(f)$ vselej sodo, če sta X in Y kompaktni ploskvi. Če oznaqv cimo z $gX \in \mathbb{Z}_+$ rod ploskve X in podobno za Y, lahko zgornjo formulo zapišemo v obliki

$$2 - 2g_X = d(2 - 2g_Y) - b(f) \Longleftrightarrow g_X = dg_y + b(f) + 1 - d.$$

Dokaz. Ploskev Y trianguliramo (glej §I.12), pri čemer dodatno zagotovimo, da so vse točke množice

$$\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\} = f(\mathrm{br} f) \subset Y$$

oglišča triangulacije. V okolici vsakega razvejišča x_j preslikava f v primernih lokalnih kartah ustreza funkciji $z \mapsto z^{d_j}$ v okolici točke $z = 0$. Na X dobimo s tem triangulacijo, za katero velja

$$e_0(X) = de_0(Y) - b(f), \quad e_1(X) = de_1(Y), \quad e_2(X) = de_2(Y).$$

(Števila $e_j(X), e_j(Y)$ so kot v trditvi 12.) Druga in tretja formula sta kot v trditvi 12, prvo pa dobimo iz opažanja, da v razvejiv sču $x_j \in X$ stopnje $d_j > 1$ sovpade vseh d_j praslik $f^{-1}(y)$, ki gredo proti x_j, ko gre y proti $f(x_j)$. Triangulacija na X ima torej $\sum_j(d_j - 1) = b(f)$ manj vozlišč od pričakovanega števila, če bi bila f nerazvejana. Če seštejemo leve in desne strani zgornjih enačb, dobimo iskano formulo. $\square$

Opomba. Ista formula velja, če sta X in Y Riemannovi ploskvi končnega topološkega tipa (to je, imata končen rod in končno mnogo robnih komponent) ter je f prava holomorfna preslikava. To velja npr. v primeru, ko sta X in Y Riemannovi ploskvi z robom (to je, $\partial X = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$ je unija končno mnogo sklenjenih Jordanovih krivulj in podobno za Y). Označimo $\overline{X} = X \cup \partial X$. V tem primeru se vsaka prava holomorfna preslikava $f\colon X \to Y$ razširi do zvezne preslikave $\tilde{f}\colon \overline{X} \to \overline{Y}$, ki preslika rob ∂X ploskve X v rob ∂Y ploskbve Y in je lokalni homeomorfizem v neki okolici ∂X. Torej ima f končno mnogo razvejišč.

Števili $d = d(f)$ in $b(f)$ nista povsem neodvisni eno od drugega. Za vsako točko $y \in Y$ namreč velja $d = \sum_{f(x)=y} \mathrm{st}_x f$. Denimo, da je $b(f) > 0$ in naj bodo $d_1, \ldots, d_m$ stopnje v razvejiščnih točkah. Tedaj je $d \geq \max_j d_j$. Če imamo npr. eno samo razvejiščno točko $x \in X$, sledi $d \geq \mathrm{st}_x f = b(f) + 1$.

Primer 15. Oglejmo si posledice Riemann-Hurwitzove formule za meromorfne funkcije na sklenjenih Riemannovih ploskvah (holomorfne preslikave v Riemannovo sfero).

1. Naj bosta X in Y Riemannova sfera; torej $\chi(X) = \chi(Y) = 2$. Preslikava $f\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ stopnje d torej zadošča enačbi $2 = 2d - b(f)$ oziroma $b(f) = 2(d-1)$. (V tem primeru je $f = P/Q$ podana z racionalno funkcijo in $d = \max\{\mathrm{st}P, \mathrm{st}Q\}$.) Preslikava stopnje $d = 1$ je biholomorfna, torej brez razvejišč. Preslikave stopnje $d > 1$ pa ima razvejiščno število $b(f) = 2(d-1) \geq 2$.

2. Naj bo X torus in Y Riemannova sfera. Tedaj je $\chi(X) = 0$ in $\chi(Y) = 2$. Enačba (I.13.2) nam pove $0 = 2d - b(f)$ oziroma $b(f) = 2d$, kjer je d stopnja preslikave f. Seveda je $d \geq 2$, saj bi bila preslikava stopnje $d = 1$ biholomorfna. Vsaka netrivialna holomorfna preslikava torusa na $\mathbb{CP}^1$ ima torej razvejiščno število $2d \geq 4$.

3. Če je $X = S_g$ ploskev roda g, je $\chi(X) = 2 - 2g$. Za vsako nekonstantno holomorfno preslikavo $f\colon X \to \mathbb{CP}^1$ (torej meromorfno funkcijo na X) stopnje d dobimo

$$2 - 2g = 2d - b(f) \iff b(f) = 2(d + g - 1).$$

I.14 Vektorska polja na Riemannovih ploskvah

Pojem vektorskega polja si bomo najprej ogledali v koordinatah $z = x + \mathrm{i}y$ na $\mathbb{C}$.

Realno vektorsko polje na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ je izraz oblike

$$V(z) = a(z)\frac{\partial}{\partial x} + b(z)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{I.14.1}$$

kjer sta $a, b\colon \Omega \to \mathbb{R}$ realni funkciji na Ω. Polje V lahko razumemo kot vektorsko funkcijo $(a, b) : \Omega \to \mathbb{R}^2$. Pri tem vektorski polji $\frac{\partial}{\partial x}$ in $\frac{\partial}{\partial y}$ (odvoda v koordinatni smeri) tvorita bazo $\mathcal{C}^r(\Omega)$-modula vseh vektorskih polj razreda $\mathcal{C}^r$ na poljubni domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$. Vrednost vektorskega polja v točki $z_0 \in \mathbb{C}$ je ***tangentni vektor*** $V(x_0) = a(z_0)\frac{\partial}{\partial x} + b(z_0)\frac{\partial}{\partial y}$ v točki z_0; množica vseh tangentnih vektorjev je vektorski prostor dimenzije 2 z bazo $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$.

Po definiciji je vektorsko polje (I.14.1) razreda $\mathcal{C}^r(\Omega)$ natanko tedaj, ko sta njegova koeficienta $a, b\colon \Omega \to \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^r(\Omega)$.

Za vsako funkcijo $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ razreda $\mathcal{C}^1(\Omega)$ definiramo funkcijo $V(f)\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$V(f)(z) = a(z)\frac{\partial f}{\partial x}(z) + b(z)\frac{\partial f}{\partial y}(z). \tag{I.14.2}$$

Torej $V(z)$ deluje kot **smerni odvod** funkcije f v točki z v smeri vektorja $V(z) = (a(z), b(z))$. V klasični analizi pišemo $V(f) = \nabla(f)\cdot V$, kjer je $\nabla(f) = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$ gradient funkcije f. Če je V vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^r(\Omega)$ in je $f \in \mathcal{C}^s(\Omega)$, je $V(f)$ razreda $\mathcal{C}^k(\Omega)$, kjer je $k = \min\{r, s-1\}$. Vektorsko polje V razreda $\mathcal{C}^r(\Omega)$ lahko torej razumemo kot linearen parcialni diferencialni operator prvega reda:

$$V\colon \mathcal{C}^s(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^{s-1}(\Omega), \qquad s = 1, 2, \ldots, r+1,$$

ki zadošča Leibnitzovemu pogoju

$$V(fg)(z) = V(f)(z)g(z) + f(z)V(g)(z).$$

Uvedimo naslednji kompleksni vektorski polji:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Potem lahko vektorsko polje (I.14.1) zapišemo v kompleksni obliki

$$V(z) = \alpha(z)\frac{\partial}{\partial z} + \beta(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \tag{I.14.3}$$

kjer je $\alpha = a + \mathrm{i}b$ in $\beta = a - \mathrm{i}b$.

Kompleksno vektorsko polje na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ je izraz oblike (I.14.3), kjer sta $\alpha, \beta \colon \Omega \to \mathbb{C}$ poljubni kompleksni funkciji. Po analogiji z (I.14.2) tako polje deluje na funkciji $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C})$ s kompleksnimi vrednostmi s predpisom

$$V(f)(z) = \alpha(z)\frac{\partial f}{\partial z}(z) + \beta(z)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z). \tag{I.14.4}$$

Vektorsko polje V (I.14.3) imenujemo *realno*, če ustreza nekemu realnemu polju (I.14.1); kot smo videli zgoraj, to velja natanko tedaj, ko je $\beta = \bar{\alpha}$. Če je $\alpha = a + \mathrm{i}b = \bar{\beta}$, potem je kompleksno polje (I.14.3) enako realnemu polju (I.14.1).

Trditev 13. *Funkcija $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ je holomorfna natanko tedaj, ko je $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \equiv 0$ na Ω.*

Dokaz. Če pišemo $f = u + \mathrm{i}v$, kjer sta u, v realni, nam račun pokaže

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] + \mathrm{i}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right].$$

Torej je

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{in} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

kar je ravno sistemu Cauchy-Riemanovih enačb za funkcijo $f = u + \mathrm{i}v$. □

Vektorsko polje oblike $\alpha(z)\frac{\partial}{\partial z}$ se imenuje ***polje tipa*** $(1, 0)$, vektorsko polje oblike $\beta(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ pa se imenuje ***polje tipa*** $(0, 1)$. Holomorfne funkcije so torej natanko tiste gladke funkcije, ki jih anihilira poljubno vektorsko polje tipa $(0, 1)$.

Vektorsko polje $V(z) = \alpha(z)\frac{\partial}{\partial z}$ se imenuje ***holomorfno vektorsko polje*** na $\Omega \subset \mathbb{C}$, če je funkcija $\alpha \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna. Raqv cun pokaže, da je V holomorfno natanko tedaj, ko je $V(f)$ holomorfna funkcija za vsako holomorfno funkcijo f.

Recimo sedaj, da je $f = (u, v) = u + \mathrm{i}v \colon \Omega \to \mathbb{C}$ nek gladek difeomorfizem na območje $\Omega' = f(\Omega) \subset \mathbb{C}$. Označimo koordinate na Ω' z $w = u + \mathrm{i}v$. Vektorskemu polju V (I.14.1) priredimo vektorsko polje f_*V na domeni Ω' s predpisom

$$f_*(V)(h)(f(z)) = V(h \circ f)(z) \qquad \forall z \in \Omega,\ \forall h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega').$$

Iz verižnega pravila sledi

$$\begin{aligned}
f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(f(z)) &= \frac{\partial}{\partial x}(h \circ f)(z) = \frac{\partial h}{\partial u}(f(z))\frac{\partial u}{\partial x}(z) + \frac{\partial h}{\partial v}(f(z))\frac{\partial v}{\partial x}(z) \\
f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)(f(z)) &= \frac{\partial}{\partial y}(h \circ f)(z) = \frac{\partial h}{\partial u}(f(z))\frac{\partial u}{\partial y}(z) + \frac{\partial h}{\partial v}(f(z))\frac{\partial v}{\partial y}(z).
\end{aligned}$$

Ker to velja za vsako testno funkcijo h, to pomeni

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(f(z)) = \frac{\partial u}{\partial x}(z)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}(z)\frac{\partial}{\partial v}, \tag{I.14.5}$$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)(f(z)) = \frac{\partial u}{\partial y}(z)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}(z)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{I.14.6}$$

V standardnem paru baz $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ na domeni ter $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$ na kodomeni torej preslikavi

$$V \longmapsto f_* V$$

vektorskih polj ustreza množenje koeficientov $(a, b) = V$ z Jacobijevo matriko

$$Df(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial x}(z) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix}. \tag{I.14.7}$$

Odtod vidimo, da je pojem vektorskega polja dobro definiran na vsaki gladki ploskvi; v poljubnih lokalnih koordinatah se izraža v obliki (I.14.1), pri prehodu v drug koordinatni sistem pa se transformira po pravilu (I.14.5)–(I.14.6), oziroma kot produkt koeficientov (a, b) z Jacobijevo matriko (I.14.7) prehodne preslikave.

Če je $f = u + \mathrm{i}v$ injektivna holomorfna funkcija in je V kompleksno vektorsko polje (I.14.3), imamo naslednjo formulo za preslikano polje:

$$(f_*V)(f(z)) = f'(z)\alpha(z)\frac{\partial}{\partial w} + \overline{f'(z)}\beta(z)\frac{\partial}{\partial \overline{w}}, \quad z \in \Omega.$$

V posebnem sledi, da se vektorsko polje $V(z) = \alpha(z)\frac{\partial}{\partial z}$ tipa $(1, 0)$ preslika v polje

$$(f_*V)(f(z)) = f'(z)\alpha(z)\frac{\partial}{\partial w} \tag{I.14.8}$$

tipa $(1, 0)$, vsako holomorfno vektorsko polje pa se preslika v holomorfno vektorsko polje.

Iz zadnjega opažanja sledi, da je pojem holomorfnega vektorskega polja dobro definiran na vsaki Riemannovi ploskvi X: v poljubni holomorfni lokalni koordinati z na X je tako polje oblike $V(z) = \alpha(z)\frac{\partial}{\partial z}$ s holomorfnim koeficientom α, pri prehodu v drugo koordinato pa se koeficient pomnoži z odvodom (biholomorfne) prehodne funkcije kot v (I.14.8).

Tok vektorskega polja V (I.14.1) z začetnim pogojem (x_0, y_0) pri času $t = 0$ je rešitev $\phi_t(x_0, y_0) = (x(t), y(t))$ sistema navadnih diferencialnih enačb

$$\dot{x}(t) = a(x(t), y(t)), \quad \dot{y}(t) = b(x(t), y(t))$$

z začetnim pogojem

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Če je polje V razreda $\mathcal{C}^k$ za nek $k \geq 1$, potem ta vsako točko $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \Omega$ obstaja okolica $U \subset \Omega$ točke z_0 in število $\epsilon > 0$, tako da tok $\phi_t(z)$ obstaja in je enolično določen za vsako točko $z = x + \mathrm{i}y \in U$ in vsak $t \in I_\epsilon = (-\epsilon, +\epsilon)$. Tok $(t, z) \mapsto \phi_t(z)$ je razreda $\mathcal{C}^k(I_\epsilon \times U)$; prav tako je njegov časovni odvod $\dot{\phi}_t(z)$ razreda $\mathcal{C}^k$.

Analogno definiramo vektorsko polje in njegov tok na poljubni gladki mnogoterosti X. Če je $n = \dim X$, je v lokalnih koordinatah $x = (x_1, \ldots, x_n)$ na X vektorsko polje oblike

$$V(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\,\frac{\partial}{\partial x_j},$$

kjer so koeficienti a_j funkcije spremenljivke x. Njegov tok $\phi_t(x^0)$ je rešitev sistema navadanih diferencialnih enačb z začetnim pogojem:

$$\dot{x}_i = a_i(x_1, \ldots, x_n), \quad x_i(0) = x_i^0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ni težko preveriti, da je tok neodvisen od izbire koordinat. Ena od bistvenih lastnosti toka je njegova aditivnost glede na časovno spremenljivko t:

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t$$

Za vsako točko $x \in X$ lahko tok $\phi_t(x)$ podaljšamo na maksimalen odprt interval $0 \in I_x = (\alpha_x, \omega_x) \subset \mathbb{R}$, ki je lahko tudi poltrak ali vsa realna os $\mathbb{R}$. Množica

$$M = \{(x, t)\colon x \in X,\ t \in I_x\} \subset X \times \mathbb{R}$$

se imenuje ***fundamentalna domena*** polja V. Vektorsko polje V na mnogoterosti X se imenuje ***kompletno*** (ali ***popolnoma integrabilno***), če je njegov tok $\phi_t(x)$ definiran za vsak $t \in \mathbb{R}$ in za poljuben začetni pogoj $\phi_0(x) = x \in X$; to je, če je njegova fundamentalna domena enaka $X \times \mathbb{R}$. V tem primeru je tok $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ enoparametrična grupa difeomorfizmov mnogoterosti X oziroma, natančneje, delavnje aditivne grupe $\mathbb{R}_+ = (\mathbb{R}, +)$ na X kot grupa difeomorfizmov.

Za podrobnejše informacije o toku polja in s tem povezanimi operacijami glej učbenike iz teorije sistemov navadnih diferencialnih enačb ali [9].

I.15 Diferencialne forme na Riemannovih ploskvah

Diferencialne forme so objekti na mnogoterostih, ki so dualni vektorskim poljem, torej delujejo kot (multi-) linearni funkcionali na vektorskih poljih.

Diferencialna* 0*-forma je po definiciji funkcija. Vektorski prostor gladkih diferencialnih 0-form na gladki mnogoterosti X bomo označili z $\mathcal{E}^0(X) = \mathcal{C}^\infty(X)$ (za kompleksne funkcije), oziroma $\mathcal{E}^0_{\mathbb{R}}(X) = \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(X)$ za realne funkcije.

V koordinatah $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ je ***realna diferencialna 1-forma*** na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ izraz oblike

$$\theta(z) = a(z)\, dx + b(z)\, dy, \tag{I.15.1}$$

kjer sta $a, b\colon \Omega \to \mathbb{R}$ funkciji. Forma je razreda $\mathcal{C}^r$, če sta koeficienta a, b razreda $\mathcal{C}^r$. Prostor vseh gladkih realnih 1-form na Ω označimo s $\mathcal{E}^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$. ***Kompleksna diferencialna 1-forma*** je izraz iste oblike (I.15.1), le da sta koeficienta kompleksni funkciji. Prostor vseh gladkih kompleksnih 1-form na Ω označimo z $\mathcal{E}^1(\Omega)$.

Vsaki $\mathcal{C}^r$ funkciji f na Ω priredimo 1-formo df razreda $\mathcal{C}^{r-1}(\Omega)$ s predpisom

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z)\, dy; \tag{I.15.2}$$

to je ***diferencial*** funkcije f. Diferencial d torej podaja $\mathbb{R}$-linearen oz. $\mathbb{C}$-linearen operator

$$d\colon \mathcal{E}^0_{\mathbb{R}}(\Omega) \to \mathcal{E}^1_{\mathbb{R}}(\Omega), \qquad d\colon \mathcal{E}^0(\Omega) \to \mathcal{E}^1(\Omega),$$

ki zadošča Leibnitzovemu pravilu

$$d(fg) = f\,dg + g\,df.$$

Forma (I.15.1) deluje na vektorskem polju $V(z) = c(z)\frac{\partial}{\partial x} + d(z)\frac{\partial}{\partial y}$ s predpisom

$$(V\rfloor\theta)(z) = \langle \theta, V\rangle(z) = a(z)\,c(z) + b(z)\,d(z).$$

Izraz $V\rfloor\theta$ se imenuje ***notranji produkt*** polja V in forme θ; rezultat je torej funkcija. V posebnem primeru, ko je $\theta = df$ diferencial neke funkcije f in je V kot zgoraj, dobimo

$$\langle df, V\rangle = V(f) = c\frac{\partial f}{\partial x} + d\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Za parjenje baznih polj in form očitno veljajo naslednja pravila:

$$\langle dx, \partial/\partial x\rangle = 1, \quad \langle dx, \partial/\partial y\rangle = 0, \quad \langle dy, \partial/\partial x\rangle = 0, \quad \langle dy, \partial/\partial y\rangle = 1.$$

Torej sta 1-formi dx, dy baza $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$-modula $\mathcal{E}^1(\Omega)$ vseh gladkih 1-form na Ω; ta baza je dualna bazi $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ modula vektorskih polj.

Z uporabo diferencialov kompleksnih spremenljivk $z = x + \mathrm{i}y$, $\bar z = x - \mathrm{i}y$,

$$dz = dx + \mathrm{i}dy, \qquad d\bar z = dx - \mathrm{i}dy$$

lahko vsako 1-formo zapišemo v obliki

$$\theta(z) = \alpha(z)\,dz + \beta(z)\,d\bar z. \tag{I.15.3}$$

Diferencial funkcije (I.15.2) lahko zapišemo v naslednji kompleksni obliki:

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)\,d\bar z = \partial f(z) + \overline{\partial} f(z). \tag{I.15.4}$$

Diferenciala

$$\partial f(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)\,dz, \qquad \overline{\partial} f(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)\,d\bar z$$

sta $\mathbb{C}$-linearni in $\mathbb{C}$-antilinearni del realnega diferenciala df. Iz trditve 13 sledi, da je funkcija f holomorfna natanko tedaj, ko veljajo ekvivalentni pogojoji

$$\overline{\partial} f = 0 \iff df = \partial f \iff df \text{ je } \mathbb{C}\text{-linearen}.$$

Definicija 16. Diferencialna 1-forma $\alpha(z)\,dz$ se imenuje ***forma tipa*** $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ ali na kratko $(1,0)$-forma, diferencialna forma oblike $\beta(z)\,d\bar z$ pa je ***forma tipa*** $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ oz. $(0,1)$-forma.

Diferencialna $(1,0)$-forma $\theta(z = \alpha(z)\,dz$ se imenuje ***holomorfna 1-forma***, če je koeficient α holomorfna funkcija, in ***meromorfna 1-forma***, če je α meromorfna funkcija.

Lahko je videti, da veljajo naslednja pravila za parjenje z vektorskimi polji:

$$\langle dz, \partial/\partial z\rangle = 1, \quad \langle dz, \partial/\partial \bar{z}\rangle = 0, \quad \langle d\bar{z}, \partial/\partial z\rangle = 0, \quad \langle d\bar{z}, \partial/\partial \bar{z}\rangle = 1.$$

Odtod sledi

$$\left\langle \alpha dz + \beta d\bar{z}, \gamma\frac{\partial}{\partial z} + \delta\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right\rangle = \alpha\gamma + \beta\delta.$$

Diferencialna 2-forma na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ je izraz oblike

$$\omega(z) = a(z)\, dx \wedge dy = \frac{\mathrm{i}}{2}\, a(z)\, dz \wedge d\bar{z}. \tag{I.15.5}$$

Operacija $\wedge$ se imenuje ***klinasti produkt*** 1-form; ta operacija je linearna v vsakem faktorju in antikomutativna:

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0,$$

$$dz \wedge d\bar{z} = -d\bar{z} \wedge dz, \quad dz \wedge dz = 0, \quad d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0.$$

Klinasti produkt se razširi po linearnosti na poljuben par 1-form:

$$(adx + bdy) \wedge (a'dx + b'dy) = (ab' - a'b)\, dx \wedge dy.$$

Podobno izračunamo klinasti produkt v kompleksnem zapisu:

$$(\alpha dz + \beta d\bar{z}) \wedge (\gamma dz + \delta d\bar{z}) = (\alpha\delta - \beta\gamma)\, dz \wedge d\bar{z}.$$

Prostor vseh gladkih kompleksnih 2-form na Ω označimo z $\mathcal{E}^2(\Omega)$. Očitno imamo izomorfizem $\mathcal{E}^0(\Omega) \to \mathcal{E}^2(\Omega)$, $a \mapsto adx \wedge dy$ (ali pa $a \mapsto a\, dz \wedge d\bar{z}$).

Sedaj definiramo še ***vnanji diferencial***

$$d : \mathcal{E}^1(\Omega) \to \mathcal{E}^2(\Omega)$$

s predpisom

$$\begin{aligned} d(adx + bdy) &= da \wedge dx + db \wedge dy \\ &= (a_x dx + a_y dy) \wedge dx + (b_x dx + b_y dy) \wedge dy \\ &= (b_x - a_y)\, dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Označili smo $a_x = \partial a/\partial x$ in podobno za ostale odvode. V izračunu smo upoštevali antikomutativnost klinastega produkta $\wedge$. Zaradi antikomutativnosti $\wedge$ na $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ni netrivialnih diferencialnih form reda > 2, zato operacijo d na 2-formah definiramo s predpisom $d\omega = 0$. V kompleksnem zapisu se diferencial 1-forme izraža takole:

$$d(\alpha\, dz + \beta\, d\bar{z}) = d\alpha \wedge dz + d\beta \wedge d\bar{z} = \left(\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z}.$$

Diferencialna k-forma θ se imenuje ***eksaktna***, če je $\theta = d\theta'$ diferencial neke $(k-1)$-forme θ' (pri $k = 0$ je edina eksaktna 0-forma ničelna funkcija), in je ***sklenjena***, če je $d\theta = 0$. Uporabljali bomo naslednje oznake:

- $\mathcal{Z}^k(\Omega)$ je množica vseh gladkih sklenjenih (kompleksnih) k-form na Ω,
- $\mathcal{B}^k(\Omega)$ je množica vseh gladkih eksaktnih (kompleksnih) k-form na Ω.

Po definiciji je $\mathcal{B}^0(\Omega) = 0$; če je Ω povezana, je vsaka sklenjena 0-forma f (funkcija) očitno konstanta, torej je $\mathcal{Z}^0(\Omega) = \mathbb{C}$. Za poljubno domeno je $\mathcal{Z}^0(\Omega)$ kompleksni vektorski prostor, katerega dimenzija je enaka številu povezanih komponent Ω.

Vsaka eksaktna 1-forma razreda $\mathcal{C}^1$ (torej diferencial df neke funkcije razreda $\mathcal{C}^2$) je tudi sklenjena, kot vidimo iz naslednjega računa:

$$d(df) = d(f_x dx + f_y dy) = f_{xy}\, dy \wedge dx + f_{yx}\, dx \wedge dy = (f_{xy} - f_{yx})\, dx \wedge dy = 0. \tag{I.15.6}$$

Upoštevali smo, da velja $f_{xy} = f_{yx}$ z vsako funkcijo razreda $\mathcal{C}^2$. Ker je $d = \partial + \overline{\partial}$, dobimo odtod

$$0 = d \circ d = (\partial + \overline{\partial}) \circ (\partial + \overline{\partial}) = \partial^2 + \overline{\partial}^2 + \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial.$$

S primerjavo tipov form sledi

$$\partial^2 = 0, \quad \overline{\partial}^2 = 0, \quad \partial\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial.$$

Vsaka 2-forma je sklenjena po definiciji, ker na $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ni diferencialnih form višjega reda.

Povzemimo zgornjo diskusijo za povezano domeno $\Omega \subset \mathbb{C}$:

$$\mathcal{B}^0(\Omega) = 0,\ \mathcal{Z}^0(\Omega) = \mathbb{C},\ \mathcal{B}^1(\Omega) \subset \mathcal{Z}^1(\Omega),\ \mathcal{Z}^2(\Omega) = \mathcal{E}^2(\Omega).$$

Vnanji diferencial podaja zaporedje homomorfizmov kompleksnih vektorskih prostorov

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(\Omega) \longrightarrow 0.$$

Ker je $d(df) = 0$ za vsako $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$, je

$$d\left(\mathcal{E}^0(\Omega)\right) = \mathcal{B}^1(\Omega) \subset \mathcal{Z}^1(\Omega) = \ker\left(d\colon \mathcal{E}^1(\Omega) \to \mathcal{E}^2(\Omega)\right).$$

Kvocient

$$H^1_{dR}(\Omega) = \frac{\mathcal{Z}^1(\Omega)}{\mathcal{B}^1(\Omega)} = \frac{\ker(d\colon \mathcal{E}^1(\Omega) \to \mathcal{E}^2(\Omega))}{\operatorname{im}(d\colon \mathcal{E}^0(\Omega) \to \mathcal{E}^1(\Omega))} \tag{I.15.7}$$

se imenuje ***prva de Rhamova kohomološka grupa*** domene Ω. Podobno se grupa

$$H^2_{dR}(\Omega) = \frac{\mathcal{Z}^2(\Omega)}{\mathcal{B}^2(\Omega)} = \frac{\mathcal{E}^2(\Omega)}{\operatorname{im}(d\colon \mathcal{E}^1(\Omega) \to \mathcal{E}^2(\Omega))} \tag{I.15.8}$$

imenuje ***druga de Rhamova kohomološka grupa*** domene Ω. Grupa

$$H^0_{dR}(\Omega) = \mathcal{Z}^0(\Omega) = \ker\left(d\colon \mathcal{E}^0(\Omega) \to \mathcal{E}^1(\Omega)\right)$$

pa je **0*-ta de Rhamova kohomološka grupa***. Po že povedanem je $H^0_{dR}(\Omega) = \mathbb{C}$, če je Ω povezana, v splošnem pa imamo po eno kopijo $\mathbb{C}$ za vsako povezano komponento Ω.

Naslednji izrek je poseben primer ***de Rhamovega izreka***. Dejstvo, da so de Rhamove kohomološke grupe H^q_{dR} za $q \geq 1$ enake nič na poljubni konveksni (ali kontraktibilni) domeni, se imenuje ***Poincaréjeva lema***. Glej tudi §II.4.

Izrek 19. (a) *Če je Ω enostavno povezana domena v $\mathbb{C}$, je $H^1_{dR}(\Omega) = 0$.*

(b) *Za vsako domeno $\Omega \subset \mathbb{C}$ je $H^2_{dR}(\Omega) = 0$.*

Dokaz. *Dokaz (a):* Lahko vzamemo, da je Ω tudi povezana. Naj bo $\theta = adx + bdy$ sklenjena gladka 1-forma na Ω, torej velja $b_x - a_y = 0$. Na vsakem krogu $U \subset \Omega$ s središčem v točki $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ najdemo rešitev enačbe $df = \theta$ z integracijo:

$$f(x + \mathrm{i}y) = \int_{x_0}^{x} a(u, y_0)\,du + \int_{y_0}^{y} b(x, v)\,dv = \int_{y_0}^{y} a(x_0, v)\,dv + \int_{x_0}^{x} b(u, y)\,du; \quad x + \mathrm{i}y \in U.$$

Razlika obeh vsot integralov v zgornji formuli je integral po robu pravokotnika, ki je po Greenovi formuli za pravokotnik enak

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} (b_x - a_y)\,dxdy = 0.$$

Z odvajanjem integralov direktno preverimo, da velja $df = \theta$. Če je g neka druga rešitev enačbe $dg = \theta$ na U, potem je $d(g - f) = dg - df = 0$ in je zato $g - f$ konstanta na U.

Naj bo $\mathcal{E} = \mathcal{E}^0$ snop zarodkov gladkih funkcij na Ω in $\pi\colon \mathcal{E} \to \Omega$ bazna projekcija. (Glej §II.1 za konstrukcijo snopov). Iz povedanega sledi, da množica vseh zarodkov $f \in \mathcal{E}$, ki rešijo enačbo $df = \theta$, sestavlja podmnožico $Y \subset \mathcal{E}$, tako da je $\pi\colon Y \to \Omega$ krovni prostor and Ω. Ker je Ω povezana in enostavna povezana, nam posledica 2 v §X.3 pove, da je krov trivialen. Vsak globalni prerez je rešitev enačbe $df = \theta$ na Ω. Torej je $H^1_{dR}(\Omega) = 0$.

Dokaz (b): Naj bo Ω poljubna domena v $\mathbb{C}$ in $\omega = a\,dx \wedge dy$ neka 2-forma na Ω. Izberemo pokritje $\mathcal{U} = (U_j)$ domene Ω s koordinatnimi pravokotniki. Lahko vzamemo, da je pokritje lokalno končno. (V resnici se da pokritje izbrati tako, da se v dovolj majhni okolici poljube točke $z_0 \in \Omega$ sekajo največ trije pravokotniki iz družine U_i.) Na vsakem pravokotniku U_i lahko rešimo enačbo $\partial f/\partial x = a$ z integracijo po x:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} a(t, y)\,dt.$$

Torej je $d(f dy) = f_x dx \wedge dy = \theta$. S tem dobimo 1-formo θ_i, ki zadošča $d\theta_i = \omega$ na U_i. Na preseku $U_{i,j} := U_i \cap U_j$ je $d(\theta_j - \theta_i) = \omega - \omega = 0$, torej je 1-forma $\theta_{i,j} = \theta_j - \theta_i$ sklenjena. Očitno je

$$\theta_{i,i} = 0, \quad \theta_{i,j} + \theta_{j,i} = 0, \quad \theta_{i,j} + \theta_{j,k} + \theta_{k,i} = 0$$

za poljubno trojico indeksov i, j, k. Ker je množica $U_{i,j}$ konveksna (in zato enostavno povezana), obstajajo po že dokazani trditvi (a) funkcije $f_{i,j} \in \mathcal{E}(U_{i,j})$, ki zadoščajo $df_{i,j} = \theta_{i,j}$. S pravilno izbiro aditivnih konstant lahko $f_{i,j}$ izberemo tako, da velja $f_{i,i} = 0$ in $f_{i,j} + f_{j,i} = 0$. Za vsako trojico indeksov i, j, k je

$$c_{i,j,k} = f_{i,j} + f_{j,k} + f_{k,i}$$

konstanta na $U_{i,j,k} = U_i \cap U_j \cap U_k$, saj je

$$dc_{i,j,k} = df_{i,j} + df_{j,k} + df_{k,i} = \theta_{i,j} + \theta_{j,k} + \theta_{k,i} = 0.$$

Lema 1. *Naj bo $c_{i,j,k} \in \mathbb{C}$ kot zgoraj. Obstaja kolekcija konstant $c_{i,j} \in \mathbb{C}$, tako da za poljubno trojico indeksov i, j, k velja*

$$c_{i,i} = 0, \quad c_{i,j} + c_{j,i} = 0, \quad c_{i,j} + c_{j,k} + c_{k,i} = c_{i,j,k}.$$

Lema sledi iz klasične (npr. celularne) kohomološke teorije, saj 2-kocikel $(c_{i,j,k})$ na $\mathcal{U}$ s koeficienti v $\mathbb{C}$ določa element klasične kohomološke grupe $H^2(X, \mathbb{C})$, ki je enaka 0 na vsaki nekompaktni ploskvi. Izbor pokritja $\mathcal{U}$ poleg tega zagotavlja $H^2(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \cong H^2(X, \mathbb{C})$.

Recimo sedaj, da lema velja. Funkcije $g_{i,j} = f_{i,j} - c_{i,j}$ na $U_{i,j}$ tedaj zadoščajo

$$g_{i,i} = 0, \quad g_{i,j} + g_{j,i} = 0, \quad g_{i,j} + g_{j,k} + g_{k,i} = 0$$

in

$$dg_{i,j} = df_{i,j} = \theta_{i,j}.$$

Izberemo gladko particijo enote (χ_i) na Ω s $\operatorname{supp} \chi_i \subset U_i$ in definiramo funkcije $g_i \in \mathcal{E}(U_i)$ s predpisom

$$g_i = \sum_k \chi_k g_{i,k}.$$

Tedaj je na $U_{i,j}$ dobimo:

$$g_j - g_i = \sum_k \chi_k (g_{k,j} - g_{k,i}) = \sum_k \chi_k g_{i,j} = g_{i,j}.$$

Sedaj definiramo 1-forme $\tilde{\theta}_i$ na U_i s predpisom

$$\tilde{\theta}_i = \theta_i - dg_i.$$

Tedaj je $d\tilde{\theta}_i = d\theta_i - d(dg_i) = \omega$ na U_i in

$$\tilde{\theta}_j - \tilde{\theta}_i = (\theta_j - \theta_i) - d(g_j - g_i) = \theta_{i,j} - dg_{i,j} = 0.$$

Torej družina $(\tilde{\theta}_i)_{i \in I}$ določa 1-formo θ na X, ki zadošča $d\theta = \omega$. □

Podobno uvedemo ***Dolbeaultove kohomološke grupe***. (Glej tudi §II.4.) Označimo z $\mathcal{E}^{1,0}(\Omega)$ in $\mathcal{E}^{0,1}(\Omega)$ vektorski prostor vseh gladkih kompleksnih form tipa $(1, 0)$ oziroma $(0, 1)$ (glej def. 16). Iz (I.15.3) vidimo, da je

$$\mathcal{E}^1(\Omega) = \mathcal{E}^{1,0}(\Omega) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(\Omega).$$

Podobno iz (I.15.5) vidimo, da je vsaka 2-forma tipa $(1, 1)$, torej je

$$\mathcal{E}^2(\Omega) = \mathcal{E}^{1,1}(\Omega).$$

Operatorja ∂ in $\overline{\partial}$ delujeta kot sledi:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{\partial} \mathcal{E}^{1,0}(\Omega) \xrightarrow{\partial} \mathcal{E}^{2,0}(\Omega) = 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{0,1}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{0,2}(\Omega) = 0.$$

Dolbeautove kohomološke grupe so

$$H^0_{\overline{\partial}}(\Omega) = \ker\{\overline{\partial}\colon \mathcal{E}^0(\Omega) \to \mathcal{E}^1(\Omega)\} = \mathcal{O}(\Omega), \tag{I.15.9}$$
$$H^1_{\overline{\partial}}(\Omega) = \frac{\mathcal{E}^{0,1}(\Omega)}{\overline{\partial}(\mathcal{E}^0(\Omega))}. \tag{I.15.10}$$

Iz klasične kompleksne analize na domenah v $\mathbb{C}$ sledi

Izrek 20. *Za vsako domeno Ω v $\mathbb{C}$ velja $H^1_{\overline{\partial}}(\Omega) = 0$.*

Ker je vsaka $(0,1)$-forma oblike $f\,d\bar{z}$, to pomeni, da za vsako gladko funkcijo $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ obstaja gladka funkcija $u \in \mathcal{E}^0(\Omega)$, ki reše nehomogeno Cauchy-Riemannovo enačbo

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = u.$$

Oglejmo si sedaj transformacijo diferencialnih form pri zamenjavah koordinat. Naj bo $f = (u,v) = u + \mathrm{i}v\colon \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{C}$ gladka preslikava. Za vsako diferencialno k-formo θ na Ω' ($k \in \{0,1,2\}$) definiramo njen ***povlek*** $f^*\theta$ kot sledi:

(a) Če je θ funkcija (0-forma), je $f^*\theta = \theta \circ f$.

(b) $f^*(adx + bdy) = (u + \mathrm{i}v)^*(adx + bdx) = (a \circ f)\,du + (b \circ f)\,dv.$

(c) $f^*(adx \wedge dy) = (a \circ f)\,du \wedge dv = (a \circ f)(u_x v_y - u_y v_x)\,dx \wedge dy.$

Podobno definiramo povlek diferencialnih form θ na $\mathbb{R}^n$ z gladko (vsaj $\mathcal{C}^1$) preslikavo $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, kjer je Ω domena v $\mathbb{R}^m$. Naj bodo $y = (y_1, \ldots, y_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^n$. Osnovna pravila poleg (a) so naslednja:

$$f^*dy_i = df_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,dx_j$$
$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta, \quad f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta.$$

Ker je vsaka diferencialna forma na $\mathbb{R}^n$ vsota izrazov oblike $a\,dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$, kjer je a funkcija, je s temi pravili povlek enolično definiran in dobimo npr.

$$f^*(a\,dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) = (a \circ f)\,df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}.$$

S pomočja prvega pravila izrazimo diferenciale df_{i_j} kot linearne kombinacije baznih diferencialov koordinate $dx_1, \ldots, dx_m$, nato pa z upoštevanjem multilinearnosti in antikomutativnosti produkta $\wedge$ izrazimo rezultat kot linearno kombinacijo baznih form $dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$ po naraščajočih indeksih $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq m$.

Poglavje II

Riemann-Rochov izrek

II.1 Snop zarodkov holomorfnih funkcij

V tem razdelku si bomo ogledali pojem snopa in standardno konstrukcijo snopa iz predsnopa. To bomo naredili na preprostem in za nas najpomembnejšem primeru, to je snopu zarodkov holomorfnih funkcij. Ista konstrukcija deluje v drugih razredih funkcij in tudi splošnejših objektov, kot so npr. prerezi svežnjev. V nadaljevanju bomo uvedli še nekaj drugih naravnih primerov snopov, ki bodo igrali pomembno vlogo v tem poglavju.

Začnimo z definicijo snopa.

Definicija 17. Naj bosta $\mathcal{E}$ in X topološka prostora. Zvezna surjektivna projekcija $\pi\colon \mathcal{E} \to X$ se imenuje ***snop*** z ***baznim prostorom*** X in ***totalnim prostorom*** $\mathcal{E}$, če je projekcija π lokalni homeomorfizem. Če je poleg tega vsaka bilka $\pi^{-1}(x)$ $(x \in X)$ abelova grupa (oziroma komutativen kolobar, obseg,...) in so algebraične operacije zvezne, potem je $\mathcal{E} \to X$ ***snop abelovih grup*** (oz. ***snop kolobarjev***, ***snop obsegov***,...).

Primer 16. Vsak krovni prostor $\pi\colon Y \to X$ je snop. Če ima vlakno $E = \pi^{-1}(x)$ strukturo grupe ali kolobarja za vsak $x \in X$, dobimo snop grup oz. snop kolobarjev. $\square$

Opomba. Ker so bilke $\mathcal{E}_x = \pi^{-1}(x)$ snopa diskretne, so algebraične operacije na vsaki posamezni bilki vselej zvezne. Smisel zahteve po zveznosti teh operacij v definiciji 17 je zveznost v odvisnosti od bazne točke.

Oglejmo si sedaj konstrukcijo snopa $\mathcal{O}_X$ zarodkov holomorfnih funkcij na kompleksni mnogoterosti X. (Za razumevanje konstrukcije snopa lahko vzamemo $X = \mathbb{C}^n$, ali celo $X = \mathbb{C}$.) Za vsako odprto množico $U \subset X$ označimo z $\mathcal{O}(U)$ kolobar holomorfnih funkcij na U. Element tega kolobarja je par (U, f), kjer je f holomorfna funkcija na U. (V primeru $U = \emptyset$ vzamemo $\mathcal{O}(\emptyset) = \emptyset$.) Za vsak par odprtih množic $U \subset V$ v X imamo ***restrikcijski homomorfizem***

$$r_{U,V}\colon \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U), \quad \mathcal{O}(V) \ni f \mapsto f|_U \in \mathcal{O}(U).$$

Očitno je

- $r_{U,U}$ je identiteta na $\mathcal{O}(U)$ za vsako odprto množico $U \subset X$, in
- za vsako trojico odprtih množic $U \subset V \subset W$ velja $r_{U,V} \circ r_{V,W} = r_{U,W}$.

Družina vseh kolobarjev $\{\mathcal{O}(U) \colon U \subset X\}$ in restrikcijskih homomorfizmov $r_{U,V}$ sestavlja ***predsnop holomorfnih funkcij*** na X.

Iz predsnopa naredimo snop tako, da najprej definiramo zarodke holomorfnih funkcij v poljubni točki $a \in X$. Iz kolekcije vseh kolobarjev $\mathcal{O}(U)$ v danem predsnopu izberemo tiste, za katere je $a \in U$. Na tej družini uvedemo ekvivalenčno relacijo $\sim_a$ s predpisom $(U, f) \sim_a (V, g)$, če obstaja odprta množica W z $a \in W \subset U \cap V$, tako da je $r_{W,U}(f) = r_{V,U}(g)$. (Slednje pomeni, da se f in g ujemata na množici W.) Ekvivalenčni razred elementa (U, f) po relaciji $\sim_a$ se imenuje ***zarodek holomorfne funkcije*** f v točki $a \in X$. Množica ${}_X\mathcal{O}_a$ vseh zarodkov v a je kolobar, saj se operaciji vsota in produkt na $\mathcal{O}(U)$ na očiten način podedujeta na ${}_X\mathcal{O}_a$.

V lokalni holomorfnih koordinatah $z = (z, \ldots, z_n)$ na okolici točke a, $z(a) = 0$, je ${}_X\mathcal{O}_a$ izomorfen kolobarju ${}_n\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ konvergentnih potenčnih vrst v spremenljivkah $z_1, \ldots, z_n$. Zarodek holomorfne funkcije $f(z_1, \ldots, z_n)$ v točki $z = 0$ je natanko določen s Taylorjevo vrsto f okrog točke 0 oziroma, bolje rečeno, s koeficienti c_α Taylorjeve vrste:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n} c_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

Snop zarodkov holomorfnih funkcij na X je disjunktna unija kolobarjev ${}_X\mathcal{O}_a$ po vseh točkah $a \in X$:

$${}_X\mathcal{O} := \bigsqcup_{a \in X} {}_X\mathcal{O}_a.$$

Označimo s $\pi \colon {}_X\mathcal{O} \to X$ projekcijo z ***bilkami*** (vlakni) $\pi^{-1}(x) = {}_X\mathcal{O}_x$.

Na ${}_X\mathcal{O}$ definiramo ***topologijo snopa*** na naslednji način. Za vsak element (U, f) predsnopa (torej je U odprta množica v X in $f \in \mathcal{O}(U)$ neka holomorfna funkcija na U definiramo

$$M(U, f) = \{f_a \colon a \in U\} \subset {}_X\mathcal{O}.$$

Torej je $M(U, f)$ družina zarodkov funkcije f v točkah $a \in U$. Očitno je $\pi \colon M(U, f) \to U$ bijektivna in $\pi^{-1}(a) \cap M(U, f) = f_a$ za vsako točko $a \in U$.

Trdimo, da je družina vseh množic $M(U, f)$ baza topologije na ${}_X\mathcal{O}$. Očitno je unija teh množic enaka ${}_X\mathcal{O}$, saj je vsak zarodek f_a določen z nekim parom (U, f) in je zato $f_a \in M(U, f)$. Recimo, da velja tudi $f_a \in M(V, g)$ za nek drug par (V, g). Potem je $f_a = g_a$, torej se funkciji f in g ujemata na neki okolici $W \subset U \cap V$ točke a. Odtod sledi $f_b = g_b$ za vsak $b \in W$ in zato $M(W, f) = M(W, g) \subset M(U, f) \cap M(V, g)$.

Trditev 14. *Prostor* ${}_X\mathcal{O}$ *z zgoraj opisano topologijo snopa je Hausdorffov. Projekcija* $\pi\colon {}_X\mathcal{O} \to X$ *je lokalni homeomorfizem, bilke* ${}_X\mathcal{O}_a = \pi^{-1}(a)$ $(a \in X)$ *pa so diskretne. Operaciji vsota in produkt na bilkah sta zvezni.*

Dokaz. Najprej dokažimo, da je topologija Hausdorffova. Vzemimo poljubna elementa $f_a, g_b \in {}_X\mathcal{O}$. V primeru $a \neq b$ izberemo disjunktni okolici $U, V \subset X$ teh dveh točk in predstavnika $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$. Tedaj sta $M(U, f)$ in $M(V, g)$ disjunktni okolici f_a in g_b. Recimo sedaj, da je $a = b$. Izberemo povezano odprto okolico $U \subset X$ točke a ter holomorfni funkciji $f, g \in \mathcal{O}(U)$, ki predstavljata zarodka f_a in g_a. Trdimo, da sta okolici $M(U, f)$ $M(U, g)$ disjunktni. V nasprotnem primeru je $f_b = g_b$ za neko točko $b \in U$, torej velja $f = g$ na neki odprti okolici točke b. Ker je U povezana, iz principa identičnosti sledi $f \equiv g$ na U, kar je v protislovju s predpostavko $f_a \neq g_a$. Torej je ${}_X\mathcal{O}$ res Hausdorffov topološki prostor.

Da je projekcija $\pi\colon {}_X\mathcal{O} \to X$ lokalni homeomorfizem sledi iz definicije topologije: Okolica $M(U, f) = \{f_x : x \in U\}$ zaroda $f_a \in {}_X\mathcal{O}_x$ se preslika s π homeomorfno na množico $U \subset X$. Vsako vlakno $\pi^{-1}(a)$ je torej zaprta diskretna podmnožica snopa ${}_X\mathcal{O}$.

Denimo, da je $f_a + g_a = h_a$. Te tri zarodke lahko predstavimo s funkcijami f, g, h na isti okolici U točke a, tako da je $f + g = h$ na U. Zato je $f_b + g_b = h_b$ za vsak $b \in U$. Odtod in iz definicije topologije na ${}_X\mathcal{O}$ sledi, da je vsota zarodkov zvezna operacija. (Vsota ni definirana za zarodke v različnih točkah.) Podoben argument velja za produkt. $\square$

Na enak način definiramo za vsak $k \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty, \omega\}$ snop ${}_X\mathcal{C}^k$ zarodkov funkcij razreda $\mathcal{C}^k$ na realni mnogoterosti X razreda $\mathcal{C}^k$. Pri tem $k = 0$ pomeni topološke mnogoterosti in zvezne funkcije, torej je ${}_X\mathcal{C}^0 = {}_X\mathcal{C}$ ***snop zarodkov zveznih funkcij*** na X. Pri $k = \omega$ dobimo snop ${}_X\mathcal{C}^\omega$ zarodkov realno analitičnih funkcij.

Bolj perverzen primer je ***snop zarodkov nezveznih funkcij***, ki ga dobimo iz predsnopa vseh (ne nujno zveznih) funkcij na odprtih množicah $U \subset X$. Ta snop ima predvsem teoretičen pomen, saj z njegovo pomočjo lahko konstruiramo kohomološke grupe baze X s koeficienti v poljubnem snopu.

Snopi ${}_X\mathcal{C}^k$ niso Hausdorffovi, razen za $k = \omega$ kjer lahko uporabimo princip identičnosti podobno kot pri holomorfnih funkcijah. Primer, ki poka že, da snop ${}_\mathbb{R}\mathcal{C}^\infty$ ni Hausdorffov, je gladka funkcija $f(t) = 0$ za $t \leq 0$ in $f(t) = \exp(-1/t)$ za $t > 0$. Njen zarodek se ujema z zarodkom ničelne funkcije $g = 0$ v vseh točkah $a < 0$, v točkah $a \geq 0$ pa sta to različna zarodka. Zato zarodka $f_0 \neq g_0$ v $0 \in \mathbb{R}$ nimata nobenega para disjunktnih okolic.

Snopi ${}_X\mathcal{O}$ in ${}_X\mathcal{C}^k$ so snopi kolobarjev. Označimo z ${}_X\mathcal{O}^*_a$ grupo vseh zarodkov holomorfnih funkcij $f_a \in {}_X\mathcal{O}_a$, ki zadoščajo pogoju $f_a(a) \neq 0$; to je ravno grupa (za produkt) vseh enot kolobarja lokalnega kolobarja ${}_X\mathcal{O}_a$. Prirejeni snop ${}_X\mathcal{O}^* = \sqcup_{a \in X}\, {}_X\mathcal{O}^*_a$ se imenuje ***snop zarodkov neničelnih holomorfnih funkcij*** na X. Očitno je ${}_X\mathcal{O}^*$ snop abelovih grup.

Meromorfna funkcija f na kompleksni mnogoterosti X je na majhnih povezanih odprtih množicah $U \subset X$ predstavljena kot kvocient $f = g/h$ dveh holomorfnih funkcij na U, s tem da h ni identično enaka 0 na U. (Kvocient $f = g/h$ v resnici predstavlja funkcijo le na množici $\{x \in U : h(x) \neq 0\}$.) Dve taki funkciji $f_1 = g_1/h_1$ in $f_2 = g_2/h_2$ na različnih okolicah točke $a \in X$ določata isti ***zarodek meromorfne funkcije*** v točki a natanko tedaj, ko velja $g_1 h_2 = g_2 h_1$ v neki okolici točke a. Množica ${}_X\mathcal{M}_a$ vseh zarodkov meromorfnih funkcij v točki $a \in X$ je torej ***obseg ulomkov*** nad kolobarjem ${}_X\mathcal{O}_a$.

Snop zarodkov meromorfnih funkcij označimo z

$$ {}_X\mathcal{M} = \bigsqcup_{a \in X} {}_X\mathcal{M}_a; $$

to je ***snop obsegov***. Če iz obsega ${}_X\mathcal{M}_a$ odstranimo zarodek ničelne funkcije, dobimo grupo ${}_X\mathcal{M}_a^*$ in prirejeni snop

$$ {}_X\mathcal{M}^* = \bigsqcup_{a \in X} {}_X\mathcal{M}_a^* $$

zarodkov netrivialnih meromornih funkcij na X.

Definicija 18. ***Prerez snopa*** $\pi \colon \mathcal{E} \to X$ nad množico $U \subset X$ je zvezna preslikava $f \colon U \to \mathcal{E}|_U$, za katero velja $\pi \circ f = \mathrm{Id}|_U$; ekvivalentno, $f(x) \in \mathcal{E}_x$ za vsak $x \in U$. Če je $U = X$, se $f \colon X \to \mathcal{E}$ imenuje ***globalni prerez***. Množico vseh prerezov $f \colon X \to \mathcal{E}$ označimo z $\Gamma(X, \mathcal{E})$ ali tudi $H^0(X, \mathcal{E})$.

Denimo, da je snop $\mathcal{E}$ dobljen iz nekega predsnopa $\mathcal{E}(U)$, $U \subset X$. Ker ima vsak element $f_a \in \mathcal{E}_a$ predstavnika $f \in \mathcal{E}(U)$ za neko okolico $a \in U \subset X$, sledi iz definicije topologije na snopu $\mathcal{E}$, da za vsak prerez $h \colon X \to \mathcal{E}$ z $h(a) = f_a$ velja $h(b) = f_b$ za vsak b v neki okolici točke a. To pomeni, da so prerezi lokalno predstavljeni z elementi množic $\mathcal{E}(U)$ iz predsnopa. V zgoraj obravnavanih primerih snopov imamo torej

$$ \Gamma(X, {}_X\mathcal{O}) = \mathcal{O}(X), \quad \Gamma(X, {}_X\mathcal{C}^k) = \mathcal{C}^k(X), \quad \Gamma(X, {}_X\mathcal{M}) = \mathcal{M}(X). $$

To je, globalni prerezi snopa ${}_X\mathcal{O}$ so holomorfne funkcije na X, prerezi snopa ${}_X\mathcal{C}$ so zvezne funkcije na X, prerezi snopa ${}_X\mathcal{M}$ so meromorfne funkicje, itd.

Če je $\mathcal{E} \to X$ snop grup (ali kolobarjev), je tudi prostor prerezov $\Gamma(X, \mathcal{E})$ grupa (ali kolobar) za operacije po točkah.

S pomočjo snopa ${}_X\mathcal{O}$ zarodkov holomorfnih funkcij na kompleksni mnogoterosti je preprosto opisati ***analitično nadaljevanje*** holomorfnih funkcij. Pri klasični definiciji analitičnega nadaljevanja začnemo z nekim parom (U_1, f_1), kjer je f_1 holomorfna funkcija na povezani odprti množici $U_1 \subset X$; vsakemu takemu paru pravimo ***funkcijski element***. Analitično nadaljevanje tega elementa vzdož neke poti $\gamma \colon [0,1] \to X$ z $\gamma(0) \in U_1$ pomeni izbor delitve $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots t_n = 1$ in družine funkcijskih elementov (U_k, f_k) $(k = 2, \ldots, n)$, tako da za vsak $k = 1, \ldots, n$ velja

$$ \gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k, \qquad f_{k-1} = f_k \text{ na } U_{k-1} \cap U_k. $$

Pri tem pišemo $(U_0, f_0) = (U_1, f_1)$ za skladnost oznak. Ta kolekcija določa dvig poti γ v pot $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to {}_X\mathcal{O}$ s predpisom

$$\widetilde{\gamma}(t) = (f_k)_{\gamma(t)} \text{ za } t \in [t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \dots n.$$

Tu smo z $(f_k)_{\gamma(t)}$ označili zarodek holomorfne funkcije f_k v točki $\gamma(t) \in X$. Definicija je dobra, saj se funkciji f_{k-1} in f_k ujemata na preseku $U_{k-1} \cap U_k$, ki vsebuje lok $\gamma([t_{k-1}, t_k])$. Obratno, vsaka pot $\lambda\colon [0,1] \to {}_X\mathcal{O}$ določa analitično nadaljevanje funkcije f_0, določene z zarodkom $\lambda(0)$.

Iz tega razmisleka vidimo, da vsak zarodek $f_a \in {}_X\mathcal{O}$ določa maksimalno (v splošnem večlično) holomorfno funkcijo, ki jo dobimo kot funkcijo na povezani komponenti $R = R_{f_a} \subset {}_X\mathcal{O}$ točke f_a v snopu ${}_X\mathcal{O}$. Ker je projekcija $\pi\colon R \to X$ lokalni homeomorfizem, obstaja na R natanko ena struktura kompleksne mnogoterosti, za katero je ta projekcija lokalno biholomorfna. Definiramo funkcijo $F\colon R \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$F(f_x) := f_x(x), \qquad f_x \in R.$$

To je, za vsak zarodek $f_x \in R$ je $F(f_x) \in \mathbb{C}$ vrednost zarodka f_x v točki x. Očitno je F holomorfna funkcija na ploskvi R, ki se ujema z začetno funkcijo f_a v neki okolici začetne točke $a \in X$. Funkcijo F smo torej dobili z analitičnim nadaljevanjem zarodka f_a po vseh možnih poteh v X, po katerih se dani zarodek da analitično nadaljevati; domene R torej ne moremo še povečati z analitičnim nadaljevanjem. Zato se ta ploskev $R = R_{f_a}$ imenuje ***maksimalna domena*** zarodka holomorfne funkcije f_a, funkcija F pa je prirejena ***maksimalna holomorfna funkcija***.

Zgodbo o snopih lahko povzamemo s tole dobro znano duhovito prispodobo:

Snopi so topološki prostori, v katerih je topologija 'horizontalna', algebra pa 'vertikalna'.

II.2 Homomorfizmi snopov

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj standardnih konstrukcij s snopi, še posebej pojem podsnopa, kvocientnega snopa, homomorfizma snopov, itd.

Definicija 19. Naj bo $\mathcal{F}$ snop abelovih grup nad topološkim prostorom X. Podmnožica $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ je ***podsnop*** snopa $\mathcal{F}$, če je $\mathcal{E}$ ***odprta*** podmnožica v $\mathcal{F}$ in je vsaka bilka $\mathcal{E}_x$ abelova podgrupa grupe $\mathcal{F}_x$. Analogno definiramo podsnop kolobarjev ali drugih algebraičnih struktur.

Če je $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ podsnop snopa abelovih grup $\mathcal{F}$, potem je kvocient $\mathcal{F}_x/\mathcal{E}_x$ abelova grupa za vsak $x \in X$. Množica

$$\mathcal{F}/\mathcal{E} = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x/\mathcal{E}_x$$

s kvocientno topologijo se imenuje ***kvocientni snop*** snopa $\mathcal{F}$ po podsnopu $\mathcal{E}$.

Definicija 20. Naj bosta $\mathcal{E}$ in $\mathcal{F}$ snopa abelovih grup nad topološkim prostorom X. Zvezna preslikava $\phi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, tako da je $\phi(\mathcal{E}_x) \subset \mathcal{F}_x$ in je $\phi_x\colon E_x \to \mathcal{F}_x$ homomorfizem abelovih grup za vsak $x \in X$, se imenuje ***homomorfizem snopov abelovih grup***.

Analogno definiramo homomorfizem snopov abelovih kolobarjev itd. Dokaz naslednje trditve je preprost in ga prepuščamo bralcu.

Trditev 15. *Če je $\phi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ homomorfizem snopov abelovih grup nad X, potem je jedro*

$$\ker \phi = \{e \in \mathcal{E}_x \colon x \in X,\ \phi_x(e) = 0 \in \mathcal{F}_x\} \subset \mathcal{E}$$

podsnop abelovih grup snopa $\mathcal{E}$, slika

$$\operatorname{im} \phi = \{\phi(e) \colon e \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{F}$$

pa je podsnop abelovih grup snopa $\mathcal{F}$.

Definicija 21. (a) Naj bosta $\phi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ in $\psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ homomorfizma snopov abelovih grup nad X. Zaporedje homomorfizmov

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}$$

se imenuje ***eksaktno***, če je $\operatorname{im} \phi = \ker \psi$.

(b) ***Kratko eksaktno zaporedje*** homomorfizmov snopov je zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \longrightarrow 0, \tag{II.2.1}$$

ki je eksaktno na vsakem mestu. Pri tem smo z 0 označili trivialni snop nad X.

(c) Zaporedje homomorfizmov snopov abelovih grup nad X,

$$\cdots \xrightarrow{\phi_{j-1}} \mathcal{E}_j \xrightarrow{\phi_j} \mathcal{E}_{j+1} \xrightarrow{\phi_{j+1}} \mathcal{E}_{j+2} \xrightarrow{\phi_{j+2}} \cdots \tag{II.2.2}$$

je ***kompleks homomorfizmov snopov***, če je $\phi_{j+1} \circ \phi_j = 0$ za vsak j, in je ***dolgo eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov***, če je $\operatorname{im} \phi_j = \ker \phi_{j+1}$ za vsak j.

Eksaktnost zaporedja (II.2.1) na prvem mestu $0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}$ pomeni $\ker \phi = 0$, torej je ϕ izomorfizem snopa $\mathcal{E}$ na podsnop $\phi(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$. Eksaktnost na sredini pomeni $\operatorname{im} \phi = \ker \psi$. Eksaktnost na zadnjem mestu $\mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \to 0$ pa pomeni, da je ψ surjektiven. Odtod sledi, da $\psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ inducira izomorfizem $\mathcal{F}/\phi(\mathcal{E}) = \mathcal{F}/\ker \psi \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}$.

Vsako dolgo eksaktno zaporedje (II.2.2) lahko razstavimo na kratka eksaktna zaporedja:

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} \phi_{j-1} \longrightarrow \mathcal{E}_j \xrightarrow{\phi_j} \operatorname{im} \phi_j \longrightarrow 0. \tag{II.2.3}$$

II.3 Kohomologija s koeficienti v snopu

Naj bo X topološki prostor in $\mathcal{F}$ snop abelovih grup nad X. Za vsako število $q \in \mathbb{Z}_+$ bomo konstruirali abelovo grupo $H^q(X, \mathcal{F})$, ki se imenuje q-ta ***kohomološko grupa*** prostora X s koeficienti v snopu $\mathcal{F}$. V posebnem primeru, ko je $\mathcal{F}$ konstanten snop nad X, to je snop $X \times G \to X$, kjer je G abelova grupa z diskretno topologijo (npr. $G = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$), je $H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(X, G)$ običajna kohomološka grupa prostora X s koeficienti v G, ki jo lahko dobimo s katero od standardnih topoloških konstrukcij (npr. simplicialna kohomologija). Kohomološke grupe predstavljajo obstrukcije za obstoj globalnih rešitev problemov, ki so lokalno rešljivi.

Obstaja več konstrukcij kohomoloških grup; na tem mestu si bomo ogledali t.i. konstrukcijo Čechova. Podrobnosti lahko bralec najde npr. v [2] ali [16].

Za nas bo najpomembnejša prva kohomološka grupa $H^1(X, \mathcal{F})$. Za motivacijo njene definicije si oglejmo ***prvi Cousinov problem***, na katerega naravno naletimo pri reševanju ***Mittag-Lefflerjevega problema*** na domenah $X \subset \mathbb{C}$ (ali na Riemannovih ploskvah). Radi bi našli meromorfno funkcijo $m \in \mathcal{M}(X)$ s predpisanimi poli in predpisanimi glavnimi deli v teh polih. Recimo, da naj bi m imela pole v neki diskretni množici točk $x_1, x_2, \ldots$ v X, glavni del m v točki x_k pa naj bo enak glavnemu delu funkcije $m_k \in \mathcal{M}(U_k)$, definirane in meromorfne na neki odprti okolici $U_k \subset X$ točke x_k. Z zmanjšanjem okolice U_k lahko predpostavimo, da je m_k holomorfna na $U_k \setminus \{x_k\}$. Družini (m_k) dodajmo še funkcijo $m_0 = 0$ na množici $U_0 = X \setminus \{x_1, x_2, \ldots\}$. Kolekcija $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2, \ldots\}$ je odprto pokritje baze X. Problem je seveda v tem, da se funkcije m_k med seboj ne ujemajo na presekih domen. Njihove razlike

$$f_{i,j} = m_j - m_i \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$$

so holomorfne funkcije na presekih $U_{i,j} := U_i \cap U_j$, saj se glavni deli uničijo. Denimo sedaj, da uspemo najti družino (f_i) holomorfnih funkcij $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, tako da velja

$$f_j - f_i = f_{i,j} \qquad \text{na } \ U_{i,j} \tag{II.3.1}$$

za vsak par indeksov i, j. Odtod z upoštevanjem $f_{i,j} = m_j - m_i$ sledi

$$m_i - f_i = m_j - f_j \qquad \text{na } \ U_{i,j}.$$

Družina $m_i - f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ meromorfnih funkcij na elementih U_i našega pokritja torej definira globalno meromorfno funkcijo $m \in \mathcal{M}(X)$, ki ima očitno iste pole in glavne dele kot funkcije m_i, saj so funkcije $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ holomorfne. Problem smo s tem rešili, bistveni del pa je bil obstoj družine holomorfnih rešitev (f_i) enačb (II.3.1). V kohomološkem jeziku to pomeni, da je 1-kocikel $(f_{i,j})$ (na pokritju $\mathcal{U}$, z vrednostmi v snopu $\mathcal{O}$ zarodov holomorfnih funkcij na X) hkrati 1-korob, torej enak sliki neke 0-koverige (f_i) s homomorfizmom

$$\delta((f_i)) = (f_{i,j}), \qquad f_{i,j} = f_j - f_i \text{ na } U_{i,j}.$$

Možna obstrukcija za obstoj globalne rešitve torej leži v prvi kohomološki grupi $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ oziroma, če upoštevamo tudi prehode na finejša pokritja, v kohomološki grupi $H^1(X, \mathcal{O})$ ploskve X s koeficienti v snopu zarodkov holomorfnih funkcij.

Mittag-Lefflerjev problem je vselej rešljiv na poljubni domeni $X \subset \mathbb{C}$, ali na poljubni nekompaktni Riemanovi ploskvi, in velja

$$H^1(X, \mathcal{O}) = 0.$$

To kohomološko grupo lahko razumemo tudi kot grupo razredov nerešljivih nehomogenih Cauchy-Riemannovih enačb $\overline{\partial} u = f$ na X. Natančneje, obstaja naravni izomorfizem

$$H^1_{\overline{\partial}}(X) \xrightarrow{\cong} H^1(X, \mathcal{O})$$

prve ***Dolbeaultove kohomološke grupe*** $H^1_{\overline{\partial}}(X)$ na prvo Čechovo kohomološko grupo s koeficienti v $\mathcal{O}$. Če je X domena v $\mathbb{C}$ (ali odprta Riemannova ploskev), je vsaka nehomogena $\overline{\partial}$ enačba na X rešljiva, to je, $H^1_{\overline{\partial}}(X) = 0$. To lahko vidimi z obstojem rešitev na relativno kompaktnih podmnožicah v X (kjer uporabimo Cauchy-Greenov integralni operator) ter Rungejevim aproksimacijskim izrekom, ki omogoča sestaviti konvergentno zaporedje rešitev na vedno večjih podmnožicah v X. Kot bomo videli kasneje, to ne velja na kompaktnih Riemannovih ploskvah X roda $g \geq 1$.

Podobno nas reševanje ***Weierstrassovega problema***, to je konstrukcija holomorfne funkcije $f \in \mathcal{O}(X)$ na Riemannovimi ploskvi X s prepisanimi ničlami (ali konstrukcija meromorfne funkcije s predpisanimi ničlami in poli), privede do možne obstrukcije v prvi kohomološki grupi $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ s koeficienti v snopu abelovih grup zarodkov neničelnih holomorfnih funkcij na X (t.i. ***drugi Cousinov problem***). Tudi ta problem je vselej rešljiv na domenah v $\mathbb{C}$ in na odprtih Riemannovih ploskvah, kjer velja $H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$, ne pa tudi na kompaktnih Riemannovih ploskvah ali na domenah v $\mathbb{C}^n$ za $n > 1$. (Glej trditev 19 in izrek 38 v §II.5.)

To konstrukcijo bomo sedaj formalizirali.

Za vsako odprto množico $U \subset X$ označimo $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F})$ abelovo grupo vseh prerezov $U \to \mathcal{F}|_U$ snopa $\mathcal{F}$ nad U. Naj bo $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ neko odprto pokritje baze X. Za vsako q-terico indeksov $i_1, \ldots, i_q \in A$ označimo

$$U_{i_1, \ldots, i_q} = U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \cdots \cap U_{i_q}.$$

Za vsako število $q = 0, 1, 2, \ldots$ definiramo abelovo grupo $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ vseh q-koverig na pokritju $\mathcal{U}$ s predpisom

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0, \ldots, i_q \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0, \ldots, i_q}).$$

To je kartezičen produkt abelovih grup $\mathcal{F}(U_{i_0, \ldots, i_k})$ po vseh $(k+1)$-tericah indeksov $i = (i_0, \ldots, i_q) \in I^{q+1}$. Elementi $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ se imenujejo q-***koverige*** na pokritju $\mathcal{U}$ z vrednostmi v snopu $\mathcal{F}$. Vsaka k-koveriga je torej kolekcija prerezov

$$f = \left(f_{i_0,\dots,i_q} \colon (i_0,\dots,i_q) \in I^{q+1}\right), \qquad f_{i_0,\dots,i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0,\dots,i_q}).$$

Tako je 0-koveriga družina $f = (f_i)_{i\in I}$, 1-koveriga je družina $f = (f_{i,j})_{i,j\in I}$, itd.

Sedaj definiramo ***korobne operatorje***

$$\begin{array}{rcl} \delta & = & \delta^0 \colon C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \\ \delta & = & \delta^1 \colon C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \\ \dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta & = & \delta^q \colon C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \end{array}$$

na naslednji način:

(i) Za $f = (f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ definiramo $\delta((f)_{i\in I}) = (g_{i,j})_{i,j\in I}$, kjer je

$$g_{i,j} = f_j|_{U_{i,j}} - f_i|_{U_{i,j}} \in \mathcal{F}(U_{i,j}).$$

V nadaljevanju bomo pisali kar $g_{i,j} = f_j - f_i$ in ob tem razumeli, da je razlika definirana samo na preseku $U_{i,j} = U_i \cap U_j$ domen prerezov f_i in f_j.

(ii) Za $f = (f_{i,j})_{i,j\in I}$ definiramo $\delta((f_{i,j})) = (g_{i,j,k})$, kjer je

$$g_{i,j,k} = f_{j,k} - f_{i,k} + f_{i,j} \in \mathcal{F}(U_{i,j,k}).$$

(iii) Za poljuben $q \in \mathbb{Z}_+$ in $(f) \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ je element $\delta((f)) = (g) \in C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ definiran s predpisom

$$g_{i_0,i_1,\dots,i_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots i_{q+1}}, \qquad (i_0,i_1,\dots,i_{q+1}) \in I^{q+2},$$

kjer strešica nad indeksom pomeni, da je ta indeks izpuščen.

Očitno so operatorji $\delta^q \colon C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ homomorfizmi abelovih grup.

Trditev 16. *Za vsak* $q = 0,1,2,\dots$ *velja*

$$\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0.$$

Dokaz. Preverimo pri $q = 0$:

$$\delta^1 \circ \delta^0((f_i)) = \delta^1((f_j - f_i)_{i,j\in I}) = (f_k - f_j) - (f_k - f_i) + (f_j - f_i) = 0.$$

Za $q \geq 1$ prepuščamo dokaz bralcu. $\square$

Za vsak $q \in \mathbb{Z}_+$ označimo

$$\begin{aligned} Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) &= \ker\left(\delta^q \colon C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})\right), \\ B^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) &= \operatorname{im}\left(\delta^{q-1} \colon C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{q}(\mathcal{U},\mathcal{F})\right). \end{aligned}$$

Pri $q = 0$ definiramo $B^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$ (trivialna grupa). Elementi grupe $Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ se imenujejo ***q-kocikli***, elementi grupe $B^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ pa ***q-korobovi***. Iz trditve 16 sledi

$$B^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \subset Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F}), \qquad q = 0,1,2,\ldots.$$

Zaporedje homomorfizmov abelovih grup

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

je torej ***koverižni kompleks***. Njegova ***kohomologija*** je

$$H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \frac{Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F})}{B^q(\mathcal{U},\mathcal{F})}, \qquad H^*(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Grupa $H^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ se imenuje ***q-ta kohomološka grupa pokritja $\mathcal{U}$ s koeficienti v $\mathcal{F}$***. Njeni elementi so ekvivalenčni razredi q-kociklov $f \in Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$, pri čemer dva kocikla $f, g \in Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ določata isti razred $[f] = [g] \in H^k(\mathcal{U},\mathcal{F})$ natanko tedaj, ko je njuna razlika korob: $f - g = \delta^{q-1}(h)$ za nek $h \in C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Opomba. Iste kohomološke grupe dobimo, če uporabimo namesto grup koverig $C^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ podgrupe $C^q_{\mathrm{sym}}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \subset C^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ ***simetričnih koverig***, to je takih, ki zadoščajo pogoju

$$f_{i_{\pi(0)},i_{\pi(1)},\ldots,i_{\pi(q)}} = \operatorname{sign}(\pi) f_{i_0,i_1,\ldots,i_q}$$

za vsako permutacijo π množice $\{0,1,\ldots,q\}$. Tu je $\operatorname{sign}(\pi) = \pm 1$ znak permutacije π. □

Trditev 17. $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$.

Dokaz. Iz definicije homomorfizma δ^0 sledi, da je 0-koveriga $(f_i) \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ kocikel, torej element podgrupe $Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$, natanko tedaj, ko je $f_j - f_i = 0$ na $U_{i,j}$ za vsak par indeksov $i, j \in I$. Slednje pomeni, da se prerezi $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ ujemajo ne presekih njihovih definicijskih množic, zato definirajo globalni prerez snopa $\mathcal{F}$. Torej je $Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$. Ker je $B^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$, sledi $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$. □

Iz trditve 17 vidimo, da je grupa $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ neodvisna od izbire pokritja $\mathcal{U}$ prostora X, zato lahko pišemo kar $H^0(X,\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$. Višje kohomološke grupe $H^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ za $q \geq 1$ so v splošnem odvisne od izbire pokritja. Vpliv pokritja eliminiramo tako, da si ogledamo efekt prehoda na finejša pokritja in nato definiramo kohomološke grupe prostora X s koeficienti v snopu $\mathcal{F}$ kot induktivne limite

$$H^q(X,\mathcal{F}) = \lim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \left(\bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \right) \Big/ \sim$$

Osnovna ideja je naslednja. Pokritje $\mathcal{V} = (V_k)_{k\in K}$ prostora X se imenuje ***finejše*** od pokritja $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$, kar označimo $\mathcal{V} < \mathcal{U}$, če je vsaka množica V_k vsebovana vsaj v eni množici U_i. Če to velja, lahko izberemo preslikavo $\tau\colon K \to I$, ki zadošča pogoju

$$V_k \subset U_{\tau(k)} \qquad \forall k \in K. \tag{II.3.2}$$

Izbira preslikave τ se imenuje ***včrtanje*** pokritja $\mathcal{V}$ v pokritje $\mathcal{U}$. Na grupah koverig dobimo inducirani ***zožitveni homomorfizem***

$$\tau^q\colon C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longmapsto C^q(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

s predpisom $\tau^q((f)) = (g_{k_0,\ldots,k_q})$, kjer je

$$g_{k_0,\ldots,k_q} = f_{\tau(k_0),\ldots,\tau(k_q)}|_{V_{k_0,\ldots,k_q}}.$$

Npr., pri $q = 1$ dobimo $g_{kl} = f_{\tau(k)\tau(l)}|_{V_k\cap V_l}$ za vsak par $k,l \in K$. Lahko je preveriti, da τ^q komutira s korobnim operatorjem δ:

$$\delta^q \circ \tau^q = \tau^{q+1} \circ \delta^q,$$

zato preslika kocikle na $\mathcal{U}$ v kocikle na $\mathcal{V}$ ter korobove na $\mathcal{U}$ v korobove na $\mathcal{V}$. Posledično τ^q inducira homomorfizem kohomoloških grup

$$\tau^q\colon H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{V},\mathcal{F}), \qquad q = 0,1,2,\ldots.$$

Da se pokazati, da je ta homomorfizem kohomoloških grup neodvisen od izbire včrtanja pokritja $\mathcal{V}$ v pokritje $\mathcal{U}$, torej od izbire preslikave $\tau\colon K \to I$, ki zadošča pogoju (II.3.2). (Za dokaz pri $q = 1$ glej npr. [7, Lemma 12.3, p. 98].)

Kohomološko grupo $H^q(X,\mathcal{F})$ definiramo kot množico vseh ekvivalenčnih razredov $[f]$ q-kociklov $f \in Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ po vseh pokritjih $\mathcal{U}$ prostora X, pri čemer sta dva kocikla $f \in Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ in $g \in Z^q(\mathcal{V},\mathcal{F})$ ekvivalentna natanko tedaj, ko obstaja skupno nadaljevanje $\mathcal{W} < \mathcal{U}$, $\mathcal{W} < \mathcal{U}$, s pripadajočima včrtanjema τ,ρ, tako da je razlika $\tau^q(f)-\rho^q(g) \in B^q(\mathcal{W})$ korob na pokritju $\mathcal{W}$; ekvivalentno:

$$[\tau^q(f)] = [\rho^q(g)] \in H^q(\mathcal{W},\mathcal{F}).$$

Za vsako pokritje $\mathcal{U}$ imamo naravni homomorfizem

$$H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^q(X,\mathcal{F}). \tag{II.3.3}$$

Pri $q = 0$ je to izomorfizem, saj sta obe grupi enaki grupi $\mathcal{F}(X)$ vseh globalnih prerezov snopa $\mathcal{F}$ nad X. Pri $q = 1$ je vsak od teh homomorfizmov injektiven (glej dokaz izreka 22 spodaj), ni pa nujno surjektiven (glej npr. [7, p. 99]). Pri $q \geq 2$ homomorfizmi (II.3.3) v splošnem niso niti injektivni niti surjektivni.

Opomba. Če je $\mathcal{F}$ snop abelovih kolobarjev ali snop vektorskih prostorov, so tudi kohomološke grupe $H^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ in $H^q(X,\mathcal{F})$ kolobarji oz. vektorski prostori.

Definicija 22. (a) Pokritje $\mathcal{U}$ prostora X se imenuje ***Lerayevo pokritje*** za snop $\mathcal{F}$, če je (II.3.3) izomorfizem za vsak $q = 1, 2, \ldots$. (To pomeni, da lahko kohomološke grupe $H^q(X,\mathcal{F})$ izračunamo na pokritju $\mathcal{U}$.)

(b) Pokritje $\mathcal{U}$ prostora X je ***aciklično*** za snop $\mathcal{F}$, če velja

$$H^q(U_{i_0,\ldots,i_k}) = 0 \qquad \forall i_0,\ldots,i_k \in I,\ \forall q = 1, 2, \ldots.$$

Brez dokaza bomo navedli naslednji Lerayev izrek.

Izrek 21 (Lerayev izrek). *Vsako aciklično pokritje je tudi Lerayevo.*

Posebej navedimo naslednji poseben (in bolj preprost) primer Lerayevega izreka, ki je za nas še posebej zanimiv (glej npr. [7, Theorem 12.8, p. 101]).

Izrek 22 (Lerayev izrek za H^1). *Naj bo $\mathcal{F}$ snop abelovih grup na topološkem prostoru X in $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ odprto pokritje X. Potem velja:*

(i) *Naravni homomorfizem $H^1(U_i,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{F})$ je injektiven.*

(ii) *Če je $H^1(U_i,\mathcal{F}) = 0$ za vsak $i \in I$, potem je homomorfizem $H^1(U_i,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{F})$ izomorfizem:*
$$H^1(X,\mathcal{F}) \cong H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Pokritje $\mathcal{U}$ kot v izreku 22 (ii) se imenuje ***Lerayevo pokritje 1. reda*** za snop $\mathcal{F}$.

Dokaz. Zadošča dokazati, da je za vsako finejše pokritje $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ inducirani homomorfizem $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ injektiven (v primeru (i)) oziroma izomorfizem (v primeru (ii)). Iz definicije grupe $H^1(X,\mathcal{F})$ kot induktivne limite grup $H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ potem sledi, da je $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{F})$ injektiven oziroma izomorfizem.

Naj bo $\mathcal{V} = (V_k)_{k\in K}$ in $\tau\colon K \to I$ včrtanje, torej je $V_k \subset U_{\tau(k)}$ za vsak $k \in K$. Naj bo

$$\tau^1\colon H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

inducirani homomorfizem.

(i) τ^1 je injektiven za vsak par pokritij $\mathcal{V} < \mathcal{U}$. Naj bo $f = (f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ in $\tau^1((f)) \in Z^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ korob na $\mathcal{V}$ (torej $\tau^1([f])] = 0 \in H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$). Dokazati moramo, da je f korob na $\mathcal{U}$. Pogoj na $\tau^1((f))$ pomeni, da obstajajo prerezi $g_k \in \mathcal{F}(V_k)$, tako da je

$$f_{\tau(k),\tau(l)} = g_k - g_l \quad \text{na } V_{k,l}, \quad \forall k, l \in K.$$

Ker je $(f_{i,j})$ kocikel, dobimo na preseku $U_i \cap V_{k,l}$:

$$g_k - g_l = f_{\tau(k),\tau(l)} = f_{\tau(k),i} + f_{i,\tau(l)} = f_{i,\tau(l)} - f_{i,\tau(k)}$$

in zato $f_{i,\tau(k)} + g_k = f_{i,\tau(l)} + g_l$. Ta družina prerezov na presekih $U_i \cap V_k$ (za fiksen $i \in I$) torej definira prerez $-h_i \in \mathcal{F}(U_i)$, ki zadošča $-h_i = f_{i,\tau(k)} + g_k$ na $U_i \cap V_k$ za vsak $k \in K$. Na $U_i \cap U_j \cap V_k = U_{i,j} \cap V_k$ velja

$$f_{i,j} = f_{i,\tau(k)} + f_{\tau(k),j} = f_{i,\tau(k)} + g_k - f_{j,\tau(k)} - g_k = h_j - h_i.$$

Ker to velja za vsak $k \in K$, sledi $f_{i,j} = h_j - h_i$ na $U_{i,j}$, torej je $[f] = 0 \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

(ii) Če je $\mathcal{U}$ Lerayevo pokritje prvega reda, je homomorfizem τ^1 surjektiven. Naj bo $(h_{k,l})) \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Fiksirajmo indeks $i \in I$. Družina $\mathcal{U}_i = (U_i \cap V_k)_{k \in K}$ je odprto pokritje množice U_i. Ker je po predpostavki $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ in je homomorfizem $H^1(\mathcal{U}_i, \mathcal{F}) \to H^1(U_i, \mathcal{F})$ injektiven po točki (i), sledi $H^1(\mathcal{U}_i, \mathcal{F}) = 0$. Torej obstaja 0-koveriga $g_{i,k} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_k)$ na pokritju $\mathcal{U}_i$ množice U_i, ki zadošča pogoju

$$h_{k,l} = g_{i,l} - g_{i,k} \quad \text{na } U_i \cap V_k \cap V_l.$$

Enako dobimo na množici U_j razcep

$$h_{k,l} = g_{jl} - g_{j,k} \quad \text{na } U_j \cap V_k \cap V_l.$$

Na preseku $U_{i,j} \cap V_{k,l}$ torej velja

$$g_{i,l} - g_{i,k} = g_{j,l} - g_{j,k} \Longleftrightarrow g_{j,k} - g_{i,k} = g_{j,l} - g_{i,l}.$$

Zato obstaja prerez $f_{i,j} \in \mathcal{F}(U_{i,j})$, ki zadošča

$$f_{i,j} = g_{i,k} - g_{j,k} \quad \text{na } U_{i,j} \cap V_k, \quad \forall k \in K.$$

Lahko je preveriti, da je $f = (f_{i,j})_{i,j \in I}$ 1-kocikel na $\mathcal{U}$, torej določa razred $[f] \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Poleg tega je $\tau^1([f]) = [h] \in H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, kar vidimo iz naslednjega računa na $V_{k,l}$:

$$f_{\tau(k),\tau(l)} - h_{k,l} = (g_{\tau(k),k} - g_{\tau(l),k}) - (g_{\tau(l),l} - g_{\tau(l),k}) = g_{\tau(k),k} - g_{\tau(l),l} = \delta^0((g_{\tau(k),k})).$$

Torej je res $\tau^1([f]) - [h] = [\tau^1(f) - h] = 0 \in H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. $\square$

Lerayev izrek 21 ima naslednjo pomembno posledico. Recimo, da je baza X mnogoterost realne dimenzije n. Za vsako tako mnogoterost obstaja odprto pokritje $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, tako da so množice U_i in vsi njihovi preseki $U_{i_0,\ldots,i_q}$ kontraktibilni (ali prazni); poleg tega je vsak presek dolžine $> n+1$ prazen. Tako pokritje je Lerayevo za vsak konstanten snop abelovih grup, saj je kohomologija konstantnega snopa trivialna na kontraktibilni množici. Odtod sledi:

Posledica 5. *Za vsak konstanten snop $\mathcal{F}$ abelovih grup na realni n-dimenzionalni mnogoterosti X velja*

$$H^q(X,\mathcal{F}) = 0, \qquad q > n.$$

Naj bo $\mathcal{E}$ nek snop abelovih kolobarjev z enoto nad X. Snop $\mathcal{F}$ nad X se imenuje ***snop $\mathcal{E}$-modulov***, če je vsaka bilka $\mathcal{F}_x$ $(x \in X)$ $\mathcal{E}_x$-modul in so algebraične operacije na $\mathcal{F}$ (vsota, produkt z elementi iz $\mathcal{E}$) zvezne.

Npr., če je $\mathcal{E}$ snop abelovih kolobarjev z enoto in je $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}$ snop idealov v $\mathcal{E}$, je $\mathcal{J}$ tudi snop $\mathcal{E}$-modulov.

Definicija 23. Snop $\mathcal{E}$ abelovih kolobarjev z enoto na X se imenuje ***fin snop***, če dopušča ***particijo enote*** v naslednjem smislu: Za vsako odprto pokritje $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ baze X obstaja neko finejše lokalno končno pokritje $\mathcal{V} = (V_k)_{k\in K} < \mathcal{U}$ in družina prerezov $e_k \in \Gamma(X,\mathcal{E})$ s nosilci $\operatorname{supp}(e_k) \subset V_k$, tako da je $\sum_{k\in K} e_k = 1$ na X. (Vsota je lokalno končna; tu je 1 prerez, čigar vrednost $1_x \in \mathcal{E}_x$ je enota kolobarja $\mathcal{E}_x$ za vsak $x \in X$.)

Snop modulov $\mathcal{F}$ nad finim snopom kolobarjev $\mathcal{E}$ je ***fin snop $\mathcal{E}$-modulov***.

Primer 17. Snop $\mathcal{E}^k$ zarodkov gladkih k-form na gladki mnogoterosti X je fin snop modulov nad (finim) snopom kolobarjev $\mathcal{E}^0$ zarodkov gladkih funkcij na X. Če je $f \in \Gamma(X,\mathcal{E}^k)$ poljuben prerez in je (g_k) neka gladka particija enote na snopu $\mathcal{E}^0$ gladkih funkcij na X, je $f = \sum_k g_k f$ particija prereza f na prereze $g_k f$ z nosilci $\operatorname{supp}(g_k f) \subset \sup g_k$.

Izrek 23. *Za vsak fin snop modulov $\mathcal{F}$ nad finim snopom abelovih kolobarjev z enoto $\mathcal{E}$ na X velja*

$$H^q(X,\mathcal{F}) = 0, \qquad q = 1, 2, \ldots.$$

Primer 18. Snopi $\mathcal{E}^k$ gladkih diferencialnih k-form na mnogoterosti X so fini snopi $\mathcal{E}^0$-modulov, kjer je $\mathcal{E}^0$ snop zarodkov kolobarjev gladkih funkcij. Zato je

$$H^q(X,\mathcal{E}^k) = 0, \qquad q \geq 1,\ k \geq 0.$$

Dokaz ((izreka 23)**.** Dokazali bomo samo primer $q = 1$; dokaz v splošnem je podoben. Naj bo kohomološki razred $[f] \in H^1(X,\mathcal{F})$ predstavljen z 1-kociklom $f = (f_{i,j})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ na nekem lokalno končnem pokritju $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$. S prehodom na finejše pokritje lahko predpostavimo, da obstaja particija enote $(g_i)_{i\in I}$ na snopu $\mathcal{E}$, podrejena pokritju $\mathcal{U}$ (to je, $\operatorname{supp}(g_i) \subset U_i$ in $\sum_i g_i = 1$). Definiramo

$$h_i = \sum_{k\in I} g_k f_{k,i} \in \mathcal{F}(U_i), \qquad i \in I.$$

Ker je $\operatorname{supp}(g_k) \subset U_k$, lahko produkt $g_k f_{k,i}$ razširimo z 0 na $U_i \setminus U_k$, torej je to dobro definiran prerez na U_i. Tedaj je

$$h_j - h_i = \sum_{k\in I} g_k f_{k,j} - g_k f_{k,i} = \sum_{k\in I} g_k f_{i,j} = f_{i,j}.$$

Upoštevali smo kocikelni pogoj $f_{k,j} - f_{k,i} = f_{i,j}$ na $U_{i,j,k}$. □

Izrek 24. *Za vsako kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov abelovih grup*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

obstaja dolgo eksaktno zaporedje homomorfizmov kohomoloških grup

$$\begin{array}{ll} 0 & \longrightarrow H^0(X,\mathcal{E}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_0} \\ & \xrightarrow{\delta_0} H^1(X,\mathcal{E}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_1} \\ & \xrightarrow{\delta_1} H^2(X,\mathcal{E}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_2} \cdots\cdots \end{array}$$

Preslikava, ki kratkemu eksaktnemu zaporedju homomorfizmov sopov priredi dolgo eksaktno zaporedje kohomoloških grup, je kovarianten funktor.

Izreka ne bomo podrobno dokazali, bomo pa opisali definicijo homomorfizmov.

Preslikave $H^q(X,\mathcal{E}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{F})$ so porojene s homomorfizmom $\phi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, preslikave $H^q(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{G})$ pa s homomorfizmom $\psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

Preslikava $\delta_q\colon H^q(X,\mathcal{G}) \to H^{q+1}(X,\mathcal{E})$ $(q \in \mathbb{Z}_+)$ se imenuje ***vezni homomorfizem***; definicija je nasledja.

Oglejmo si najprej primer $q = 0$. Naj bo $g \in H^0(X,\mathcal{G})$ nek globalni prerez snopa $\mathcal{G}$. Ker je homomorfizem snopov $\psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ surjektiven, obstaja pokritje $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ baze X in družina prerezov $f = (f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ (to je, 0-koveriga na pokritju $\mathcal{U}$ s koeficienti v $\mathcal{F}$), tako da je $\phi(f_i) = g|_{U_i}$ za vsak $i \in I$. Naj bo $f^1 = (f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ prorejeni 1-kocikel z $f_{i,j} = f_j - f_i$ nan $U_{i,j}$, $(i,j) \in I$. Tedaj je $\psi(f_{i,j}) = \psi(f_j) - \psi(f_i) = g - g = 0$ na $U_{i,j}$. Ker je $\operatorname{im}\phi = \ker\psi$ in je ϕ injektiven, obstaja natanko določena druǐna $e = (e_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$, tako da je $\phi(e_{i,j}) = f_{i,j}$ na $U_{i,j}$ za vsak $i,j \in I$. Očitno je e 1-kocikel, saj je f^1 1-kocikel in je ϕ injektiven homomorfizem. Torej e določa kohomološki razred $[e] \in H^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$ in s tem tudi v $H^1(X,\mathcal{E})$. Definiramo $\delta_0(g) = [e] \in H^1(X,\mathcal{E} =)$.

Podobno definiramo δ_q za vsak $q \in \mathbb{Z}_+$. Pri $q > 0$ moramo najprej predstaviti element $[g] \in H^q(X,\mathcal{G})$ s q-kociklom $g \in Z^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ na nekem dovolj finem pokritju $\mathcal{U}$, tako da je $g = \psi(f)$ za neko q-koverigo $f \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ na istem pokritju, postopek pa nato nadaljujemo enako kot prej: f potisnemo navzdol do $(q+1)$-kocikla $f^{q+1} \in Z^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ in sklepamo, da leži v jedru homomorfizma ψ, zato tudi v sliki homomorfizma ϕ. Na ta način dobimo kocikel $e \in Z^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{E})$, ki določa element grupe $H^{q+1}(X,\mathcal{E})$.

Preostane nam preveriti, da je dobljeno zaporedje homomorfizmov eksaktno.

S pomočjo izreka 24 bomo sedaj prikazali drug naraven način za izračun kohomoloških grup s koeficienti v snopu. V ta namen potrebujemo pojem aciklične resolvente.

Definicija 24. Eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov abelovih grup nad bazo X

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \tag{II.3.4}$$

se imenuje ***aciklična resolventa*** snopa $\mathcal{F}$ nad X, če velja

$$H^q(X, \mathcal{F}_k) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots; \; q = 1, 2, \ldots.$$

Izrek 25 (***Abstraktni Lerayev izrek***). *Naj bo (II.3.4) aciklična resolventa snopa $\mathcal{F}$. Potem je*

$$H^q(X, \mathcal{F}) \cong \frac{\ker(\phi_q \colon \mathcal{F}_q(X) \to \mathcal{F}_{q+1}(X))}{\operatorname{im}(\phi_{q-1} \colon \mathcal{F}_{q-1}(X) \to \mathcal{F}_q(X))}, \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Pri tem vzamemo $\phi_{-1} : 0 \to \mathcal{F}_0(X)$, torej je $H^0(X, \mathcal{F}) = \ker(\phi_0 \colon \mathcal{F}_0(X) \to \mathcal{F}_1(X))$.

Grupa na desni je q-ta kohomološka grupa kokompleksa globalnih prerezov, ki je prirejen kompleksu snopov (II.3.4):

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}_0(X) \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{F}_1(X) \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}_2(X) \xrightarrow{\phi_2} \cdots.$$

II.4 De Rhamov in Dolbeaultov izrek

V tem razdelku si bomo pogledali nekaj najpomembnejših konkretnih primerov uporabe Lerayevega izreka 25. Razdelek je pregledne narave in brez podrobnih dokazov.

Primer 19 (***de Rhamov kompleks***). Naj bo $\mathcal{E}^k$ snop zarodkov realnih gladkih diferencialnih k-form na gladki mnogoterosti X realne dimenzije $\dim X = n$. Označimo z $d = d_k \colon \mathcal{E}^k \to \mathcal{E}^{k+1}$ vnanji diferencial. Ker je $\mathcal{E}^k$ fin snop za vsak k in je $\operatorname{im}(d_k) = \ker(d_{k+1})$ na vsaki kontraktibilni domeni (Poincaréjev lema), je zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{E}^n \longrightarrow 0$$

aciklična resolventa konstantnega snopa $\mathbb{R}$ nad X. Če vzamemo za $\mathcal{E}^k$ k-forme s kompleksnimi koeficienti, dobimo aciklično resolvento snopa $\mathbb{C}$. □

Primer 20 (***Dolbeaultov kompleks***). Naj bo X kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije n. Za vsak $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ označimo z Ω^p snop zarodkov holomornih p-form na X. (Za $p = 0$ je $\Omega^0 = \mathcal{O}$ strukturni snop X, to je, snop zarodkov holomorfnih funkcij.) Z $\mathcal{E}^{p,k}$ označimo snop zarodkov gladkih diferencialnih (p,k)-form na X. Naj bo $\overline{\partial} = \overline{\partial}_k \colon \mathcal{E}^{p,k} \to \mathcal{E}^{p,k+1}$ operator, ki je na funkcijah definiran s predpisom (I.15.4), oziroma v n spremenljivkah

$$\overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \, d\bar{z}_j.$$

Ker je $\mathcal{E}^{p,k}$ fin snop $\mathcal{E}^0$-kolobarjev za vsak (p,k) in je $\operatorname{im}(\overline{\partial}) = \ker(\overline{\partial}_{k+1}$ na vsakem polidisku v $\mathbb{C}^n$ (Dolbeaultov lema), je zaporedje

$$0 \longrightarrow \Omega^p \longrightarrow \mathcal{E}^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{p,2} \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{p,n} \longrightarrow 0$$

aciklična resolventa snopa Ω^p. □

Če uporabimo izrek 25 na primerih 19 in 20, dobimo naslednji posledici.

Izrek 26 (***de Rhamov izrek***). *Na vsaki gladki mnogoterosti X dimenzije n velja*

$$H^q(X,\mathbb{R}) \cong H^q_{dR}(X) = \frac{\ker\left(d : \mathcal{E}^q(X) \to \mathcal{E}^{q+1}(X)\right)}{\operatorname{im}\left(d : \mathcal{E}^{q-1}(X) \to \mathcal{E}^q(X)\right)}, \quad q = 1,2,\ldots,n.$$

Izrek 27 (***Dolbeaultov izrek***). *Na vsaki kompleksni mnogoterosti X kompleksne dimenzije n velja za vsak $p = 0,1,\ldots,n$:*

$$H^q(X,\Omega^p) \cong H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) = \frac{\ker\left(\overline{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(X) \to \mathcal{E}^{p,q+1}(X)\right)}{\operatorname{im}\left(\overline{\partial} : \mathcal{E}^{p,q-1}(X) \to \mathcal{E}^{p,q}(X)\right)}, \quad q = 1,2,\ldots,n.$$

V posebnem je

$$H^q(X,\mathcal{O}) \cong H^{0,q}_{\overline{\partial}}(X) = \frac{\ker\left(\overline{\partial} : \mathcal{E}^{0,q}(X) \to \mathcal{E}^{0,q+1}(X)\right)}{\operatorname{im}\left(\overline{\partial} : \mathcal{E}^{0,q-1}(X) \to \mathcal{E}^{0,q}(X)\right)}, \quad q = 1,2,\ldots,n.$$

Na Riemannovi ploskvi ($n = 1$) sta od snopov Ω^p netrivialna le snopa

- $\Omega^0 = \mathcal{O}$ — snop zarodkov holomorfnih funkcij, in
- $\Omega^1 = \Omega$ — snop zarodkov holomorfnih 1-form.

Če je X odprta (nekompaktna) Riemannova ploskev, so na njej vse nehomogene $\overline{\partial}$-enačbe rešljive, kar sledi iz klasične funkcijske teorije. Torej dobimo

Izrek 28. *Na vsaki odprti Riemannovi ploskvi X velja*

$$H^q(X,\mathcal{O}) = 0 \quad \textit{in} \quad H^q(X,\Omega^1) = 0, \quad q = 1,2,\ldots.$$

Ker je vsaka odprta Riemannova ploskev Steinova mnogoterost, je to poseben primer slavnega Cartanovega izreka B.

Na kompaktni Riemannovi ploskvi velja naslednji rezultat, ki ga bomo tu navedli brez dokaza (glej npr. Theorem 14.9 in Corollary 14.10 v Forster [7]). V dokazu se uporabi elementarna kompleksna in funkcionalna analiza.

Izrek 29. *Za vsako kompaktno Riemannovo ploskev X je $H^1(X,\mathcal{O})$ končno razsežen kompleksen vektorski prostor. Njegova dimenzija*

$$g_a = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathcal{O}) \tag{II.4.1}$$

*se imenuje **analitičen rod** ploskve X.*

V razdelku §II.11 bomo kot posledico Riemann-Rochove formule in Serrejevega dualnostnega izreka pokazali, da je analitičen rod g_a enak topološkemu rodu $g = g_X$ ploskve X. Za Riemannovo sfero lahko to dokažemo dokaj elementarno.

Trditev 18. *Na Riemannovi sferi je*

$$H^1(\mathbb{CP}^1) = 0.$$

Dokaz. Naj bo $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = U \cup V$, kjer je $U = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}$ in $U \cap V = \mathbb{C}^*$. Ker je $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$ po izreku 27, lahko vsak razred v $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ predstavimo s kociklom na $U \cap V$, torej s holomorfno funkcijo f na $\mathbb{C}^*$. Razvijmo f v Laurentovo vrsto:

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_z z^n = u(z) - v(z),$$

kjer je $u(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ njen regularni del in $v(z) = -\sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n$ glavni del. Tedaj se u holomorfno razširi preko točke 0 do funkcije $u \in \mathcal{O}(U)$, v pa se razširi preko točke ∞ do funkcije $v \in \mathcal{O}(V)$. To pomeni, da je vsak 1-kocikel na pokritju $\{U, V\}$ tudi korob, torej predstavlja ničelni razred v $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$. Trditev je s tem dokazana. $\square$

II.5 Divizorji na Riemannovih ploskvah

Pojem divizorja bomo najprej uvedli na Riemannovi ploskvi, v naslednjem razdelku pa še na kompleksnih mnogoterostih višje dimenzije.

Definicija 25. ***Divizor*** na Riemannovi ploskvi X je funkcija $D\colon X \to \mathbb{Z}$ z diskretnim nosilcem

$$\operatorname{supp} D = \{x \in X\colon D(x) \neq 0\}.$$

Divizor pišemo v obliki $D = \sum_{x\in X} D(x) \cdot x$, torej kot formalno linearno kombinacijo točk $x \in X$ z utežmi $D(x) \in \mathbb{Z}$, ali v obliki

$$D = \sum_j m_j \cdot x_j, \tag{II.5.1}$$

kjer je $\{x_j\} = \operatorname{supp} D$ diskretna množica v X in so $m_j = D(x_j) \in \mathbb{Z}$ cela števila. Če je ploskev X kompaktna, potem je nosilec divizorja končna množica, torej je vsota (II.5.1) končna. Divizor, za katerega je $D(x) = 0$ za vsak $x \in X$, se imenuje ***ničelni divizor***.

Množica $\operatorname{Div}(X)$ vseh divizorjev na Riemannovi ploskvi X je abelova grupa z operacijo

$$(D + D')(x) = D(x) + D'(x), \qquad x \in X.$$

Očitno je $\operatorname{supp}(D + D') \subset \operatorname{supp} D \cup \operatorname{supp} D'$. Razliko divizorjev označimo z $D - D'$.

Na množici $\mathrm{Div}(X)$ definiramo relacijo delne urejenosti s predpisom

$$D \leq D' \iff D(x) \leq D'(x) \quad (\forall x \in X).$$

Divizor D se imenuje ***efektiven divizor***, če je $D \geq 0$. Vsak divizor je razlika $D = D' - D''$ efektivnih divizorjev $D' = \max\{D, 0\}$, $D'' = \max\{-D, 0\}$.

Definicija 26. Naj bo $D = \sum_j m_j \cdot x_j$ divizor s končnim nosilcem. ***Stopnja divizorja*** D je število

$$\mathrm{st} D = \mathrm{st}\left(\sum_j m_j \cdot x_j\right) = \sum_j m_j \in \mathbb{Z}.$$

Sedaj si bomo ogledali nekaj najpomembnejših primerov divizorjev.

Meromorfna funkcija f na Riemannovi ploskvi X je v neki lokalni holomorfni koordinati $z\colon U \to \mathbb{C}$ okrog izbrane točke $a \in X$ oblike

$$f(z) = \big(z - z(a)\big)^m g(z),$$

kjer je g holomorfna funkcija in $g(a) \neq 0$. Število $m = \mathrm{red}_a f \in \mathbb{Z}$ je ***red funkcije*** f v a. (Če je $m > 0$, je m red ničle f v a, če pa je $m < 0$, je $-m > 0$ red pola f v a. V primeru $f(a) \neq 0, \infty$ je $m = 0$.) Red funkcije f v točki je v naslednji očitni zvezi s stopnjo preslikave $f\colon X \to \mathbb{CP}^1$ v točki (glej def. 12):

$$f(a) = 0 \Longrightarrow \mathrm{st}_a f = \mathrm{red}_a f; \qquad f(a) = \infty \Longrightarrow \mathrm{st}_a f = -\mathrm{red}_a f.$$

Definicija 27. Naj bo X povezana Riemannova ploskev in $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ meromorfna funkcija. Divizor

$$(f) = \sum_{x \in X} \mathrm{red}_x f \cdot x$$

se imenuje ***glavni divizor***, prirejen funkciji f. Divizor D na X je glavni divizor, če je $D = (f)$ za neko $f \in \mathcal{M}(X)$.

Operacija $\mathcal{M}(X) \setminus \{0\} \ni f \mapsto (f) \in \mathrm{Div}(X)$ je homomorfizem abelovih grup, saj iz definicij očitno sledi

$$(fg) = (f) + (g), \quad (f/g) = (f) - (g).$$

Izrek 30. *Vsak divizor na odprti Riemannovi ploskvi je glavni.*

Dokaz. Naj bo $D = \sum_j m_j \cdot x_j$ efektiven divizor na odprti Riemannovi ploskvi X, torej $m_j \geq 0$ za vsak j. Ker je množica $\{x_j\}$ diskretna, obstaja po Weierstrassovem izreku holomorfna funkcija $f \in \mathcal{O}(X)$, ki ima ničlo stopnje m_j v vsaki točki x_j in nobenih drugih ničel. (Dokaz najdemo v skoraj vsakem učbeniku iz elementarne kompleksne analiz.) To pomeni, da je $D = (f)$ glavni divizor.

V splošnem primeru pišemo $D = D_+ - D_-$, kjer sta $D_+, D_- \geq 0$ efektivna divizorja. Naj bosta g in h holomorfni funkciji na X, tako da je $(g) = D_+$ in $(h) = D_-$. Meromorfna funkcija $f = g/h \in \mathcal{M}(X)$ potem zadošča $(f) = (g) - (h) = D_+ - D_- = D$. $\square$

V nasprotju z izrekom 30 pa glavni divizorji na sklenjenih Riemannovih ploskvah zadoščajo naslednjemu netrivialnemu pogoju.

Trditev 19. *Vsak glavni divizor na sklenjeni Riemannovi ploskvi ima stopnjo nič.*

Dokaz. Naj bo $D = (f)$ glavni divizor na X. Lahko vzamemo, da je ploskev X povezana. Če je $f \neq 0$ konstantna funkcija, je $(f) = 0$ ničelni divizor in je zato $\mathrm{st}(f) = 0$. V nasprotnem primeru je $f\colon X \to \mathbb{CP}^1$ nekonstantna holomorfna preslikava ploskve X na Riemannovo sfero. Iz definicija divizorja (f) sledi

$$(f) = \sum_{f(x)=0} \mathrm{st}_x f \cdot x - \sum_{f(x)=\infty} \mathrm{st}_x f \cdot x = D_+ - D_-. \tag{II.5.2}$$

Tu je $\mathrm{st}_x f$ stopnja preslikave f v točki x (glej def. 12). Iz izreka o stopnji holomorfne preslikave (izrek 5) vemo, da f zavzame vsako vrednost $b \in \mathbb{CP}^1$ v enakem številu točk, če upoštevamo algebraične večkratnosti. Za točki $b = 0$ in $b = \infty$ to ravno pomeni, da je

$$\sum_{f(x)=0} \mathrm{st}_x f - \sum_{f(x)=\infty} \mathrm{st}_x f = 0.$$

Ta razlika pa je ravno enaka stopnji divizorja (f), torej je $\mathrm{st}(f) = 0$. □

Opomba. V razcepu $(f) = D_+ - D_-$ (II.5.2) se divizor $D_+ = \sum_{f(x)=0} \mathrm{st}_x f \cdot x \geq 0$ imenuje ***divizor ničel***, $D_- = \sum_{f(x)=\infty} \mathrm{st}_x f \cdot x \geq 0$ pa ***divizor polov*** meromorfne funkcije f.

Primer 21. Naj bo $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_n$ holomorfen polinom stopnje n na $\mathbb{C}$. Naj bodo $z_1, \ldots, z_k$ njegove (različne) ničle in $m_j \in \mathbb{N}$ stopnja ničle f v z_j. Potem je

$$(f) = \sum_{j=1}^{k} m_j \cdot x_j, \qquad \mathrm{st}(f) = \sum_{j=1}^{k} m_j = n.$$

Če f razširimo do meromorfne funkcije na Riemannovi sferi $\mathbb{CP}^1$, ima f pol stopnje n v točki ∞ in je njen divizor na $\mathbb{CP}^1$ enak

$$(f) = \sum_{j=1}^{k} m_j \cdot x_j - n \cdot \infty, \qquad \mathrm{st}(f) = 0.$$

Če je $f = P/Q$ racionalna funkcija, pa je $(f) = (P) - (Q)$ na $\mathbb{CP}^1$.

Definicija 28. Divizorja D, D' na Riemannovi ploskvi X sta ***ekvivalenta***, če je njuna razlika $D - D' = (f)$ glavni divizor, določen z neko meromorfno funkcijo $f \in \mathcal{M}(X)$.

Iz trditve 19 sledi:

Posledica 6. *Ekvivalentna divizorja na sklenjeni Riemannovi ploskvi imata isto stopnjo.*

Sedaj si oglejmo še divizor (ω), prirejen ***meromorfni 1-formi*** ω na X. V poljubni lokalni koordinati z na X ima taka forma predstavitev $\omega(z) = f(z)\,dz$, kjer je f meromorfna funkcija in je $dz = dx + \mathrm{i}\,dy$ diferencial kompleksne spremenljivke $z = x + \mathrm{i}y$. Forma se transformira po naslednjem pravilu: Če je $z = z(\zeta)$ holomorfna funkcija na domeni $\zeta \in \Omega \subset \mathbb{C}$, je forma ω v ζ-koordinati enaka

$$\omega(\zeta) = f(z(\zeta))\, z'(\zeta)\, d\zeta,$$

kjer je $z'(\zeta)$ kompleksni odvod funkcije $z(\zeta)$.

Če je $\omega = f(z)\,dz$ v neki lokalni koordinati $z\colon U \to \mathbb{C}$ na odprti množici $U \subset X$, potem za vsako točko $a \in U$ definiramo red forme ω s predpisom

$$\mathrm{red}_a\omega = \mathrm{red}_a f \in \mathbb{Z}.$$

Red se ohranja pri biholomorfnih zamenjavah koordinat $\zeta \mapsto z(\zeta)$, saj je $z'(\zeta)$ holomorfna funkcija brez ničel, ki ne vpliva na red koeficienta. Torej je število $\mathrm{red}_a\omega =\in \mathbb{Z}$ neodvisno od izbire lokalne holomorfne koordinate v okolici točke a.

Definicija 29. Divizor meromorfne 1-forme $\omega \not\equiv 0$ na Riemannovi ploskvi X je enak

$$(\omega) = \sum_{x\in X} \mathrm{red}_x\omega \cdot x.$$

Divizor D na X se imenuje ***kanonični divizor***, če je $D = (\omega)$ za neko meromorfno 1-formo $\omega \not\equiv 0$ na X.

Meromoforne 1-forme lahko med seboj seštevamo, poleg tega lahko 1-formo pomnožimo s poljubno meromorfno funkcijo. Za prirejene divizorje očitno velja

$$(f\omega) = (f) + (\omega).$$

Primer 22. Naj bo $\omega = dz$ na ravnini $z \in \mathbb{C}$. Ker je koeficient 1 brez ničel ali polov, je prirejeni divizor $(\omega) = 0$. Sedaj ω razširimo do meromorfne 1-forme na $\mathbb{CP}^1$. Naj bo $\zeta\colon \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ lokalna koordinata s $\zeta(\infty) = 0$ in prehodno funkcijo $z(\zeta) = 1/\zeta$. Forma dz se transformira v formo $z'(\zeta)\,d\zeta = -\frac{1}{\zeta^2}\,d\zeta$, ki ima pol stopnje 2 pri $\zeta = 0$ ter nobenih drugih ničel ali polov na $\mathbb{C}$. Torej ima forma dz pol stopnje 2 v točki $z = \infty \in \mathbb{CP}^1$ in je neničelna holomorfna na $\mathbb{C} = \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$. Odtod sledi

$$(\omega) = -2\cdot\infty, \qquad \mathrm{st}(\omega) = -2 = -\chi(\mathbb{CP}^1).$$

Za poljubno točko $z_0 \in \mathbb{C}$ meromorfna 1-forma $\omega = dz/(z - z_0)^2$ zadošča $(\omega) = -2\cdot z_0$.

Forma $\omega = \frac{1}{z}\,dz$ se pri prehodu na koordinato $\zeta = 1/z$ transformira v $-\frac{1}{\zeta}\,d\zeta$, torej je $(\omega) = -1\cdot 0 - 1\cdot\infty$ in $\mathrm{st}(\omega) = -2$.

Dejstvo, da smo v vseh primerih dobili $\mathrm{st}(\omega) = -2 = -\chi(\mathbb{CP}^2)$, ni naključno, kot nam pove posledica 7 spodaj.

Trditev 20. *Za poljubni dve meromorni 1-formi $\omega_1 \not\equiv 0$, $\omega_2 \not\equiv 0$ na Riemannovi ploskvi X obstaja meromorfna funkcija $f \in \mathcal{M}(X)$, tako da je $\omega_2 = f \cdot \omega_1$.*

Pravimo tudi, da je kvocient ω_2/ω_1 dveh meromorfnih 1-form na X meromorfna funkcija $f \in \mathcal{M}(X)$.

Dokaz. Če v neki lokalni koordinati z na X velja $\omega_j(z) = g_j(z)\,dz$ za $j = 1, 2$, vzamemo $f = g_2/g_1$. Pri transformaciji $z = z(\zeta)$ v drugo holomorfno koordinato imamo

$$\omega_j(\zeta) = g_j(z(\zeta))\, z'(\zeta)\, d\zeta, \qquad j = 1, 2$$

in je kvocient koeficientov enak $g_2(z(\zeta))/g_1(z(\zeta)) = f(z(\zeta))$. Torej je kvocient koeficientov dobro definirana meromorfna funkcija na X. □

Posledica 7. *Poljubna dva kanonična divizorja na sklenjeni Riemannovi ploskvi sta ekvivalentna (glej def. 28) in imata zato isto stopnjo.*

Dokaz. Naj bosta $D_j = (\omega_j)$ za $j = 1, 2$ kanonična divizorja na X. Označimo z $f = \omega_1/\omega_2 \in \mathcal{M}(X)$ kvocient ustreznih 1-form. Iz $\omega_1 = f\omega_2$ sledi $(\omega_1) = (f\omega_2) = (f) + (\omega_2)$, torej $(\omega_1) - (\omega_2) = (f)$. Iz trditve 19 sledi $\mathrm{st}(\omega_1) - \mathrm{st}(\omega_2) = \mathrm{st}(f) = 0$. □

Definicija 30. Ekvivalenčni razred divizorjev na sklenjeni Riemannovi ploskvi X, ki ga določa katerikoli kanonični divizor (ω), se imenuje ***kanonični razred*** K_X na X.

Oznaka K_X se uporablja tudi za izomorfnostni razred svežnjev premic nad X, ki je prirejen kanoničnemu divizorju; glej naslednji razdelek.

II.6 Snop divizorjev

V tem razdelku bomo spoznali pojem divizorja na poljubni kompleksni mnogoterosti. Videli bomo, da lahko divizorje obravnavamo kot globalne prereze snopa divizorjev. V naslednjih razdelkih si bomo ogledali zvezo med divizorji in holomorfnimi svežnji premic.

Naj bo $D = \sum_{j\in J} n_j \cdot x_j$ divizor na Riemannovi ploskvi X; tu je $J \subset \mathbb{N}$ končna ali števna indeksna množica in $n_j \neq 0$ za vsak j. Množica $\mathrm{supp}\, D = \{x_j\}_{j\in J}$ je nosilec divizorja D. Za vsako točko $x_j \in \mathrm{supp}\, D$ izberemo odprto okolico $U_j \subset X$ in lokalno holomorfno karto $\phi_j \colon U_j \to \mathbb{C}$, tako da je $\phi_j(x_j) = 0$. Funkcija $f_j = (\phi_j)^{n_j}$ je meromorfna na U_j; točka x_j je ničla stopnje n_j, če je $n_j > 0$, in je pol stopnje $-n_j$, če je $n_j < 0$. Drugih ničel ali polov ni. Naj bo $U_0 = X \setminus \mathrm{supp}\, D$ in $f_0 = 1$. Družina funkcij $f = (f_j)$ $(j \in J' = J \cup \{0\})$ je 0-koveriga z meromorfnimi koeficienti (oz. s koeficienti v snopu $\mathcal{M}^*$ zarodkov netrivialnih meromorfnih funkcij) na pokritju $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J'}$, torej $f = (f_j) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$.

Za vsak par indeksov $i, j \in J'$ definiramo funkcije

$$f_{i,j} = \frac{f_i}{f_j} \quad \text{na} \quad U_{i,j} := U_i \cap U_j. \tag{II.6.1}$$

Ker imata f_i in f_j ničle ali pole istih stopenj v istih točkah, je $f_{i,j}$ holomorfna funkcija brez ničel na $U_{i,j}$. Družina $(f_{i,j}) \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$ očitno zadošča naslednjim trem pogojem:

$$f_{i,i} = 1, \qquad f_{i,j}f_{j,i} = 1, \qquad f_{i,j}f_{j,k}f_{k,i} = 1. \tag{II.6.2}$$

Prva enačba velja na U_i, druga na $U_{i,j}$ in tretja na $U_{i,j,k} = U_i \cap U_j \cap U_k$. Torej je $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 1-kocikel na pokritju $\mathcal{U}$ s koeficienti v snopu $\mathcal{O}^*$.

Ta postopek lahko obrnemo: Če je $f = (f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ neka 0-koveriga s prirejenim 1-kociklom $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ (II.6.1), potem f definira divizor $D = D(f)$ na X s predpisom

$$D(x) = \mathrm{red}_x f_j \qquad \forall x \in U_i,\ \forall U_i \in \mathcal{U}. \tag{II.6.3}$$

Za vsako točko $x \in U_{i,j}$ je $\mathrm{red}_x f_i = \mathrm{red}_x f_j$, saj je kvocient $f_{i,j} = f_i/f_j$ holomorfna funkcija brez ničel na $U_{i,j}$. Torej je divizor D dobro definiran.

Enak razmislek pokaže naslednje. Naj bosta $f = (f_i), g = (g_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ 0-koverigi s prirejenima 1-kocikloma $(f_{i,j}), (g_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Potem f in g določata isti divizor D na X natanko tedaj, ko je za vsak indeks i kvocient $h_i = f_i/g_i$ holomorfna funkcija brez ničel na U_i, $h_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$. Družina $h = (h_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ je 0-koveriga s koeficienti v $\mathcal{O}^*$.

Zgornjo diskusijo lahko formaliziramo in poenostavimo s pomočjo jezika snopov. Označimo z $\mathcal{O}^* = {}_X\mathcal{O}^*$ snop zarodkov holomorfnih funkcij brez ničel na X in z $\mathcal{M}^* = {}_X\mathcal{M}^*$ snop zarodkov netrivialnih meromorfnih funkcij na X. (Vlakno $\mathcal{M}^*_x$ v poljubni točki $x \in X$ je enako $\mathcal{M}_x \setminus \{0\}$, izključimo torej zarodek konstantne funkcije $f \equiv 0$.) Imamo kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov abelovih grup:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{M}^* \xrightarrow{\sigma} \mathcal{D} \longrightarrow 0, \tag{II.6.4}$$

kjer je $\mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^*$ inkluzija, $\mathcal{M}^* \xrightarrow{\sigma} \mathcal{D}$ pa kvocientna projekcija. Iz zgornje diskusije sledi, da lahko divizorje na X identificiramo s prerezi snopa $\mathcal{D} = {}_X\mathcal{D}$:

$$\mathrm{Div}(X) = \Gamma(X, {}_X\mathcal{D}) = H^0(X, {}_X\mathcal{D}). \tag{II.6.5}$$

Zato se ${}_X\mathcal{D}$ imenuje ***snop divizorjev*** na X.

Dejansko, vsak prerez kvocientnega snopa $\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ je podan na nekem pokritju $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ploskve X s kolekcijo $f = (f_i)$ meromorfnih funkcij $f_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$, pri čemer so kvocienti $f_{i,j} = f_i/f_j$ prerezi jedra homomorfizma σ nad $U_{i,j}$, torej $f_{i,j} \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$. Obratno, vsaka 0-koveriga $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$, za katero so kvocienti $f_{i,j} = f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$ prerezi jedra $\mathcal{O}^*$ homomorfizma σ, definira divizor D na X, kot smo videli zgoraj. Koverigi (f_i) in (g_i) določata isti divizor natanko tedaj, ko leži njun kvocient (f_i/g_i) v jedru homomorfizma σ; torej ko so $f_i/g_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ holomorfne funkcije brez ničel.

Operacijo na snopu $\mathcal{D}$ in na grupi divizorjev $\mathrm{Div}(X) = H^0(X, \mathcal{D})$ pišemo aditivno.

Zaporedju (II.6.4) pripada dolgo eksaktno zaporedje kohomoloških grup (glej izrek 24):

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{\sigma} H^0(X, \mathcal{D}) \xrightarrow{\delta} \tag{II.6.6}$$

$$\xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{\sigma} H^1(X, \mathcal{D}) \longrightarrow \cdots$$

Elementi prve vrstice so po vrsti $\mathcal{O}^*(X)$, $\mathcal{M}^*(X)$ in $\mathrm{Div}(X)$. Divizor $D \in \mathrm{Div}(X)$ je glavni divizor (def. 27) natanko tedaj, ko je $D = (f)$ za neko $f \in \mathcal{M}^*(X)$; to je natanko tedaj, ko D leži v sliki homomorfizma $\sigma\colon \mathcal{M}^*(X) \to \mathrm{Div}(X)$. Jedro homomorfizma σ je množica $\mathcal{O}^*(X)$ holomorfnih funkcij brez ničel.

Opišimo natančneje vezni homomorfizem

$$\delta\colon \mathrm{Div}(X) \to H^1(X, \mathcal{O}^*). \tag{II.6.7}$$

Naj bo $D \in \mathrm{Div}(X)$. Izberimo pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ploskve X in predstavnika $f = (f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ divizorja D. Potem je $\delta(D) \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$ element, ki ga določa 1-kocikel

$$f_{i,j} = \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_{i,j}).$$

Ta kocikel najprej določa element v prvi kohomološki grupi $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ na pokritju $\mathcal{U}$ s koeficienti v snopu $\mathcal{O}^*$, s pomočjo naravnega homomorfizma $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) \to H^1(X, \mathcal{O}^*)$ v direktno limito pa dobimo element v $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

Eksplicitno bomo preverili eksaktnost zaporedja (II.6.6) pri členu $H^0(X, \mathcal{D}) = \mathrm{Div}(X)$. Eksaktnost pomeni, da je za poljuben divizor $D \in \mathrm{Div}(X)$ slika njegova $\delta(D) \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$ identiteta v grupi $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ natanko tedaj, ko je D glavni divizor, torej ko leži v sliki homomorfizma $\sigma\colon \mathcal{M}^*(X) \to \mathrm{Div}(X)$.

Če je $D = (f)$ za neko funkcijo $f \in \mathcal{M}^*(X)$, je prirejeni kocikel $f_{i,j} = 1$ trivialen, torej je $\delta(D) = 1 \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Obratno, denimo da je $\delta(D) = 1 \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$. To pomeni, da obstaja pokritje $\mathcal{U}$ in predstavnik $f = (f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ divizorja D, tako da 1-kocikel $f_{i,j} = f_i/f_j$ določa trivialni element kohomološke grupe $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Slednje pomeni, da obstajajo funkcije $g_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$, tako da je

$$\frac{f_i}{f_j} = f_{i,j} = \frac{g_i}{g_j} \quad \text{na} \quad U_{i,j}.$$

Odtod sledi $f_i/g_i = f_j/g_j$ na $U_{i,j}$; ta kolekcija torej definira meromorfno funkcijo h na X, ki očitno določa isti divizor D. Torej je $D = (h)$ v sliki homomorfizma σ.

Iz eksaktnosti zaporedja (II.6.6) sledi naslednja trditev.

Trditev 21. *Divizor $D \in \mathrm{Div}(X)$ je glavni divizor (def. 27) natanko tedaj, ko je*

$$\delta([D]) = 0 \in H^1(X, \mathcal{O}^*).$$

Homomorfizem $\delta\colon \mathrm{Div}(X) \to H^1(X, \mathcal{O}^*)$ inducira injektivni homomorfizem kvocientne grupe $\mathrm{Div}(X)/\sigma(\mathcal{M}(X))$ ekvivalenčnih razredov divizorjev v grupo $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

Posledica 8. *Če je* $H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$, *je vsak divizor* $D \in \mathrm{Div}(X)$ *glavni divizor.*

Opisano konstrukcijo divizorjev na X kot prerezov snopa divizorjev (II.6.5) lahko uporabimo na poljubni kompleksni mnogoterosti X. V primeru, ko je X Riemannova ploskev, imamo ekvivalentno predstavitev divizorja kot celoštevilsko linearno kombinacijo točk v neki diskretni množici ploskve X. Podoben geometrijski opis divizorjev dobimo na poljubni kompleksni mnogoterosti X, če točke nadomestimo z zaprtimi kompleksnimi hiperploskvami, torej analitičnimi podmnožicami čiste dimenzije $\dim X - 1$. Konkretno, vsak divizor na X lahko predstavimo kot formalno linearno kombinacijo

$$D = \sum_j n_j \cdot V_j,$$

kjer so $m_j \in \mathbb{Z}$ cela števila in je vsaka V_j nerazcepna zaprta kompleksna hiperploskev v X. Poleg tega je družina $\{V_j\}$ ***lokalno končna*** v smislu, da poljubno kompaktno množico v X seka največ končno mnogo množic V_j. (Če je X kompaktna, je družina končna.) Tako linearno kombinacijo analitičnih množic imenujemo tudi ***analitična veriga***.

Osnovna ideja, ki privede do te geometrijske predstave divizorja v višji dimenziji, je podobna kot na Riemannovi ploskvi. V okolici poljubne točke $a \in X$ je divizor D podan z neko meromorfno funkcijo $f = g/h$, kjer sta g in h holomorfni funkciji. Razcepimo ju na nerazcepne elemente v kolobarju ${}_X\mathcal{O}_a$:

$$g = g_1^{d_1} g_2^{d^2} \cdots g_k^{d_k}, \qquad h = h_1^{m_1} h_2^{m^2} \cdots h_l^{m_l}.$$

Naj bo $V_j = \{g_j = 0\}$ in $W_j = \{h_j = 0\}$. Potem je zarodek divizorja D v točki a predstavljen s formalno linearno kombinacijo

$$\sum_{j=1}^{k} d_j V_j - \sum_{j=1}^{l} m_j W_j$$

analitičnih množic s koeficienti $d_j, m_j \in \mathbb{N}$. Dobili smo torej lokalno analitično verigo; prva vsota s pozitivnimmi koeficienti predstavlja množico ničel funkcije f, druga pa množico polov, pri čemer so upoštevane algebraične večkratnosti. Da se videti, da se te lokalne predstavitve zlepijo skupaj v globalno predstavitev divizorja z analitično verigo.

II.7 Holomorfni svežnji premic

V tem razdelku si bomo ogledali pojem holomorfnega svežnja premic nad kompleksno mnogoterostjo, v naslednjem pa bomo spoznali zvezo med divizorji in svežnji premic. Videli bomo, da kohomološka grupa $H^1(X, \mathcal{O}^*)$, ki nastopa v povezavi z grupo divizorjev (II.6.7), predstavlja izomorfnostne razrede holomorfnih svežnjev premic na X.

Definicija 31. ***Holomorfen sveženj premic*** na kompleksni mnogoterosti X je trojica (E, π, X), kjer je E kompleksna mnogoterost dimenzije $\dim E = \dim X + 1$ in je $\pi\colon E \to X$ holomorfna surjektivna preslikava, tako da obstaja odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ mnogoterosti X in biholomorfne preslikave

$$\Theta_i\colon E|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C},$$

ki zadoščajo pogoju $pr \circ \Phi = \pi$, pri čemer so prehodne preslikave nad $U_{i,j}$ oblike

$$\Theta_{i,j} := (\Theta_i \circ \Theta_j^{-1})(x, z) = \big(x, \theta_{i,j}(x)z\big), \qquad x \in U_{i,j},\ z \in \mathbb{C}, \tag{II.7.1}$$

kjer so $\theta_{i,j} \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$ holomorfne funkcije brez ničel.

Preslikave Θ_i se imenujejo (holomorne) ***sveženjske karte*** na E, družina takih preslikav kot v definiciji pa je ***sveženjski atlas*** na E. Prehodne funkcije $\theta_{i,j}$ zadoščajo pogojem (II.6.2), torej je $(\theta_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 1-kocikel na pokritju $\mathcal{U}$ z vrednostmi v snopu $\mathcal{O}^*$.

Obratno, vsak 1-kocikel $(\theta_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ na nekem odprtem pokritju $\mathcal{U}$ bazne mnogoterosti X določa prehodne preslikave nekega holomorfnega svežnja premic $\pi\colon E \to X$. Totalni prostor E svežnja dobimo kot kvocient

$$E = \left(\coprod_i U_i \times \mathbb{C}\right) / \sim$$

$$U_j \times \mathbb{C} \ni (x, z) \sim (x', z') \in U_i \times \mathbb{C} \iff x = x' \in U_{i,j} \text{ in } z' = \theta_{i,j}(x)z.$$

Ker so prehodne preslikave svežnja na vsakem vlaknu podane z množenjem z neničelnim kompleksnim število, imamo na vlaknih $E_x = \pi^{-1}(x)$ $(x \in X)$ dobro definirano strukturo kompleksnega vektorskega prostora dimenzije ena, torej je $E_x \cong \mathbb{C}$, tako da so sveženjske karte $\mathbb{C}$-linearni izomorfizmi na vlaknih. Iz definicij sledi, da so algebraične operacije vsota in produkt (na vlaknih) holomorfne.

Definicija 32. ***Prerez*** svežnja $\pi\colon E \to X$ je preslikava $F\colon X \to E$, ki zadošča pogoju $\pi \circ F = \mathrm{Id}_X$. Prerez F je holomorfen, če je F holomorfna preslikava.

Množico vseh prerezov označimo z $\Gamma(X, E)$, oz. $\Gamma_{\mathcal{O}}(X, E)$, če želimo poudariti, da gre za holomorfne prereze. Zaradi obstoja linearne strukture na vlaknih je množica prerezov $\Gamma(X, E)$ kompleksen vektorski prostor. Vsak holomorfen sveženj premic ima vsaj en holomorfen prerez, to je ***ničelni prerez***, katerega vrednost v poljubni točki $x \in X$ je ničelni element $0_x \in E_x \cong \mathbb{C}$ vlakna.

Vsak prerez produktnega svežnja $E = X \times \mathbb{C} \to X$ je oblike $F(x) = (x, f(x))$, kjer je $f\colon X \to \mathbb{C}$ funkcija na X; F je holomorfen natanko tedaj, ko je f holomorfna funkcija.

Izberimo na svežnju premic $E \to X$ sveženjski atlas s kartami $\Theta_i\colon E|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}$. Za vsak prerez $F\colon X \to E$ je kompozicija $\Theta_i \circ F\colon U_i \to U_i \times \mathbb{C}$ prerez produktnega svežnja, torej je oblike $x \mapsto (x, f_i(x))$ za neko funkcijo $f_i\colon U_i \to \mathbb{C}$. Če so $\theta_{i,j}$ prehodne funkcije (II.7.1) v atlasu, sledi zveza

$$f_i = \theta_{i,j} f_j \quad \text{na} \quad U_{i,j}. \tag{II.7.2}$$

Obratno, vsaka družina funkcij $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, torej 0-koveriga $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, ki zadošča kompatibilitetnemu pogoju II.7.2, določa holomorfen prerez $F\colon X \to E$ svežnja E.

Podobno je ***meromorfen prerez*** svežnja premic $E \to X$ določen z družino meromorfnih funkcij $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$, torej z 0-koverigo v $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$, ki zadoščajo pogojem (II.7.2).

Opomba. Če je X Riemannova ploskev, lahko meromorfen prerez holomorfnega svežnja premic $E \to X$ razumemo kot holomorfen prerez svežnja $\widehat{E} \to X$ z vlaknom $\mathbb{CP}^1$, ki ga dobimo s kompaktifikacijo vlaken $E_x \cong \mathbb{C}$ z eno točko. Konkretno, svežen $\widehat{E}$ ima vlakna

$$\widehat{E}_x = E_x \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1 \tag{II.7.3}$$

in isti prehodni kocikel kot E. Poleg ničelnega prereza ima $\widehat{E}$ ***prerez v neskončnosti*** $f_\infty(x) = \infty \in \widehat{E}_x$ $(x \in X)$. Vsaka sveženjska karta $\Theta\colon E|_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{C}$ določa sveženjsko karto $\widehat{\Theta}\colon \widehat{E}|_U \to U \times \mathbb{CP}^1$, ki preslika prerez v neskončnosti v $x \mapsto (x, \infty) \in U_i \times \mathbb{CP}^1$.

Definicija 33. Dva holomorfna svežnja premic $\pi\colon E \to X$, $\pi'\colon E' \to X$ nad kompleksno mnogoterostjo X sta ***izomorfna***, če obstaja biholomorfna preslikava $\Phi\colon E \to E'$, tako da velja $\pi' \circ \Phi = \pi$ (kar pomeni, da Φ preslika vsako vlakno E_x v vlakno E'_x) in je $\Phi\colon E_x \to E'_x$ kompleksno linearni izomorfizem za vsak $x \in X$. Vsaka taka preslikava Φ je ***izomorfizem*** holomorfnih svežnjev premic.

Svežen $\pi\colon E \to X$ je ***trivialen***, če je izomorfen ***produktnemu svežnju*** $X \times \mathbb{C} \to X$; vsak izomorfizem $\Phi\colon E \xrightarrow{\cong} X \times \mathbb{C}$ se imenuje ***trivializacija*** svežnja E.

Iz definicij sledi, da je vsak svežen lokalno (to je, nad majhnimi odprtimi množicami v bazi) izomorfen produktnemu svežnju; sveženjske karte podajajo take izomorfizme.

Naslednji preprost kriterij za trivialnost je zelo uporaben.

Trditev 22. *Holomorfen svežen premic $\pi\colon E \to X$ je trivialen natanko tedaj, ko obstaja holomorfen prerez $F\colon X \to E$ brez ničel, to je, $F(x) \in E_x \setminus \{0_x\}$ za vsak $x \in X$.*

Dokaz. Denimo, da je $F \in \Gamma(X, E)$ holomorfen prerez brez ničel. Tedaj je vsak element $e \in E_x$ oblike $e = \phi(e)F(x)$ za natanko določeno število $\phi(x) \in \mathbb{C}$ in preslikava

$$\Theta\colon E \to X \times \mathbb{C}, \qquad \Theta(e) = (\pi(e), \phi(e)) \quad \forall e \in E \tag{II.7.4}$$

je trivializacija svežnja E, ki preslika prerez F v konstanten prerez $(x \mapsto (x, 1)$ produktnega svežnja $X \times \mathbb{C}$.

Obratno, če je $\Theta\colon E \to X \times \mathbb{C}$ holomorfna trivializacija, je preslikava $F\colon X \to E$, podana s predpisom

$$F(x) = \Theta^{-1}(x, 1), \qquad x \in X,$$

holomorfen prerez brez ničel svežnja E. $\square$

Denimo, da lahko sveženj $E \to X$ predstavimo nad nekim odprtim pokrtijem $\mathcal{U} = \{U_i\}$ baze X (def. 31). To pomeni, da je zožitev $E|_{U_i}$ na vsako množico $U_i \in \mathcal{U}$ trivialen sveženj. Po trditvi 22 obstaja holomorfen prerez brez ničel $F_i \in \Gamma(U_i, E)$. Naj bo $\Theta_i \colon E|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}$ prirejena trivializacija (II.7.4), ki preslika F_i na konstanten prerez $U_i \ni x \mapsto (x, 1)$.

Trditev 23. *Naj bo $E \to X$ holomorfen sveženj premic, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ pokritje baze X in F_i holomorfen prerez brez ničel zoženega svežnja $E|_{U_i}$ za vsak i. Tedaj je družina kvocientov*

$$\theta_{i,j} = F_j/F_i \colon U_{i,j} \to \mathbb{C}^* \tag{II.7.5}$$

1-kocikel v $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$, ki določa sveženj E v smislu (II.7.1).

Dokaz. Za vsak $x \in U_{i,j}$ in $z \in \mathbb{C}$ je

$$\Theta_j^{-1}(x, z) = zF_j(x) = z\theta_{i,j}(x)\, F_i(x) = \Theta_i^{-1}\big(x, \theta_{i,j}(x)z\big).$$

Odtod sledi

$$\Theta_{i,j}(x, z) = \Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(x, z) = \big(x, \theta_{i,j}(x)z\big),$$

kar je v skladu z (31). □

Opomba. Iz primerjave enačb (II.7.2) in (II.7.5) vidimo

$$\theta_{i,j} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{F_j}{F_i} \quad \text{na } U_{i,j},$$

torej je zveza med obema kvocientoma recipročna. To seveda ne preseneča, saj iz definicij sledi, da v vsaki točki $x \in U_{i,j}$ produkta $f_i(x)F_i(x)$ in $f_j(x)F_j(x)$ določata isti element vlakna E_x. Število $f_i(x) \in \mathbb{C}$ je namreč ravno vlakenska koordinata točke $f_i(x)F_i(x) \in E_x$ glede na lokalno trivializacijo $\Theta_i \colon E|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}$, ki $F_i(x)$ preslika v $(x, 1)$. □

Naloga. Pokaži, da je vsak izomorfizem $\Phi \colon X \times \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} X \times \mathbb{C}$ produktnega svežnja oblike

$$\Phi(x, z) = \big(x, \phi(x)\, z\big), \qquad x \in X,\ z \in \mathbb{C}$$

za neko holomorfno funkcijo $\phi \colon X \to \mathbb{C}^*$ brez ničel. □

Izrek 31. *Izomorfnostni razredi holomorfnih svežnjev premic nad poljubno kompleksno mnogoterostjo X so v bijektivni korespondenci z elementi kohomološke grupe $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.*

Razredi topoloških kompleksnih svežnjev premic nad poljubno realno mnogoterostjo X so v bijektivni korespondenci z elementi kohomološke grupe $H^1(X, \mathcal{C}^*)$, kjer je $\mathcal{C}^*$ snop zarodkov zveznih funkcij brez ničel na X.

Kohomološka grupa $H^1(X, \mathcal{O}^*) = \operatorname{Pic}(X)$ se imenuje ***Picardova grupa*** mnogoterosti X, grupa $H^1(X, \mathcal{C}^*) = \operatorname{Pic}_{\mathrm{top}}(X)$ pa je ***topološka Picardova grupa***.

Dokaz. Vzemimo dva holomorfna svežnja premic $\pi\colon E \to X$, $\pi'\colon E' \to X$. Izberimo odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ mnogoterosti X, nad katerim lahko predstavimo oba svežnja E in E' s sveženjskima atlasoma:

$$\Theta_i\colon E|_{U_i} \overset{\cong}{\to} U_i \times \mathbb{C}, \qquad \Theta'_i\colon E'|_{U_i} \overset{\cong}{\to} U_i \times \mathbb{C}.$$

Označimo s $\Theta_{i,j}$ oz. $\Theta'_{i,j}$ prehodne preslikave v obeh svežnjih nad preseki $U_{i,j} = U_i \cap U_j$. Označimo z $\theta_{i,j}$ in $\theta'_{i,j}$ prirejena 1-kocikla prehodnih funkcij kot v (II.7.1).

Denimo, da je $\Phi\colon E \xrightarrow{\cong} E'$ holomorfnen izomorfizem. Za vsak i je

$$\Phi_i := \Theta'_i \circ \Phi \circ \Theta_i^{-1}\colon U_i \times \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C}$$

predstavitev izomorfizma Φ v paru sveženjskih kart nad U_i. Izomorfizem Φ_i trivialnega svežnja je oblike

$$\Phi_i(x,z) = \big(x, \phi_i(x)\, z\big), \qquad \phi_i \in \mathcal{O}^*(U_i).$$

Na $U_{i,j} \times \mathbb{C}$ dobimo komutativen diagram preslikav:

$$\begin{tikzcd}
U_{i,j} \times \mathbb{C} \arrow[d, "\Phi_i"'] & U_{i,j} \times \mathbb{C} \arrow[l, "\Theta_{i,j}"'] \arrow[d, "\Phi_j"] \\
U_{i,j} \times \mathbb{C} & U_{i,j} \times \mathbb{C} \arrow[l, "\Theta'_{i,j}"']
\end{tikzcd}$$

Iz komutativnosti diagrama sledi naslednja zveza med pripadajočimi funkcijami:

$$\theta_{i,j}\phi_i = \phi_j \theta'_{i,j} \iff \frac{\theta_{i,j}}{\theta'_{i,j}} = \frac{\phi_j}{\phi_i}.$$

To pomeni, da 1-kocikla $(\theta_{i,j}), (\theta'_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ določata isti element kohomološke grupe $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Opisani postopek lahko tudi obrnemo, kar bo bralec zlahka preveril.

Zaključek je, da sta svežnja premic E in E' holomorfno izomorfna natanko tedaj, ko njuna 1-kocikla $(\theta_{i,j}), (\theta'_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ določata isti element kohomološke grupe $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Ker velja ta argument nad poljubno finim pokritjem $\mathcal{U}$, dobimo trditev izreka. Dokaz v topološkem primeru je povsem analogen in ga prepustimo bralcu. $\square$

Oglejmo si operacijo na grupi $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}^*)$. S prehodom na finejše pokritje lahko predstavimo poljubna dva svežnja na istem pokritju v smislu definicije 31. Če sta holomorfna svežnja E in E' na nekem pokritju $\mathcal{U} = \{U_i\}$ predstavljena s kocikloma $(\theta_{i,j})$ in $(\theta'_{i,j})$, potem produktni kocikel $(\theta_{i,j}\theta'_{i,j})$ določa sveženj $E \otimes E'$, ki se imenuje ***tenzorski produkt*** svežnjev E in E'. Inverzni kocikel $(\theta_{i,j}^{-1})$ predstavlja ***inverzni svežnej*** (ali ***dualni sveženj*** $E^{-1} = E^*$; torej je $E \otimes E^{-1}$ trivialni sveženj. Operacija $\otimes$ na grupi $\mathrm{Pic}(X)$ se običajno piše aditivno, torej

$$E \otimes E' = E + E', \quad E^* = -E, \quad E \otimes (E')^* = E - E'.$$

Primer 23 (**Geometrijska predstavitev dualnega svežnja).** Naj bo $\pi\colon E \to X$ holomorfen sveženj premic in $\widehat{E} \to X$ prirejeni sveženj z vlaknom $\mathbb{CP}^1$ (II.7.3), ki ga dobimo z dodatkom prereza v neskončnosti. Naj bo $H \to X$ sveženj, ki ga dobimo tako, da iz $\widehat{E}$ odstranimo ničelni prerez. Vlakna $H_x = (E_x \setminus \{0_x\}) \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ so izomorfna $\mathbb{C}$. Vsaka trivializacija $\Theta\colon E|_U \to U \times \mathbb{C}$, $\Theta(e) = (\pi(e), \theta(e))$, inducira trivializacijo $\widetilde{\Theta}\colon H|_U \to U \times \mathbb{C}$ s predpisom $\widetilde{\Theta}(e) = (\pi(e), \theta(e)^{-1})$. Prehodni kocikel $(\theta_{i,j})$ svežnja E se preslika v kocikel $(\theta_{i,j}^{-1})$, ki določa invezni sveženj. Torej je $H \cong E^{-1}$.

Primer 24 (**Univerzalni sveženj nad $\mathbb{CP}^n$).** Naj bo $\mathbb{CP}^n$ kompleksni projektivni prostor in $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ standardna kvocientna projekcija. Vsak element $x = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{CP}^n$ je predstavljen z vektorjem $= (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, pri čemer dva vektorja predstavljata isti element $\mathbb{CP}^n$ natanko tedaj, ko sta $\mathbb{C}$-kolinearna. Oglejmo si naslednjo množico $E \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$:

$$E = \big\{([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (z_0, \ldots, z_n)) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : x_i z_j = x_j z_i \ \ \forall i, j = 0, 1, \ldots, n\big\}.$$

Označimo z $\pi\colon \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ projekcijo na prvi faktor. Za vsako točko $x = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{CP}^n$ je vlakno $E_x = \pi^{-1}(x)$ ravno kompleksna premica v $\mathbb{C}^{n+1}$, ki jo napenja vektor $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Torej je E sveženj premic nad $\mathbb{CP}^n$. Izračunajmo njegov prehodni kocikel. Naj bo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Na množici $U_i = \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{CP}^n\colon x_i \neq 0\}$ sledi iz definicijskih enačb množice E, da je $z_j = x_j z_i / x_i$. Če izberemo $z_i = 1$, vidimo, da je preslikava $F_i = (F_{i,0}, \ldots, F_{i,n})\colon U_i \to \mathbb{C}^{n+1}$ s komponentami

$$F_{i,k}\big([x_0 : x_1 : \cdots : x_n]\big) = \frac{x_k}{x_i}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

holomorfen prerez brez ničel svežnja $E|_{U_i}$. Naj bo $\Theta_i\colon E|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}$ prirejena trivializacija (II.7.4), ki preslika F_i v konstanten prerez $x \mapsto (x, 1)$ svežnja $U_i \times \mathbb{C}$. Iz definicije prereza F_i sledi $F_i/F_j = x_j/x_i$ na $U_{i,j}$, zato je po trditvi 23 E določen s kociklom

$$\theta_{i,j} = \frac{F_j}{F_i} = \frac{x_i}{x_j}.$$

Ta sveženj premic se imenuje ***univerzalni sveženj*** nad $\mathbb{CP}^n$ in se običajno označi z $\mathbf{U} \to \mathbb{CP}^n$. Njegov dual $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}$ s prehodnim kociklom

$$\theta'_{i,j} = \theta_{i,j}^{-1} = \frac{x_j}{x_i}$$

se imenuje ***sveženj hiperravnine*** (angleško ***hyperplane section bundle***), saj pripada divizorju, ki ga v $\mathbb{CP}^n$ določa poljubna kompleksna hiperravnina. To si bomo podrobneje ogledali v naslednjem razdelku.

II.8 Chernov razred in Princip Oka

V tem razdelku si bomo ogledali pojem Chernovega razreda kompleksnega svežnja premic ter princip Oka na odprtih Riemannovih ploskvah. Chernovi razredi so kohomološki razredi, prirejeni kompleksnim vektorskim svežnjem nad kompleksno mnogoterostjo.

Naj bo σ preslikava $\sigma(f) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f}$, kjer je f neka funkcija ali zarodek funkcije. Očitno je σ surjektiven homomorfizem snopov abelovih grup $\mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ in tudi $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ (operacija na prvi grupi grupi je aditivna, na drugi pa multiplikativna), njegovo jedro pa je v obeh primerih konstanten snop $\mathbb{Z}$ celih števil. Naj bo $\iota\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}$ naravnan vložitev. Oglejmo si naslednji komutativen diagram homomorfizmov snopov:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{O} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{O}^* & \longrightarrow & 1 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{C} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{C}^* & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{II.8.1}$$

Vertikalni preslikavi $\mathcal{O} \to \mathcal{C}$ in $\mathcal{O}^* \to \mathcal{C}^*$ sta naravni vložitvi snopa zarodkov holomorfnih funkcij (oziroma holomorfnih funkcij brez ničel) v snop zarodkov zveznih funkcij (oziroma snop zarodkov zveznih funkcij brez ničel). Obe vrstici sta eksaktni in to zaporedje se v angleški literaturi imenuje ***the exponential sheaf sequence***.

Ker je $\mathcal{C}$ fin snop, je $H^1(X, \mathcal{C}) = 0 = H^2(X, \mathcal{C})$ (glej izrek 23). Prirejeno dolgo eksaktno zaporedje na kohomologiji (glej izrek 24) zato izgleda takole:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(X,\mathcal{O}) \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\| & & \big\downarrow \\ & & 0 & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{C}^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{II.8.2}$$

Definicija 34. Za vsak element $[E] \in H^1(X, \mathcal{O}^*) = \mathrm{Pic}(X)$ se kohomološki razred $c_1([E]) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ imenuje ***prvi Chernov razred*** svežnja $E \to X$. Če je $[E] \in H^1(X, \mathcal{C}^*)$, se razred $c_1([E]) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ imenuje ***topološki prvi Chernov razred***.

Iz diagrama (II.8.2) vidimo naslednje.

Izrek 32. *Naj bo X kompleksna mnogoterost.*

- *Topološki Chernov razred $c_1 : H^1(X, \mathcal{C}^*) \xrightarrow{\cong} H^2(X, \mathbb{Z})$ je izomorfizem.*
- *Če je $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, je homomorfizem $c_1 : H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ injektiven.*
- *Če je $H^1(X, \mathcal{O}) = 0 = H^2(X, \mathcal{O})$, je $c_1 : H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\cong} H^2(X, \mathbb{Z})$ izomorfizem. To pomeni, da so ekvivalenčni razredi holomorfnih svežnjev premic na X v bijektivni korespondenci s topološkimi razredi kompleksnih svežnjev premic.*

Na vsaki kompleksni mnogoterosti X velja $H^k(X,\mathcal{O}) \cong H^k_{\bar\partial}(X) = 0$ za vsak $k = 1, 2, \ldots$, po Dolbeaultovem izreku (posledica 27). Če je X Steinova mnogoterost, so vse Dolbeaultove grupe trivialne (za odprte Riemannove ploskve glej izrek 28; v splošnem glej npr. [12]). Tako dobimo naslednji princip Oka.

Posledica 9 (***Princip Oka za svežnje premic***). *Na vsaki Steinovi mnogoterosti X je Chernov razred $c_1 : H^1(X,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\cong} H^2(X,\mathbb{Z})$ izomorfizem. Če je X odprta Riemannova ploskev, je $H^1(X,\mathcal{O}^*) \cong H^2(X,\mathbb{Z}) = 0$.*

Sedaj si bomo podrobneje ogledali primer, ko je X povezana sklenjena Riemannova ploskev. Tedaj je $H^2(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ in generator to ciklične grupe je orientiran fundamentalni razred $[X]$ ploskve X. (Izberemo orientacijo, ko je skladna s kompleksno strukturo na X.) Če evalviramo prvi Chernov razred $c_1(E) \in H^2(X,\mathbb{Z})$ svežnja $E \in H^1(X,\mathcal{O}^*)$ na orientiranem fundamentalnem razredu ploskve X, dobimo ***Chernovo število***

$$C_1(E) = \langle c_1(E), [X]\rangle \in \mathbb{Z}. \tag{II.8.3}$$

Ni težko videti, da se to število ujema z ***Eulerjevim številom*** $e(E)$, to je orientiranim samopresečnim številom $E_0^2 = E_0 \cdot E_0$ ničelnega prereza $E_0 \subset E$ svežnja E. Samopresečno število je po definiciji enako presečnemu številu $E_0 \cdot G(f)$ med ničelnim prerezom in grafom poljubnega gladkega prereza $f\colon X \to E$. Generično izbran prerez ima končno število ničel, torej imamo končno presečno množico, in presečno število je neodvisno od izbire prereza.

Če je f netrivialen meromorfen prerez svežnja E, velja tudi

$$C_1(E) = \sum_{f(x)=0} \mathrm{st}_x(f) - \sum_{f(x)=\infty} \mathrm{st}_x(f), \tag{II.8.4}$$

torej je $C_1(E)$ razlika med algebraičnim številom ničel in polov prereza f, kar vidimo takole. Vsaka ničla stopnje m očitno prereza f prispeva m k presečnemu številu $E_0 \cdot G(f)$. Denimo sedaj, da ima f pol stopnje m v neki točki $x_0 \in X$. S primerno izbiro lokalne holomorfne koordinate $z\colon U \to \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ na neki enostavno povezani okolici $U \subset X$ točke x_0 in izbire sveženjske koordinate na $E|_U$ lahko dosežemo, da je $z(x_0) = 0$ in $f(z) = z^{-m}$. Ker na krožnici $|z| = c > 0$ velja $z\bar z = c^2$ in zato $z^{-m} = \bar z^m/c^2$, lahko pol stopnje m nadomestimo z gladkim prerezom $z \mapsto \bar z^m/c^2$ na U. Njegovo lokalno presečno število z E_0 je očitno enako $-m$ (zaradi obrata orientacije, ki ga povzroči konjugacija).

Število $C_1(E)$ v (II.8.4) lahko vidimo kot razliko med presečnim številom grafa $G_f \subset \widehat{E}$ prereza v prirejenem svežnju $\widehat{E} \to X$ (II.7.3) z ničenim prerezom in prerezom v neskončnosti.

Če je $g \in \mathbb{Z}_+$ rod ploskve X, velja $H^1(X,\mathcal{O}) \cong \mathbb{C}^g$ (glej izrek 36 na str. 86). Poleg tega imamo izomorfizem $H^1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, ki je induciran z integracijo sklenjenih diferencialnih 1-form po $2g$ baznih ciklih v X, ki so baza prve homološke grupe $H_1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Homomorfizem

$$\mathbb{Z}^{2g} \cong H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}) \cong \mathbb{C}^g$$

je vložitev grupe $\mathbb{Z}^{2g}$ na neko mrežo $\Gamma = \iota(\mathbb{Z}^{2g}) \subset \mathbb{C}^g$. Eksaktno zaporedje v prvi vrstici diagrama II.8.2 se sedaj glasi takole:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}^g \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Torej je $c_1 : H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ surjektivna preslikava, zato za vsako število $k \in \mathbb{Z}$ obstaja holomorfen sveženj premic $E_k \to X$ s Chernovim številom $C_1(E_k) = k$.

Jedro $\ker c_1 = \mathbb{C}^g/\iota(\mathbb{Z}^{2g})$ pa je g-dimenzionalen kompleksen torus, ki se imenuje ***Jacobijev torus*** Riemannove ploskve X in predstavlja izomorfnostne razrede holomorfnih svežjev premic na X, ki so topološko trivialni (torej imajo Chernovo število nič).

Primer 25 (Svežnji premic na Riemannovi sferi). Naj bo $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = U \cup V$, kjer je $U = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}$ in $U \cap V = \mathbb{C}^*$. Posledica 9 za $X = \mathbb{C}$ ter Lerayev izrek 22 nam pove, da je $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*) \cong H^1(\{U, V\}, \mathcal{O}^*)$, torej je vsak kohomološki razred podan s holomorfno funkcijo $f \in \mathcal{O}^*(U \cap V) = \mathcal{O}^=(\mathbb{C}^*)$ brez ničel. Naj bo $k \in \mathbb{Z}$ ovojno število funkcije f na pozitivno orientirani krožnici $|z| = 1$. Tedaj je $f(z) = z^k \tilde{f}(z)$, kjer je $\tilde{f} \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)$ holomorfna neničelna funkcija z ovojnim število 0. Zato obstaja holomorfen logaritem $\xi \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$, ki zadošča $\mathrm{e}^\xi = \tilde{f}$. Ker je $H^1(\{U, V\}, \mathcal{O}) = 0$ (glej dokaz trditve 18), lahko razcepimo $\xi = u - v$, kjer je $u \in \mathcal{O}(U)$ in $v \in \mathcal{O}(V)$. Če definiramo funkciji

$$g = \mathrm{e}^u \in \mathcal{O}^*(U), \qquad h = \mathrm{e}^v \in \mathcal{O}^*(V),$$

dobimo $f = z^k g/h$ na $\mathbb{C}^*$. To pomeni, da funkciji f in $z \mapsto z^k$ določa isti element kohomološke grupe $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*)$. Elementi $[z^k] \in H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*)$ za različne $k \in \mathbb{Z}$ so med seboj različni in zato definirajo neizomorfne holomorfne svežnje premic $E_k \to \mathbb{CP}^n$. To je v skladu z rezultatom

$$H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*) \cong \mathbb{Z}, \tag{II.8.5}$$

ki ga dobimo iz zaporedja (II.8.2):

$$0 = H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(\mathbb{CP}^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Sveženj E_k je podan s prehodnim kociklom $z \mapsto z^k$ na $U \cap V$. Prerez svežnja E_k je torej določen s parom funkcij f_0 na $U = \mathbb{C}$ in f_1 na $V = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$, ki zadoščata pogoju

$$f_0(z) = z^k f_1(z), \qquad z \in \mathbb{C}^*.$$

II.9 Zveza med divizorji in svežnji premic

V tem razdelku si bomo ogledali zvezo med divizorji in holomorfnimi svežnji premic.

Izrek 31 nam pove, da so elementi grupe $H^1(X, \mathcal{O}^*) = \mathrm{Pic}(X)$ izomorfnostni razredi holomorfnih svežnjev premic nad X. Homomorfizem $\delta \colon \mathrm{Div}(X) \to H^1(X, \mathcal{O}^*)$ (II.6.7) priredi vsakemu divizorju $D \in \mathrm{Div}(X)$ izomorfnostni razred $\delta(D) = [D] \in \mathrm{Pic}(X)$ holomorfnih svežnjev premic nad X. Sveženj $[D]$ je trivialen natanko tedaj, ko je D glavni divizor, to je $D = (f)$ za neko meromorfno funkcijo $f \in \mathcal{M}^*(X)$.

Vsak divizor D je določen z družino meromorfnih funkcij $f_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$ nad nekim pokritjem $\mathcal{U} = \{U_i\}$, tako da je $f_{i,j} = f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$ za vsak i, j. Prirejen sveženj premic $E = [D] \in \mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}^*)$ je določen z 1-kociklom $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Iz zveze

$$f_i = f_{i,j} f_j \quad \text{na} \quad U_{i,j} \tag{II.9.1}$$

vidimo, da $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ določa nek meromorfen prerez svežnja $[D]$ (glej (II.7.2)). Obratno, vsak netrivialen meromorfen prerez f svežnja E je podan z 0-koverigo $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$, ki zadošča pogojem (II.9.1), torej določa divizor $D = (f) \in \mathrm{Div}(X)$. (Če je E trivialni sveženj $X \times \mathbb{C}$, je divizor (f), prirejen meromorfnemu prerezu, ki ga lahko v tem primeru izenačimo z meromorfno funkcijo na X, glavni divizor.)

Če je X Riemannova ploskev, smo v prejšnjem razdelku videli, da lahko meromorfne prereze identificiramo s holomorfnimi prerezi prirejenega svežnja $\widehat{E} \to X$ v vlakni $\mathbb{CP}^1$.

Trditev 24. *Naj bo $E = [D] \to X$ sveženj premic, ki pripada divizorju $D \in \mathrm{Div}(X)$. Za poljuben nekonstanten meromorfen prerez $f \in \mathcal{M}(X, E)$ je divizor $(f) \in \mathrm{Div}(X)$ ekvivalenten divizorju D.*

Dokaz. Naj bo $(f_i) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ nek 1-kocikel, ki določa divizor D v smislu $(f_i) = D|_{U_i}$ za vsak i. Tedaj je $(f) = D$ po definiciji divizorja (f). Če je $g = (g_i)$ poljuben nekonstanten meromorfen prerez svežnja E, velja $g_i = f_{i,j} g_j$ na $U_{i,j}$. Ker je tudi $f_i = f_{i,j} f_j$, sledi $g_i/f_i = g_j/f_j$ na $U_{i,j}$. Družina (g_i/f_i) torej določa nekonstantno meromorfno funkcijo $h \in \mathcal{M}^*(X)$. Iz $g = fh$ sledi $(g) = (fh) = (f) + (h)$. Ker je (h) glavni divizor na X, sta divizorja (g) in $(f) = D$ ekvivalentna. Obratno, za vsako meromorfno funkcijo $h \in \mathcal{M}^*(X) = \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ določa 0-koveriga $(g_i) = (f_i h) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ meromorfni prerez g svežnja $E = [D]$. $\square$

Iz trditve 24, definicije Chernovega števila (II.8.3) ter formule (II.8.4) neposredno sledi

Posledica 10. *Za vsak divizor D na kompaktni Riemannovi ploskvi X je Chernovo število holomorfnega svežnja premic $[D] \in \mathrm{Pic}(X)$ enako stopnji divizorja D:*

$$C_1([D]) = \mathrm{st} D.$$

Oglejmo si pomen algebraičnih operacij na grupi $\mathrm{Pic}(X)$ v povezavi z operacijami na grupi divizorjev $\mathrm{Div}(X)$.

Naj bosta divizorja D in D' določena z družinama meromorfnih funkcij $f_i, f_i' \in \mathcal{M}^*(U_i)$ nad nekim pokritjem $\mathcal{U} = \{U_i\}$. Potem je vsota divizorjev $D + D'$ določena z družino produktov $f_i f_i' \in \mathcal{M}^*(U_i)$. Prirejena svežnja $[D], [D'] \in \mathrm{Pic}(X)$ sta določena s kocikloma $f_{i,j} = f_i/f_j$, $f_{i,j}' = f_i'/f_j'$ v $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Vsoti divizorjev $D + D'$ zato pripada sveženj premic

$[D + D'] \in \mathrm{Pic}(X)$, ki je določen s produktom $f_{i,j} f'_{i,j}$ zgornjih dveh kociklov. To je ravno tenzorski produkt svežnjev $[D]$ in $[D']$:

$$[D + D'] = [D] \otimes [D'] = [D] + [D'] \in \mathrm{Pic}(X).$$

Po dogovoru se na grupi $\mathrm{Pic}(X)$ običajno uporablja aditivni zapis tenzorskega produkta. Divizorju $-D$ pripada inverzni kocikel $1/f_{i,j}$, ki določa inverzni sveženj premic:

$$[-D] = [D]^{-1}, \qquad [D - D'] = [D] \otimes [D']^{-1} = [D] - [D'].$$

Naravno vprašanje je, ali je vsak sveženj premic podan z nekim divizorjem, torej, ali je homomorfizem δ (II.6.7) surjektiven. To je res natanko tedaj, ko je homomorfizem $H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^1(X, \mathcal{M}^*)$ v eksaktnem kohomološkem zaporedju ničelni. Slednje velja, če ima vsak holomorfen sveženj premic na X netrivialen meromorfen prerez, kar vidimo takole. Recimo, da je $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 1-kocikel, ki določa sveženj $E \to X$. Netrivialen meromorfen prerez tega svežnja je 0-koveriga $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$, ki zadošča pogoju $f_i = f_{i,j} f_j$ na $U_{i,j}$ (glej (II.9.1). Divizor D, določen s koverigo (f_i), tedaj podaja sveženj E.

Znano, da ima vsak holomorfen sveženj premic na kompaktni Riemannovi ploskvi netrivialen meromorfen prerez. (Glej npr. Forster [7].) Na odprti Riemannovi ploskvi je vsak holomorfen sveženj premic holomorfno trivialen, glej §II.8, vsak divizor pa je glavni po Weierstrassovem izreku; torej sta grupi $\mathrm{Div}(X)/\mathcal{M}^*(X)$ in $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ trivialni. Sledi

Izrek 33. *Za vsako Riemannovo ploskev velja*

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) = \mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{Div}(X)/\mathcal{M}^*(X).$$

To je, vsak holomorfen sveženj premic nad Riemannovo ploskvijo je določen z nekim divizorjem, pri čemer glavnim divizorjem pripada trivialni sveženj.

Primer 26. Na Riemannovi sferi je $\mathrm{Pic}(\mathbb{CP}^1) \cong \mathbb{Z}$ (II.8.5). Divizorju $D_k = k \cdot 0$ $(k \in \mathbb{Z})$ pripada sveženj premic $E_k \to \mathbb{CP}^1$ s prehodnim kociklom $z \mapsto z^k$ na $U \cap V = \mathbb{C}^*$. Vsak divizor D na $\mathbb{CP}^1$ je linearno ekvivalenten divizorju D_k za $k = \mathrm{st}D$. Izomorfizem $\mathrm{Div}(\mathbb{CP}^1)/\mathcal{M}^*(\mathbb{CP}^1) \cong \mathrm{Pic}(X)$ priredi razredu divizorja D sveženj premic E_k, $k = \mathrm{st}D$.

Odgovor na zgornje vprašanje je v splošnem negativen: obstajajo kompaktne kompleksne mnogoterosti X dimenzije > 1 brez divizorjev, toda z netrivialnimi holomorfnimi svežnji premic. Konkretno obstajajo kompleksni torusi $\mathbb{C}^n/\Gamma$ s to lastnostjo, kjer je $n > 1$ in je $\Gamma \cong \mathbb{Z}^{2n}$ mreža v $\mathbb{C}^n$. Odgovor pa je pozitiven na vseh Steinovih mnogoterostih in na projektivno algebraičnih mnogoterostih:

Izrek 34. *Na vsaki projektivno algebraični mnogoterosti X je homomorfizem (II.6.7) surjektiven, torej je*

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) = \mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{Div}(X)/\mathcal{M}^*(X).$$

Isto velja za vsako Steinovo mnogoterost X (to je, zaprto kompleksno podmnogoterost kakšnega kompleksnega evklidskega prostora; glej def. 43 na str. 116).

Sedaj bomo vsakemu divizorju D priredili nek podsnop $\mathcal{O}_D \subset \mathcal{M}$ v snopu zarodkov meromorfnih funkcij. Ti snopi igrajo bistveno vlogo v Riemann-Rochovem izreku.

Definicija 35. Naj bo D divizor na X. Snop $\mathcal{O}_D$ je množica vseh zarodkov meromorfnih funkcij $f \in {}_X\mathcal{M}$, ki zadoščajo pogoju $(f) + D \geq 0$. Prirejeni prostor prerezov je

$$L(D) = H^0(X, \mathcal{O}_D) := \{f \in \mathcal{M}(X) \colon (f) + D \geq 0\}. \tag{II.9.2}$$

Tu je (f) glavni divizor, ki ga določa meromorfna funkcija f. Ničelno funkcijo $f = 0$ po dogovoru vzamemo za element $L(D)$, tako da je $L(D)$ kompleksen vektorski prostor.

Zveza med elementi prostora $L(D)$ in prerezi svežnja premic $[D]$ je naslednja.

Trditev 25. *Naj bo D divizor na X. Vsaka funkcija $f \in L(D)$ določa nek* holomorfen *prerez svežnja premic $[D]$ in obratno, vsak holomorfen prerez svežnja $[D]$ pripada nekemu elementu prostora $L(D)$. Torej imamo izomorfizem*

$$L(D) \cong \Gamma_{\mathcal{O}}(X, [D]).$$

Dokaz. Če je D podan z 0-koverigo $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*))$ na nekem pokritju $\mathcal{U} = \{U_i\}$ mnogoterosti X, je sveženj $[D] \in \operatorname{Pic}(X)$ določen s kociklom $f_{i,j} = f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$.

V prejšnjem razdelku smo videli, da je vsak meromorfen prerez svežnja $[D]$ določen s koverigo $(gf_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ za neko meromorfno funkcijo $g \in \mathcal{M}(X)$. Prirejeni divizor je na U_i določen z $(gf_i) = (g) + (f_i) = (g) + D|_{U_i}$. Torej velja $(g) + D \geq 0$ natanko tedaj, ko je $(gf_i) \geq 0$ za vsak i, kar pomeni, da $gf_i \in \mathcal{O}(U_i)$ holomorfna funkcija za vsak i. Slednje ravno pomeni, da koveriga $(gf_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ podaja holomorfen prerez svežnja $[D]$. $\square$

Isti dokaz pokaže naslednje.

Trditev 26. *Za vsak divizor D na X je snop $\mathcal{O}_D$ izomorfen snopu $\mathcal{E}$ zarodkov holomorfnih prerezov prirejenega svežnja premic $E = [D] \to X$.*

Denimo, da je X Riemannova ploskev in $D = \sum_j n_j \cdot x_j$. Pogoj $(f) + D \geq 0$ pomeni

$$\operatorname{red}_{x_j} f + n_j \geq 0 \qquad \forall x_j \in \operatorname{supp} D.$$

Torej ima lahko f v točki x_j pol stopnje največ n_j (ali pa je holomorfna), če je $n_j > 0$, in ima ničlo stopnje vsaj $-n_j \in \mathbb{N}$, če je $n_j < 0$.

Trditev 27. *Za vsak divizor $D = D_+ - D_-$ na kompaktni Riemannovi ploskvi X, kjer sta $D_+ \geq 0$ in $D_- \geq 0$ efektivna divizorja, je $L(D)$ (II.9.2) končno dimenzionalen kompleksen vektorski prostor in velja ocena*

$$\dim_{\mathbb{C}} L(D) \leq \deg D_+ + 1.$$

Če je $\operatorname{st} D < 0$, *je $L(D) = \{0\}$. Če je $D = (g)$ glavni divizor, je $L(D) = \mathbb{C}$.*

Dokaz. Ker red meromorfne funkcije v točki očitno zadošča pogoju

$$\mathrm{red}_x(f+g) \geq \max\{\mathrm{red}_x f, \mathrm{red}_x g\}, \qquad \mathrm{red}_x(cf) = \mathrm{red}_x f \ (c \in \mathbb{C}^*),$$

iz $f, g \in L(D)$ sledi $f+g \in L(D)$ in $cf \in L(D)$; torej je $L(D)$ kompleksen vektorski prostor. (Ničelno funkcijo $f \equiv 0$ razumemo kot element $L(D)$ po dogovoru.)

Iz pogoja $(f) + D \geq 0$ sledi $0 \leq \mathrm{st}((f)+D) = \mathrm{st}D$, saj je $\mathrm{st}(f) = 0$. Torej je množica $L(D)$ prazna v primeru, ko je $\mathrm{st}D < 0$.

Če je D glavni divizor, torej $D = (g)$ za neko funkcijo $g \in \mathcal{M}^*(X)$, velja $(f) + D = f + (g) = (fg) \geq 0$ natanko tedaj, ko je fg holomorfna funkcija, torej konstanta (ker je X kompaktna). V tem primeru je torej $L(D) = \{c/g \colon c \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$.

Denimo sedaj, da je $\mathrm{st}D \geq 0$. Naj bo $D_+ = \sum_{j=1}^k n_j \cdot x_j = \max\{D, 0\}$ efektivni del divizorja D. V okolici vsake točke $x_j \in \mathrm{supp}\, D_+$ izberemo neko lokalno holomorfno koordinato $z = z_j$, v kateri je $z(x_j) = 0$. Poljubna funkcija $f \in L(D)$ ima tedaj v x_j Laurentov razvoj

$$f(z) = \frac{c_{j,-n_j}}{z^{n_j}} + \cdots + \frac{c_{j,-1}}{z} + g_j(z),$$

kjer je g_j regularni del f v x_j. Preslikava, ki funkciji $f \in L(D)$ priredi vektor vseh koeficientov $c_{j,-l}$ $(j = 1, \ldots, k,\ l = 1, \ldots, n_j)$ njenih glavnih delov v točkah $x_j \in \sup D_+$, je linearni homomorfizem $L(D) \to \mathbb{C}^N$, kjer je $N = n_1 + \ldots + n_k$. Jedro tega homomorfizma so funkcije $f \in L(D)$ brez singularnosti, torej holomorfne. Ker je X kompaktna, je vsaka taka funkcija konstanta. Odtod sledi $\dim L(D) \leq 1 + N$. □

II.10 Riemann-Rochov izrek

V tem razdelku bomo dokazali enega najpomembnejših rezultatov v teoriji kompaktnih Riemannovih ploskev, to je ***Riemann-Rochov izrek***. Ta je tesno povezan s ***Serrejevim dualnostnim izrekom***, ki ga bomo obravnavali v naslednjih dveh razdelkih.

V prejšnjem razdelku smo videli, da je vsakemu divizorju D na Riemannovi ploskvi X prirejen holomorfen svežen premic $[D] \to X$. Riemannov-Rochov izrek izraža dimenzijo kompleksnega vektorskega prostora $\Gamma_{\mathcal{O}}(X, [D])$ vseh holomorfnih prerezov $X \to [D]$ s topološkimi podatki (rod ploskve in stopnja divizorja) ter z dimenzijo prve kohomološke grupe $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ snopa zarodkov holomorfnih prerezov svežnja $[D]$.

Izrek 35 (Riemann-Roch). *Naj bo D divizor na kompaktni Riemannovi ploskvi X. Potem sta $L(D) = H^0(X, \mathcal{O}_D)$ in $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ končno razsežna kompleksna vektorska prostora in velja* ***Riemann-Rochova formula***

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \mathrm{st}D, \tag{II.10.1}$$

kjer je g rod ploskve X in je $\mathrm{st}D$ stopnja divizorja D.

Prostor $H^0(X, \mathcal{O}_D) = L(D)$ je končno razsežen po trditvi 27 na str. 84. Za prostor $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ bo to sledilo iz dokaza ter dejstva, da je $H^1(X, \mathcal{O})$ končno dimenzionalen (glej izrek 29 na str. 65). Število

$$i_D = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) \in \mathbb{Z}_+ \tag{II.10.2}$$

se imenuje ***indeks specialnosti*** divizorja D. Razlika na levi strani Riemann-Rochove enačbe (II.10.1),

$$I(D) := \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D), \tag{II.10.3}$$

se imenuje ***indeks divizorja*** D. Izrek pove, da je ta indeks odvisen samo od dveh topoloških invariant, to je roda ploskve X in stopnje divizorja D.

Kot bomo videli v posledici 16 na str. 92, veljajo v Riemann-Rochovi formuli naslednje enakosti za divizorje s previsoko ali prenizko stopnjo:

- Če je st$D > 2g - 2$, velja $i_D = 0$ in ***Riemannova formula***

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \mathrm{st}D.$$

- Če je st$D < 0$, velja $\dim L(D) = 0$ in

$$i_D = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = g - 1 - \mathrm{st}D.$$

Riemann-Rochov izrek je primer in prototip ***indeksnih izrekov*** v analizi in geometriji, ki povezujejo analitične količine (npr. indeks Fredholmovega operatorja, tipičen primer so parcialni diferencialni operatorji) s topološkimi invariantami. Splošen izrek te vrste je ***Atiyah-Singerjev indeksni izrek***, ki vsebuje veliko večino znanih posebnih primerov. ***Sir Michael Francis Atiyah in Isadore Manuel Singer sta za svoje delo na področju teorije indeksnih izrekov prejela Abelovo nagrado za leto 2004.***

Oglejmo si osnovni primer, ko je $D = 0$ ničelni divizor. Tedaj je $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}$ snop zarodkov holomorfnih funkcij na X in $H^0(X, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(X) \cong \mathbb{C}$, torej $\dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$. Ker je st$D = \mathrm{st}0 = 0$, je formula (II.10.1) v tem primeru ekvivalentna naslednjemu izreku:

Izrek 36. *Za vsako sklenjeno Riemannov ploskev X s topološkim rodom g velja*

$$g_a := \dim H^1(X, \mathcal{O}) = g. \tag{II.10.4}$$

Število $g_a = \dim H^1(X, \mathcal{O}) \in \mathbb{Z}_+$ se imenuje ***analitičen rod*** ploskve X. (Dimenzija je končna po izreku 29 na str. 29.) Izrek 36 torej trdi, da je analitičen rod enak topološkemu rodu. To že vemo v primeu $g = 0$, torej na Riemannovi sferi $X = \mathbb{CP}^1$; glej trditev 18.

Shema dokaza izreka 35 je naslednja.

- Najprej bomo dokazali Riemann-Rochovo formulo (II.10.1) s številom g_a namesto topološkega roda $g = g_X$ na desni strani formule; glej izrek 37.

- Iz (II.10.5) sledi obstoj netrivialnih meromorfnih funkcij in meromorfnih 1-form na poljubni kompaktni Riemannovi ploskvi (posledica 12 na str. 89).
- S temi sredstvi bomo dokazali Serrejev dualnostni izrek (izrek 39 na str. 91).
- Z uporabo Riemann-Rochove formule (II.10.5) za kanoničen divizor K ter Serrejeve dualnosti sledi $\mathrm{st}K = 2g_a - 2$ (posledica 15 na str. 91).
- Iz obstoja nekonstantna meromorfne funkcije in Riemann-Hurwitzove formule (izrek 18 na str. 37) sledi $\mathrm{st}K = 2g_X - 2$ (izrek 38 na str. 89). Iz primerjave s prejšnjo točko dobimo $g_a = g_X$. S tem bo izrek 35 v celoti dokazan.

V tem razdelku bomo dokazali Riemann-Rochovo formulo (II.10.1) z g_a namesto g.

Izrek 37. *Za vsako kompaktno povezano Riemannovo ploskev X velja*

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g_a + \mathrm{st}D, \tag{II.10.5}$$

kjer je $g_a = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ analitičen rod ploskve X.

Ker lahko vsak divizor dobimo iz trivialnega divizorja z dodajanjem ali odvzemanjem točk, sledi izrek 37 z induktivno uporabo naslednje trditve.

Lema 2. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev, D divizor na X ter $p \in X$ poljubna točka. Tedaj Riemann-Rochova formula (II.10.5) velja za divizor D natanko tedaj, ko velja za divizor $D' = D + p$.*

Dokaz. Sledili bomo dokazu v Forsterjevi monografiji [7].

Iz pogoja $(f) + D \geq 0$ očitno sledi $(f) + D' \geq 0$, zato je $\mathcal{O}_D$ podsnop snopa $\mathcal{O}_{D'} = \mathcal{O}_{D+p}$. Oglejmo si kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{D+p} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_p \longrightarrow 0, \tag{II.10.6}$$

kjer je α inkluzija $\mathcal{O}_D \hookrightarrow \mathcal{O}_{D+p}$, β pa je kvocientna projekcija. Kvocient $\mathcal{O}_{D+p}/\alpha(\mathcal{O}_D) = \mathbb{C}_p$ ima bilko $\mathbb{C}$ v točki p, v vseh ostalih točkah $x \in X \setminus \{p\}$ pa je bilka trivialna. Ta snop je dobljen iz predsnopa, definiranega s predpisom $\mathbb{C}_p(U) = \mathbb{C}$, če množica $U \subset X$ vsebuje točko p, in $\mathbb{C}_p(U) = \{0\}$ sicer. (Snop $\mathbb{C}_p$ se pogosto imenuje ***nebotičnik*** v p.) Velja

$$H^0(X, \mathbb{C}_p) \cong \mathbb{C}, \qquad H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0.$$

Prva enakost je očitna. Za drugo uporabimo pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ploskve X, tako je točka p vsebovana v natanko eni množici U_i; torej $p \ni U_{i,j}$ za $i \neq j$. Vsak kocikel na takem pokritju je očitno ničeln.

Oglejmo si pomen kvocientne preslikave β. Naj bo $k = D(p) \in \mathbb{Z}$. Izberemo lokalno holomorfno koordinato z na X v okolici točke p, v kateri je $z(p) = 0$. Vsak zarodek $f \in (\mathcal{O}_{D'})_p$ ima Laurentov razvoj

$$f(z) = c_{-k-1}z^{-k-1} + \sum_{j=-k}^{\infty} c_j z^j.$$

Ker vrsta na desni strani pripada kolobarju $(\mathcal{O}_D)_p$, je $\beta(f) = c_{-k-1} \in \mathbb{C}$.

Kratkemu eksaktnemu zaporedju (II.10.6) pripada dolgo eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) \xrightarrow{\beta} H^0(X, \mathbb{C}_p) = \mathbb{C} \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D+p}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0$$

(glej izrek 24 na str. 63). Analizirali bomo dva možna primera.

1. primer: $\beta\colon H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) \to \mathbb{C}$ *je ničelni homomorfizem.* Iz eksaktnosti sledi, da je preslikava $\alpha\colon H^0(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\cong} H^0(X, \mathcal{O}_{D+p})$ izomorfizem in je zato

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}). \tag{II.10.7}$$

Poleg tega imamo eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D+p}) \longrightarrow 0,$$

iz katerega preberemo

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = H^1(X, \mathcal{O}_{D+p}) + 1. \tag{II.10.8}$$

(Oba prostora sta končno razsežna, čim je eden od njiju končno razsežen.) Če od enačbe (II.10.7) odštejemo enačbo (II.10.8), dobimo

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - 1. \tag{II.10.9}$$

Ker je tudi $\mathrm{st}D = \mathrm{st}D' - 1$, vidimo, da velja Riemann-Rochova formula (II.10.1) za divizor D natanko tedaj, ko velja za divizor $D' = D + p$.

2. primer: homomorfizem $\beta\colon H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) \to \mathbb{C}$ *je surjektiven.* Dolgo eksaktno zaporedje sedaj razpade na naslednji dve kratki eksaktni zaporedji:

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) \xrightarrow{\beta} \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D+p}) \longrightarrow 0.$$

V drugi vrstici imamo torej izomorfizem $H^1(X, \mathcal{O}_D) \cong H^1(X, \mathcal{O}_{D+p})$ in zato $i_D = i_{D+p}$, iz prve vrstice pa sledi

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) - 1.$$

Če odštejemo dobljeni enačbi, dobimo ponovno (II.10.9) in lahko naredimo enak sklep kot prej. S tem je izrek 37 dokazan. □

Posledica 11. *Za poljuben divizor D na kompaktni Riemannovi ploskvi X velja* ***Riemannova neenakost***

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g_a + \mathrm{st}D. \tag{II.10.10}$$

Če je $\mathrm{st}D < 0$*, velja* $\dim L(D) = 0$ *in*

$$-i_D = -\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g_a + \mathrm{st}D. \tag{II.10.11}$$

Dokaz. Ocena (II.10.10) sledi iz enakosti (II.10.5), če izpustimo indeks specialnosti $i_D = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) \geq 0$. Če je $0 \neq f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$, je $(f) + D \geq 0$ in zato $0 \leq \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}D = \mathrm{st}D$, kar dokaže drugo trditev in formulo (II.11.7). □

Če izberemo poljuben divizor D stopnje $\mathrm{st}D \geq 1 + g_a$, sledi $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 2$, torej prostor $L(D) = H^0(X, \mathcal{O}_D)$ vsebuje nekonstantno meromorfno funkcijo.

Posledica 12. *Vsaka kompaktna Riemannova ploskev dopušča nekonstantno meromorfno funkcijo in nekonstantno meromorfno* 1*-formo.*

Dokaz. Prvo trditev smo že dokazali. Naj bo sedaj $f \in \mathcal{M}(X)$ nekonstantna meromorfna funkcija. Tedaj f podaja nekonstantno holomorfno preslikavo $f \colon X \to \mathbb{CP}^1$. Povlek $f^*\omega$ poljubne nekonstantne meromorfne 1-forme na $\mathbb{CP}^1$ (npr. $\omega = dz$ na $\mathbb{C} \subset \mathbb{CP}^1$) je nekonstantna meromorfna 1-forma na X.

Sedaj lahko dokažemo naslednjo formulo o stopnji kanoničnega divizorja.

Izrek 38. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev roda g. Potem je stopnja kanoničnega divizorja K_X enaka*

$$\mathrm{st}(K_X) = -\chi(X) = 2g_X - 2.$$

Dokaz. Na Riemannovi sferi $X = \mathbb{CP}^1$ to sledi iz primera 22 in posledice 7 (str. 70).

Naj bo sedaj X poljubna. Posledica 12 zgoraj nam da nekonstantno meromorfno funkcijo $f \in \mathcal{M}(X)$, torej nekonstantno holomorfno preslikavo $f \colon X \to \mathbb{CP}^1$. Označimo z $B(f)$ njen ***razvejiščni divizor***:

$$B(f) = \sum_{x \in X} (\mathrm{st}_x f - 1) \cdot x = \sum_{x \in \mathrm{br}(f)} (\mathrm{st}_x f - 1) \cdot x \geq 0.$$

Tu je $\mathrm{br}(f)$ razvejiščna množica (ali kritična množica) preslikave f (glej §I.13). Stopnja tega divizorja je ravno razvejiščno število $b(f)$ preslikave f (glej (I.13.1) na str. 37):

$$\mathrm{st}B(f) = \sum_{x \in \mathrm{br}(f)} (\mathrm{st}_x f - 1) = b(f).$$

Naj bo $0 \neq \omega$ meromorfna 1-forma na $\mathbb{CP}^1$. Potem je $\eta = f^*\omega$ meromorfna 1-forma na X, ki je v poljubni lokalni koordinati ζ na X podana na naslednji način. Denimo, da je v tej koordinati preslikava f podana s funkcijo $z = z(\zeta)$. Če je $\omega(z) = g(z)\, dz$, je

$$\eta(\zeta) = (z^*\omega)(\zeta) = g(z(\zeta))\, z'(\zeta)\, d\zeta. \tag{II.10.12}$$

Označimo z $d \in \mathbb{N}$ stopnjo preslikave f. Formo ω na $\mathbb{CP}^1$ sedaj izberimo tako, da je $(\omega) = -2 \cdot z_0$ za neko točko $z_0 \in \mathbb{CP}^1$, ki ne leži v $f(\mathrm{br}(f))$. (Glej primer 22 na str. 69.) Torej ima ω pol stopnje 2 v z_0 in nobenih drugih ničel ali polov. Naj bo $f^{-1}(z_0) = \{x_1, \dots, x_d\} \subset X$; točke x_j so paroma različne, saj je z_0 regularna vrednost preslikave f. Iz (II.10.12) sledi, da ima 1-forma $\eta = f^*\omega$ pol stopnje 2 v vsaki od točk $x_1, \dots, x_d$, poleg tega pa ima ničlo stopnje $\mathrm{br}_x f - 1$ v vsaki od točk $x \in \mathrm{br}(f)$. (Te ničle prispeva koeficient $z'(\zeta)$ v (II.10.12).) Drugih ničel ali polov ni. Odtod sledi

$$\mathrm{st}(\eta) = -2d + b(f).$$

Po Riemann-Hurwitzovi formuli (I.13.2) (str. 37) velja

$$\chi(X) = d\chi(\mathbb{CP}^1) - b(f) = 2d - b(f),$$

kar je po prejšnji formuli enako $-\mathrm{st}(\eta)$. Ker je $(\eta) = K_X$, je izrek dokazan. □

II.11 Serrejev dualnostni izrek in posledice

Označimo z $\mathcal{M}^{(1)}$ snop zarodkov meromorfnih 1-form na X. V razdelku II.5 smo videli, da vsaka meromorfna 1-forma $0 \neq \omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ določa divizor $(\omega) \in \mathrm{Div}(X)$. Vsak tak divizor se imenuje *kanonični divizor*; ekvivalenčni razred kanoničnega divizorja označimo s $K = K_X$ in imenujemo *kanonični razred*. Če v neki lokalni holomorfni karti $z\colon U \to \mathbb{C}$ na $U \subset X$ velja $\omega = f(z)\,dz$, je $(\omega) = (f)$ na U.

Sedaj definiramo snop

$$\Omega_D = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)} \colon (\omega) + D \geq 0\}$$

in njegov prostor prerezov

$$H^0(X, \Omega_D) = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \colon (\omega) + D \geq 0\}.$$

Ničelna forma $\omega = 0$ je po dogovoru element $H^0(X, \Omega_D)$, ki je s tem $\mathbb{C}$-vektorski prostor, kar vidimo enako kot pri prostorih $L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : (f) + D \geq 0\}$ (II.9.2).

Trditev 28. *Naj bo K poljuben kanonični divizor kompaktne Riemannove ploskve X. Potem imamo za vsak divizor D na X izomorfizem snopov*

$$\mathcal{O}_{D+K} \cong \Omega_D.$$

Dokaz. Naj bo $K = (\omega_0)$, kjer je $0 \neq \omega_0 \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$. Naj bo D poljuben divizor. Za vsako nekonstantno meromorfno funkcijo f na odprti množici $U \subset X$ velja

$$(f) + D + K = (f) + K + D = (f\omega_0) + D.$$

Odtod sledi, da je preslikava $\mathcal{O}_{D+K} \longrightarrow \Omega_D$, $f \mapsto f\omega_0$, izomorfizem snopov. □

Iz trditev 27 (str. 84) in 28 sledi

Posledica 13. *Za vsak divizor D na kompaktni Riemannovi ploskvi X je $H^0(X, \Omega_D)$ končno dimenzionalen kompleksen vektorski prostor.*

Izrek 39 (Serrejev dualnostni izrek). *Za vsak divizor D na kompaktni Riemannovi ploskvi X velja*

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \cong H^0(X, \Omega_{-D}), \qquad H^1(X, \Omega_D) \cong H^0(X, \mathcal{O}_{-D})^*. \tag{II.11.1}$$

V posebnem imamo za ničelni divizor $D = 0$ izomorfizma

$$H^1(X, \mathcal{O})^* \cong H^0(X, \Omega), \qquad H^1(X, \Omega) \cong H^0(X, \mathcal{O})^* \cong \mathbb{C}. \tag{II.11.2}$$

Opomba. Dualnosti v (II.11.1) sta ekvivalentni, kar vidimo takole. Recimo, da velja prva dualnost. Naj bo K kanonični divizor na X. Po trditvi 28 sta snopa $\mathcal{O}_{D+K}$ in Ω_D izomorfna. Zato je tudi

$$\Omega \cong \mathcal{O}_K, \qquad \Omega_{-D} \cong \mathcal{O}_{K-D}. \tag{II.11.3}$$

Za divizor $D' = -D - K$ dobimo izomorfizem $\mathcal{O}_{-D} = \mathcal{O}_{D'+K} \cong \Omega_{D'} = \Omega_{-D-K}$. Iz prve dualnosti v (II.11.1) zato sledi druga dualnost:

$$H^1(X, \Omega_D) \cong H^1(X, \mathcal{O}_{D+K}) \cong H^0(X, \Omega_{-D-K})^* \cong H^0(X, \mathcal{O}_{-D})^*.$$

Analogno vidimo obratno implikacijo. □

Izrek 39 bomo dokazali v naslednjem razdelku s pomočjo izreka 37 (Riemann-Rochov izrek za analitičen rod), ki smo ga dokazali v prejšnjem razdelku. V preostanku tega razdelka se bomo posvetili poslednicam Serrejeve dualnosti ter Riemann-Rochovega izreka.

Posledica 14. *Na vsaki kompaktni Riemannovi ploskvi X je*

$$g_a = \dim H^1(X, \mathcal{O}) = \dim H^0(X, \Omega), \qquad \dim H^1(X, \Omega) = 1. \tag{II.11.4}$$

Za vsak divizor D na X velja $\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \Omega_{-D})$.

Dokaz. To je neposredna posledica izomorfizmov v izreku 39. □

Posledica 15. *Stopnja kanoničnega divizorja kompaktne Riemannove ploskve X je enaka*

$$\mathrm{st}K = 2g_a - 2 = 2 \dim H^1(X, \mathcal{O}) - 2.$$

Dokaz. Po Riemann-Rochovem izreku 37 velja

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_K) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) = 1 - g_a + \mathrm{st}K.$$

Ker je $\mathcal{O}_K \cong \Omega$ (II.11.3), dobimo z upoštevanjem (II.11.4)

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{O}_K) &= \dim H^0(X, \Omega) = g_a, \\ \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) &= \dim H^1(X, \Omega) = 1. \end{aligned}$$

Odtod sledi $\mathrm{st}K = 2g_a - 2$. □

Opomba. Izrek 36, da je analitičen rod g_a enak topološkemu rodu g_X, sedaj sledi neposredno iz izreka 38 na str. 89 (o stopnji kanoničnega divizorja) in posledice 15 zgoraj.

S tem je dokazan tudi Riemann-Rochov izrek 35 pod predpostavko, da velja izrek 39 o Serrejevi dualnosti. Kot smo že poudarili, bomo v dokazu izreka 39 uporabili le izrek 37, tako da je dokaz logično korekten. $\square$

Posledica 16. *Za vsak divizor D na sklenjeni Riemannovi ploskvi X velja* ***Riemannova neenakost***

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + \mathrm{st}D. \tag{II.11.5}$$

Če je $\mathrm{st}D > 2g-2$, velja $i_D = 0$ in ***Riemannova formula***

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \mathrm{st}D. \tag{II.11.6}$$

Če je $\mathrm{st}D < 0$, velja $\dim L(D) = 0$ in

$$i_D = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = g - 1 - \mathrm{st}D. \tag{II.11.7}$$

Dokaz. Neenakost (II.11.5) je trivialna posledica enakosti (II.11.8) in neenakosti $i_D \geq 0$. Drugo trditev vidimo takole. Za vsako 1-formo $0 \neq \omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ je $(\omega) \geq D$. Ker po izreku 38 za kanonični divizor velja $\mathrm{st}(\omega) = 2g-2$, sledi $\mathrm{st}D \leq \mathrm{st}(\omega) \leq 2g-2$. V primeru $\mathrm{st}D > 2g-2$ je torej prostor $H^0(X, \Omega_{-D})$ trivialen. Če pa je $\mathrm{st}D < 0$, je prostor $L(D) = H^0(X, \mathcal{O}_D)$ trivialen, saj iz $(f) + D \geq 0$ sledi $\mathrm{st}(f) + \mathrm{st}D = \mathrm{st}D \geq 0$ za vsako nekonstantno meromorfno funkcijo $0 \neq f \in L(D)$. $\square$

Posledica 17. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev roda g. Za vsak divizor D stopnje $\mathrm{st}D > g$ obstaja nekonstantna meromorfna funkcija $f \in \mathcal{M}(X)$, za katero je $(f) + D \geq 0$.*

Dokaz. Po Riemannovi neenakosti (II.10.10) in z upoštevanjem $g_a = g$ je

$$\dim L(D) \geq 1 - g + \mathrm{st}D \geq 1 - g + (g+1) = 2.$$

To pomeni, da prostor $L(D)$ vsebuje nekonstantno funkcijo. $\square$

Iz formule (II.11.1) v izreku 39 sledi $\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \Omega_{-D})$, zato lahko Riemann-Rochov izrek 35 zapišemo v naslednji ekvivalentni obliki.

Izrek 40 (Riemann-Roch, II. verzija). *Za vsak divizor D na kompaktni Riemannovi ploskvi X velja*

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \Omega_{-D}) = 1 - g + \mathrm{st}D. \tag{II.11.8}$$

Z uporabo izomorfizma $\Omega_{-D} \cong \mathcal{O}_{K-D}$ (II.11.8) dobimo še naslednjo verzijo Riemann-Rochove formule, kjer je K kanonični divizor na X:

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 1 - g + \mathrm{st}D. \tag{II.11.9}$$

Posledica 18. *Na vsaki kompaktni Riemannovi ploskvi X roda g obstaja holomorfna preslikava $f\colon X \to \mathbb{CP}^1$ stopnje $\leq g+1$.*

Dokaz. Izberimo točko $a \in X$ in definiramo divizor $D \in \mathrm{Div}(X)$ s predpisom

$$D(a) = g+1, \qquad D(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus \{a\}.$$

Očitno je $\mathrm{st}D = g+1$. Po posledici 17 obstaja nekonstantna funkcija $f \in L(D)$. Ta funkcija podaja holomorfno preslikavo $f\colon X \to \mathbb{CP}^1$, ki ima pol stopnje $\leq g+1$ v točki a ter nobenih drugih polov. Torej f zavzame vrednost $\infty \in \mathbb{CP}^1$ z večkratnostjo $\leq g+1$, zato je $\mathrm{st}f \leq g+1$. □

Primer 27 (**Divizorji na Riemannovi sferi**)**.** Vsak divizor D na $\mathbb{CP}^1$ je oblike

$$D = \sum_{j=1}^{k} m_j \cdot a_j - \sum_{j=1}^{l} n_j \cdot b_j + p \cdot \infty,$$

kjer so $m_j, n_j \in \mathbb{N}$ naravna števila, $p \in \mathbb{Z}$, in so $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ različne točke nosilca divizorja D v ravnini $\mathbb{C} = \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$. Naj bo f racionalna funkcija

$$f(z) = \frac{\prod_{j=1}^{l}(z-b_j)^{n_j}}{\prod_{j=1}^{k}(z-a_j)^{m_j}}.$$

Glavni divizor (f) se v afinem delu $\mathbb{C}$ ujema z divizorjem $-D$, v točki ∞ pa ima (f) vrednost $\sum_j n_j - \sum_j m_j = n - m$. Divizor $(f) + D$ ima nosilec v $\infty \in \mathbb{CP}^1$ in velja

$$(f) + D = (p+n-m) \cdot \infty = \mathrm{st}D \cdot \infty.$$

Torej je $f \in L(D)$ natanko tedaj, ko je $\mathrm{st}D \geq 0$. (V primeru $\mathrm{st}D < 0$ je $L(D) = \{0\}$.)

Naj bo $\mathrm{st}D \geq 0$. Ker je stopnja kanoničnega divizorja enaka $\mathrm{st}K_{\mathbb{CP}^1} = -2$ (glej primer 22 na str. 69), je indeks specialnosti $i_D = 0$ in Riemann-Rochova formula (II.10.1) nam pove

$$\dim L(D) = 1 + \mathrm{st}D.$$

To lahko vidimo eksplicitno: Vsaka funkcija $g \in L(D) = \{g \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)\colon (g) + D \geq 0\}$ je oblike $g = fh$, kjer racionalna funkcija $h \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ nima polov v $\mathbb{C}$, v ∞ pa ima lahko pol stopnje $\leq \mathrm{st}(D)$, kot vidimo iz pogoja $(fh) + D \geq 0$. Odtod sledi, da so funkcije $f, zf, \ldots, z^{\mathrm{st}D} f$ baza vektorskega prostora $L(D)$ nad $\mathbb{C}$. □

Primer 28 (**Divizorji na torusu**)**.** Naj bo $X = \mathbb{T} = \mathbb{C}/\Gamma$ kompleksen torus, torej ploskev roda $g = 1$. Diferencialna 1-forma dz na $\mathbb{C}$ je invariantna za translacije $z \mapsto z + c$, zato definira na $\mathbb{T}$ holomorfno 1-formo ω brez ničel. Torej je kanonični divizor $K = (\omega) = 0$ trivialen, zato je $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}$ in $L(K) \cong \mathbb{C}$. Iz (II.10.4) sledi $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = g = 1$.

Očitno je tudi $\dim H^0(X,\Omega) = 1$, saj je vsaka holomorfna 1-forma na X oblike $f\omega$ za neko holomorfno funkcijo $f \in \mathcal{O}(X)$. Ker je X kompakten, je f konstanta in zato dobimo $H^0(X,\Omega) = \{c\omega\colon c \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$.

Denimo sedaj, da je D divizor stopnje $\mathrm{st}D > 0$. Indeks specialnosti je tedaj $i_D = 0$ (glej posledico 16) in Riemann-Rochova formula se glasi

$$\dim L(D) = 1 - g + \mathrm{st}D = \mathrm{st}D.$$

Če je $D = 1 \cdot p$ za neko točko $p \in \mathbb{T}$, je pogoj $(f) + D \geq 0$ izpolnjen za vsako konstantno funkcijo. Iz $\dim L(D) = \mathrm{st}D = 1$ sledi $L(D) = \mathbb{C}$, torej ne obstaja nobena nekonstantna meromorfna funkcija na torusu s polom stopnje 1 v eni sami točki. To v resnici že vemo, saj bi taka funkcija definirala holomorfno preslikavo $\mathbb{T} \to \mathbb{CP}^1$ stopnje 1, ki bi bila po izreku o stopnji biholomorfna, protislovje.

Za divizor $D = 2 \cdot p$ je $\dim L(D) = \mathrm{st}D = 2$, torej obstaja nekonstantna meromorfna funkcija na $\mathbb{T}$ s polom stopnje 2 v p, ki je holomorfna na $\mathbb{T} \setminus \{p\}$. Tudi tako funkcijo že poznamo – Weierstrassova funkcija $\wp$ iz primera 9 na str. 14. □

Sedaj bomo dokazali še naslednjo zanimivo posledico Riemann-Rochovega izreka. Z $\mathcal{M}^{(1)}$ označujemo snop zarodkov meromorfnih 1-form.

Izrek 41. *Na vsaki kompaktni Riemannovi ploskvi X velja*

$$H^1(X,\mathcal{M}) = 0, \qquad H^1(X,\mathcal{M}^{(1)}) = 0.$$

Dokaz. Element $f \in H^1(X,\mathcal{M})$ lahko predstavimo z 1-kociklom $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{M})$ na nekem končnem odprtem pokritju $\mathcal{U}$ ploskve X. S prehodom na finejše pokritje lahko predpostavimo, da je skupno število polov funkcij $f_{i,j}$ končno. Zato obstaja divizor D stopnje $\mathrm{st}D > 2g_X - 2$, tako da je $(f_{i,j}) + D \geq 0$ na vsaki množici $U_{i,j}$. Torej je $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_D)$. Po izreku 22 na str. 60 je homomorfizem $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_D) \to H^1(X,\mathcal{O}_D)$ injektiven. Ker je $stD > 2g - 2$, je $H^1(X,\mathcal{O}_D) = 0$ po posledici 16 (str. 92). Torej je $f = 0 \in H^1(X,\mathcal{O}_D)$ in zato tudi $f = 0 \in H^1(X,\mathcal{M})$.

Za dokaz druge trditve izberemo netrivialno 1-formo $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ (trditev 12 na str. 89) in opazimo, da je $\mathcal{M} \ni f \mapsto f\omega \in \mathcal{M}^{(1)}$ izomorfizem snopov. □

Riemann-Rochov izrek lahko v ekvivalentni obliki formuliramo za holomorfne svežnje premic $E \to X$. Označimo z $\mathcal{E}$ snop zarodkov holomorfnih prerezov svežnja E. Če je $E = [D]$ za nek divizor D, je $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{E}$ (trditev 26) in $\mathrm{st}D = C_1(E)$ (posledica 10). Ker je vsak svežen premic podan z divizorjem (izrek 33), dobimo naslednjo ekvivaletno verzijo Riemann-Rochovega izreka.

Izrek 42 (Riemann-Roch za svežnje premic). *Za vsak holomorfen svežen premic E na kompaktni Riemannovi ploskvi X velja*

$$\dim H^0(X,\mathcal{E}) - \dim H^1(X,\mathcal{E}) = 1 - g + C_1(E), \tag{II.11.10}$$

kjer je $\mathcal{E}$ snop zarodkov holomorfnih prerezov E, g rod ploskve X in $C_1(E) = \langle c_1(E), [X]\rangle$ Chernovo število svežnja E.

II.12 Dokaz Serrejeve dualnosti

V tem razdelku bomo dokazali izrek 39 o Serrejevi dualnosti. Tudi v tem dokazu bomo sledili monografiji Forster [7]. Dokaz vsebuje naslednje glavne korake:

(1) Homomorfizem snopov (s produktom na bilkah)

$$\Omega_{-D} \times \mathcal{O}_D \to \Omega, \qquad (\omega, f) \mapsto f\omega$$

inducira bilinearno preslikavo

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \Omega).$$

(2) Na prostoru $H^1(X, \Omega)$ definiramo $\mathbb{C}$-linearen funkcional

$$\mathrm{Res} : H^1(X, \Omega) \longrightarrow \mathbb{C} \tag{II.12.1}$$

kot vsoto residuov meromorfnih 1-form $(\omega_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ v koverigi, ki razcepi dani kohomološki razred v $H^1(X, \Omega)$.

(3) Tako dobljeno bilinearno parjenje

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \Omega) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathbb{C} \tag{II.12.2}$$

je neizrojeno. Odtod sledi, da je vsak od prostorov $H^0(X, \Omega_{-D})$ in $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ izomorfen dualu drugega prostora.

Korak (1). Izberemo odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ploskve X, tako da so vse množice U_i in $U_{i,j} = U_i \cap U_j$ enostavno povezane, torej homeomorfne disku. Po Lerayevem izreku (izrek 22 na str. 60) tedaj velja

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D), \qquad H^1(X, \Omega) \cong H^1(\mathcal{U}, \Omega).$$

Za vsak kocikel $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$ in formo $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ je produkt $(f_{i,j}\omega) \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega)$ 1-kocikel na $\mathcal{U}$ z vrednostmi v snopu Ω zarodkov holomorfnih 1-form. Očitno je ta kocikel trivialen (korob) natanko tedaj, ko je kocikel $(f_{i,j})$ trivialen v $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$.

Korak (2). Sedaj bomo definirali $\mathbb{C}$-linearen funkcional (II.12.1). Oglejmo si kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov nad X:

$$0 \longrightarrow \Omega \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{d=\overline{\partial}} \mathcal{E}^{1,1} \longrightarrow 0.$$

Pri tem je ι naravna vložitev snopa Ω v snop $\mathcal{E}^{1,0}$ zarodkov gladkih $(1,0)$-form, $\mathcal{E}^{1,1} = \mathcal{E}^2$ pa je snop zarodkov gladkih 2-form na X (glej §I.15). Na snopu $\mathcal{E}^{1,0}$ je $d = \overline{\partial}$, ker na Riemannovi ploskvi ni netrivialnih $(2,0)$-form.

Ker sta snopa $\mathcal{E}^{1,0}$ in $\mathcal{E}^{1,1}$ fina, je zgornje eksaktno zaporedje aciklična resolventa snopa Ω in po Lerayevem izreku (izrek 21 na str. 60) dobimo Dolbeaultov izomorfizem

$$H^1(X,\Omega) \cong \mathcal{E}^2(X)/d(\mathcal{E}^{1,0}(X)) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_X \in \mathbb{C}. \tag{II.12.3}$$

Zadnja preslikava v zaporedju je definirana kot integral 2-forme po ploskvi X. Ker je X sklenjena, velja po Stokesovem izreku $\int_X d\alpha = 0$ za poljubno 1-formo α na X.

Oglejmo si definicijo funkcionala $\mathrm{Res}\colon H^1(X,\Omega) \to \mathbb{C}$ bolj eksplicitno. Naj bo $\mathcal{U}$ pokritje X kot v točki (1). Vsak element grupe $H^1(X,\Omega)$ je podan z 1-kociklom $(\omega_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U},\Omega)$. Naj bo (χ_i) gladka particija enote, podrejena pokritju $\mathcal{U}$; torej $\mathrm{supp}(\chi_i) \Subset U_i$ in $\sum_i \chi_i \equiv 1$. Definiramo gladke 1-forme $\tilde\omega_i$ na množicah U_i s predpisom

$$\tilde\omega_i = \sum_k \chi_k\, \omega_{k,i}.$$

Tedaj velja

$$\big(\tilde\omega_j - \tilde\omega_i\big)|_{U_{i,j}} = \sum_k \chi_k\, (\omega_{k,j} - \omega_{k,i}) = \sum_k \chi_k\, \omega_{i,j} = \omega_{i,j}.$$

Torej je koveriga $(\tilde\omega_i) \in Z^0(\mathcal{U},\mathcal{E}^{1,0})$ razcep kocikla $(\omega_{i,j})$ v snopu $\mathcal{E}^{1,0}$. Ker so razlike $\tilde\omega_j - \tilde\omega_i$ holomorfne na presekih $U_{i,j} = U_i \cap U_j$, dobimo s predpisom

$$\theta|_{U_i} = \overline\partial\, \tilde\omega_i = d\tilde\omega_i \quad \text{na } U_i \tag{II.12.4}$$

gladko 2-formo na X. Sedaj definiramo

$$\mathrm{Res}(\omega_{i,j}) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_X \theta \in \mathbb{C}.$$

Ni težko preveriti, da je vrednost odvisna le od kohomološkega razreda $[(\omega_{i,j})] \in H^1(X,\Omega)$.

Sedaj si bomo ogledali še drugo definicijo tega funkcionala. Ker je $H^1(X,\mathcal{M}) = 0$ in zato $H^1(\mathcal{U},\mathcal{M}) = 0$ (glej izrek 41 na str. 94), obstaja razcep

$$\omega_{i,j} = \omega_j - \omega_i, \qquad \omega_i \in \mathcal{M}(U_i). \tag{II.12.5}$$

Vsaka taka 0-koveriga $(\omega_i) \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{M}^{(1)})$ se imenuje ***Mittag-Lefflerjeva distribucija meromorfnih 1-form*** na X.

S prehodom na finejše pokritje lahko prepostavimo, da je skupna množica singularnosti (polov) 1-form ω_i končna. Število

$$\mathrm{Res}_a \omega_i = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \omega_i$$

po majhni pozitivno orientirani krožnici okrog točke a, ki ne omejuje drugih singularnosti ω_i, se imenuje ***ostanek*** oz. ***residuum*** forme ω_i v točki a. Vsoto vseh ostankov form ω_i v dani koverigi označimo z $\mathrm{Res}(\omega_i) \in \mathbb{C}$. Ker so razlike $\omega_j - \omega_i$ holomorfne, imata obe formi isti ostanek v vsaki točki iz $U_{i,j}$; vsak ostanek štejemo samo enkrat v vsoti $\mathrm{Res}(\omega_i)$.

Lema 3. *Naj bo* $(\omega_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega)$ *nek 1-kocikel holomorfnih* 1*-form,* $(\omega_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ 0*-koveriga, ki zadošča (II.12.5), in* $\theta \in \mathcal{E}^2(X)$ *predstavnik razreda* $[(\omega_{i,j})] \in H^1(X, \Omega)$ *v smislu Dolbeaultovega izomorfizma (II.12.3). Tedaj velja*

$$\mathrm{Res}(\omega_i) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_X \theta.$$

Dokaz. Lahko vzamemo, da je gladka 2-forma θ definirana s predpisom (II.12.4). Ploskev X trianguliramo na končno mnogo 2-simpleksov (trikotnikov) $X = \bigcup_{k=1}^m D_k$, tako da je $D_k \subset U_i$ za nek $i = i(k)$ in nobena singularnost meromorfnih 1-form ω_i ne leži na nobenem od robov bD_k. Po Stokesov izreku velja

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_X \theta = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{D_k} d\,\tilde{\omega}_{i(k)} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{bD_k} \tilde{\omega}_{i(k)}.$$

Iz identitet

$$\tilde{\omega}_j - \tilde{\omega}_i = \omega_{i,j} = \omega_j - \omega_i \quad \text{na } U_{i,j}$$

sledi obstoj 1-forme τ na X, ki je gladka razen v končno mnogo singularnostih in zadošča

$$\tau|_{U_i} = \tilde{\omega}_i - \omega_i \qquad \forall U_i \in \mathcal{U}.$$

Ker je forma τ nesingularna na uniji robov bD_k, dobimo iz prejšnje formule

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_X \theta = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{bD_k} \omega_{i(k)} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{bD_k} \tau.$$

Druga vsota na desni strani je enaka nič, saj integriramo po vsaki od robnih krivulj bD_k dvakrat in to v nasprotnih smereh. Integral $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{bD_k} \omega_{i(k)}$ je enak vsoti ostankov meromorfne forme ω_i po vseh točkah iz (notranjosti) D_k. Desna stran je torej enaka številu $\mathrm{Res}(\omega_i) \in \mathbb{Z}$. □

S tem smo definirali parjenje (II.12.2), ki inducira $\mathbb{C}$-linearni homomorfizem

$$\iota_D \colon H^0(X, \Omega_{-D}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D)^*, \qquad \iota_D(\omega) = \mathrm{Res}(\omega \cdot\,). \tag{II.12.6}$$

Lema 4. *Linearna preslikava* ι_D *(II.12.6) je injektivna.*

Dokaz. Naj bo $0 \neq \omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$. Poiskati želimo tak element $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$, da bo $\langle \omega, \xi \rangle = \mathrm{Res}(\omega\xi) \neq 0$.

Izberimo točko $a \in X$, v kateri je $D(a) = 0$. (To velja za vsako točko izven končnega nosilca divizora D.) Izberemo holomorfno koordinato $z \colon U_0 \to \mathbb{C}$ na odprti okolici $U_0 \subset X$ točke a, da je $z(a) = 0$ in $D|_{U_0} = 0$. (Slednje pomeni, da je $U_0 \cap \operatorname{supp} D = \emptyset$.) Na U_0

je $\omega = f(z)\,dz$ za neko funkcijo $f \in \mathcal{O}^*(U_0)$. Naj bo $U_1 = X \setminus \{a\}$ in $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$. Definirajmo meromorfno 1-koverigo $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ s predpisom

$$f_0(z) = \frac{1}{zf(z)} \quad (z \in U_0), \qquad f_1 = 0 \ \text{ na } U_1.$$

Tedaj je produkt

$$\omega\eta = (\omega f_0, \omega f_1) = \left(\frac{dz}{z}, 0\right) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^{(1)})$$

Mittag-Lefflerjeva distribucija meromorfnih 1-form, za katero velja

$$\mathrm{Res}(\omega\eta) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z|=\epsilon} \frac{dz}{z} = 1.$$

Kohomološki razred $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$, ki ga določa 1-kocikel

$$\delta(\eta) = (f_1 - f_0)|_{U_{0,1}} = -\frac{1}{zf(z)},$$

torej zadošča $\langle \omega, \xi \rangle = 1$. □

Sedaj nas čaka težji del naloge, to je dokaz surjektivnosti preslikave (II.12.6). V ta namen potrebujemo vrsto pomožnih rezultatov.

Lema 5. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev. Obstaja število $k_0 \in \mathbb{Z}$, tako da za vsak divizor D na X velja*

$$\dim H^0(X, \Omega_D) \geq \mathrm{st}D + k_0.$$

Dokaz. Izberemo poljubno netrivialno 1-formo $\omega_0 \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ in označimo s $K = (\omega_0)$ prirejeni kanoničen divizor. Tedaj je $\Omega_D \cong \mathcal{O}_{D+K}$ (glej (II.11.3)) in zato

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \Omega_D) &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+K}) \\ &= \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D+K}) + \mathrm{st}(D+K) + 1 - g_X \\ &\geq \mathrm{st}D + (1 - g_X + \mathrm{st}K). \end{aligned}$$

Trditev torej velja za število $k_0 = 1 - g_X + \mathrm{st}K \in \mathbb{Z}$. □

Lema 6. *Za vsak par divizorjev $D' \leq D$ na X obstaja komutativen diagram injektivnih homomorfizmov, kjer sta ι_D in $\iota_{D'}$ preslikavi (II.12.6):*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{i^D_{D'}} & H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* \\ & & \iota_D \uparrow & & \uparrow \iota_{D'} \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_{-D}) & \xrightarrow{i^D_{D'}} & H^0(X, \Omega_{-D'}) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 \end{array} \tag{II.12.7}$$

Denimo, da $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ in $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D'})$ zadoščata pogoju

$$i^D_{D'}(\lambda) = \iota_{D'}(\omega). \tag{II.12.8}$$

Potem je $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ in $\lambda = \iota_D(\omega)$.

Dokaz. Ker je $D' \leq D$, je $\mathcal{O}_{D'}$ podsnop snopa $\mathcal{O}_D$ in imamo kratko eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{D'} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_D/\mathcal{O}_{D'} \longrightarrow 0,$$

kjer je α inkluzija. Kvocientni snop $\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_{D'}$ ima nosilec v množici $\operatorname{supp} D \setminus \operatorname{supp} D'$, zato je

$$H^k(X, \mathcal{O}_D/\mathcal{O}_{D'}) = 0 \qquad \forall k \geq 1.$$

(Za izračun lahko uporabimo pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ploskve X, tako je vsaka točka $p \in \operatorname{supp} D \setminus \operatorname{supp} D'$ vsebovana v natanko eni množici U_i; torej $p \ni U_{i,j}$ za $i \neq j$. Vsak k-kocikel na takem pokritju za $k \geq 1$ je ničeln.) Eksaktno zaporedje na kohomologiji

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_D/\mathcal{O}_{D'}) = 0$$

pokaže, da je α surjektivna. Dualni homomorfizem

$$\alpha^* = i^D_{D'} : H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \to H^1(X, \mathcal{O}^*_{D'})$$

je zato injektiven.

Naj bo $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D'})$ kot v lemi, torej $(\omega) \geq D'$. Dokažati želimo, da iz predpostavke (II.12.8) sledi $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$, torej $(\omega) \geq D$.

Recimo da to ni res. Potem obstaja točka $a \in X$, da je $D'(a) \leq \operatorname{red}_a \omega < D(a)$. Izberimo holomorfno koordinato $z \colon U_0 \to \mathbb{C}$ na neki okolici U_0 točke a, tako da je $z(a) = 0$ in sta divizorja D in D' enaka nič na $U_0 \setminus \{a\}$. Naj bo v tej koordinati $\omega(z) = f(z)\, dz$. Označimo $U_1 = X \setminus \{a\}$; potem je $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ pokritje X. Definiramo 0-koverigo $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ s predpisom

$$f_0(z) = \frac{1}{zf(z)} \quad \text{na } U_0, \qquad f_1 = 0 \quad \text{na } U_1.$$

Kocikel $\delta(\eta) = -f_0|_{U_0 \setminus \{a\}} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{D'})$ določa kohomološka razreda

$$\xi = [\delta(\eta)] \in H^1(X, \mathcal{O}_D), \qquad \xi' = [\delta(\eta)] \in H^1(X, \mathcal{O}_{D'}).$$

Ker je $\operatorname{red}_a f = \operatorname{red}_a \omega < D(a)$, je $\operatorname{red}_0(zf(z)) \leq D(a)$ in zato $\operatorname{red}_a f_0 = -\operatorname{red}_0(zf(z)) \geq -D(a)$. Torej velja $(f_0) + D \geq 0$ na U_0 in zato $\eta(f_0, f_1) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$. To pomeni, da je $\xi = [\delta(\eta)] = 0 \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$. Iz predpostavke (II.12.8) zato sledi

$$\langle \omega, \xi' \rangle = \iota_{D'}(\xi') = i^D_{D'}(\lambda)(\xi') = \lambda(\xi) = 0.$$

Po drugo strani direktno vidimo, da je $\eta\, \omega = (dz/z, 0) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ in $\operatorname{Res}(\eta\, \omega) = 1$. To protislovje dokaže trditev, da je $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$.

Enakost $\lambda = \iota_d(\omega)$ sledi sedaj iz komutativnosti diagrama v lemi. $\square$

Naj bosta $B, D \in \mathrm{Div}(X)$ poljubna divizorja. Za vsako funkcijo $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$ je preslikava

$$\mathcal{O}_{D-B} \xrightarrow{\psi\times} \mathcal{O}_D, \qquad f \mapsto \psi f$$

homomorfizem snopov. Ta inducira homomorfizme kohomoloških prostorov

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D), \qquad H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \to H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*$$

in dobimo komutativen diagram

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})* & \xrightarrow{\psi^*} & H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* \\ \iota_D \Big\uparrow & & \Big\uparrow \iota_{D'} \\ H^0(X, \Omega_{-D}) & \xrightarrow{\psi\times} & H^0(X, \Omega_{-D+B}) \end{array} \tag{II.12.9}$$

Dualna preslikava ψ^* je definirana z enačbo

$$(\psi^*\lambda)(\xi) = \lambda(\psi\xi) \qquad \forall\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*,\ \forall\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}).$$

Lema 7. *Homomorfizem* $\psi^* \colon H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^* \to H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^*$ *je injektiven za vsako funkcijo* $0 \neq \psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$.

Dokaz. Označimo $A = (\psi) \in \mathrm{Div}(X)$; torej je $A \geq -B$ in zato $D - B \leq D + A$ za poljuben divizor $D \in \mathrm{Div}(X)$. Oglejmo si zaporedje homomorfizmov snopov

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{D-B} \longrightarrow \mathcal{O}_{D+A} \xrightarrow{\psi\times} \mathcal{O}_D.$$

Na kohomologiji dobimo

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \xrightarrow{\psi^*} H^1(X, \mathcal{O}_{D+A})^* \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*.$$

Prva preslikava ψ^* je izomorfizem, druga pa je injektivna po lemi 6, ker je $D-B \leq D+A$. Njuna kompozicija je zato injektivna in lema je dokazana. □

Dokaz surjektivnosti preslikave (II.12.6). Naj bo $D \in \mathrm{Div}(X)$ in $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$. Dokazati moramo, da je $\lambda = \iota_D(\omega)$ za neko 1-formo $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$, kjer je ι_D homomorfizem (II.12.6). Lahko vzamemo $\lambda \neq 0$.

Izberimo poljubno točko $p \in X$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirajmo divizor

$$D_n = D - n\cdot p.$$

Za vsako funkcijo $0 \neq \psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{n\cdot p})$ je element $\psi^*\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ definiran z enačbo $\psi^*(\lambda) = \lambda(\psi\xi)$ za $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})$. Kot zgoraj dobimo komutativen diagram

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{\psi^*} & H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* \\ \iota_D \Big\uparrow & & \Big\uparrow \iota_{D_n} \\ H^0(X, \Omega_{-D}) & \xrightarrow{\psi\times} & H^0(X, \Omega_{-D_n}) \end{array} \tag{II.12.10}$$

Množica
$$\Lambda = \{\psi^*\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_n)^* : \psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{np})\} \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$$
je $\mathbb{C}$-linearen podprostor vektorskega prostora $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$. Ker je preslikava ψ^* injektivna po lemi 6, sledi $\dim \Lambda = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{np})$. Iz Riemannove neenakosti (posledica 11 na str. 89) dobimo

$$\dim \Lambda = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{np}) \geq \mathrm{st}(n\cdot p) + 1 - g_a = n + 1 - g_a.$$

Naj bo K kanoničen divizor na X; tedaj je $\mathcal{O}_{D+K} \cong \Omega_D$ za vsak divizor D (glej trditev 28 na str. 90). Po lemi 5 obstaja število $k_0 \in \mathbb{Z}$, tako da velja $\dim H^0(X, \Omega_D) \geq \mathrm{st}D + k_0$ za vsak divizor D. Odtod dobimo

$$\dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) = \dim H^0(X, \Omega_{-D+n\cdot p+K}) \geq -\mathrm{st}D + n + \mathrm{st}K + k_0 = n + k_1,$$

kjer je $k_1 = -\mathrm{st}D + \mathrm{st}K + k_0$. Izberimo $n \in \mathbb{N}$ dovolj velik, tako da je $\mathrm{st}D_n = \mathrm{st}D - n < 0$. tedaj je $H^0(X, \mathcal{O}_{D_n}) = 0$ in Riemann-Rochov izrek 37 (str. 87) nam da

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n}) = g_a - 1 - \mathrm{st}D_n = n + k_2,$$

kjer je $k_2 = g_a - 1 - \mathrm{st}D$. S primerjavo zgornjih treh (ne)enakosti dobimo za vsak dovolj velik $n \in \mathbb{N}$ oceno

$$\dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) + \dim \Lambda > \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*.$$

Za tak n obstaja torej funkcija $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{np})$ in 1-forma $\omega_0 \in H^0(X, \Omega_{-D_n})$, da je

$$\psi^*\lambda = \iota_{D_n}(\omega_0) \in H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*.$$

Naj bo $D' = D_n - (\psi) \in \mathrm{Div}(X)$. Iz zgornje enakosti sledi po definicije množenja s ψ

$$i^D_{D_n}(\lambda) = \iota_{D'}\left(\frac{1}{\psi}\,\omega_0\right).$$

Označimo $\omega = \frac{1}{\psi}\,\omega_0$. Iz zgornje enakosti sledi po lemi 6

$$\omega \in H^0(X, \Omega_{-D}), \qquad \lambda = \iota_D(\omega).$$

Torej je preslikava (II.12.6) surjektivna in zato izomorfizem.

Izrek 39 (Serrejev dualnostni izrek) je s tem dokazan.

Poglavje III

Riemannove ploskve in kompleksne krivulje

V tem poglavju si bomo ogledali zvezo med ***Riemannovimi ploskvami*** in ***kompleksnimi krivuljami***.

Kompleksne krivulje so kompleksno enodimenzionalni geometrijski objekti v kompleksnih mnogoterostih, ki se naravno pojavijo na več načinov; bodisi kot množica rešitev sistema holomorfnih enačb (to je, kot skupna množica ničel družine holomorfnih funkcij), bodisi kot slike holomorfnih preslikav Riemannovih ploskev v kompleksne mnogoterosti. Osrednji rezultat poglavja je ***izrek o normalizaciji kompleksne krivulje*** (izrek 66 na str. 140). V tem poglavju ga bomo podrobno dokazali le za krivulje v kompleksnih ploskvah.

Kompleksne krivulje so poseben primer ***analitičnih množic***, drugače imenovanih tudi ***analitične varietete***. Zato bomo osnovne pojme in rezultate študirali v tem splošnejšem kontekstu. Teorijo kompleksnih krivulj (in splošnejših analitičnih množic) je nemogoče razviti brez predhodne obravnave osnov teorije holomorfnih funkcij več kompleksnih spremenljivk, zato je temu posvečenih nekaj uvodnih razdelkov. Bistveno vlogo igrata ***Weierstrassov pripravljalni in delilni izrek***, ki nam omogoča dokazati, da je kolobar zarodkov holomorfnih funkcij v n kompleksnih spremenljivkah ***Noetherski Gaussov kolobar***. Ta rezultat omogoča razvoj analitične geometrije.

Ob tem si bomo ogledali tudi osnovne pojme ***afine algebraične geometrije*** in in ***afine algebraične geometrije***, ki obravnavata kompleksno algebraične množice in mnogoterosti v kompleksnih evklidskih prostorih $\mathbb{C}^n$ in projektivnih prostorih $\mathbb{CP}^n$.

III.1 Holomorfne funkcije več spremenljivk

V tem razdelku bomo obravnavali nekatere osnovne pojme teorije holomorfnih funkcij več kompleksnih spremenljivk.

Definicija 36. Naj bo Ω domena v $\mathbb{C}^n$. Funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ je ***kompleksno diferenciabilna*** (oz. $\mathbb{C}$-diferenciabilna) v točki $a \in \Omega$, če je v a realno diferenciabilna in je njen diferencial $df_a\colon \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ kompleksno linearen. Funkcija f je ***holomorfna*** na Ω, če je $\mathbb{C}$-diferenciabilna v vsaki točki $a \in \Omega$.

Množico vseh holomorfnih funkcij na domeni Ω bomo označili z $\mathcal{O}(\Omega)$. Iz definicije sledi, da je vsaka holomorfna funkcija zvezna.

Za $n = 1$ je to običajen pojem holomorfnosti. Zahteva, da je diferencial funkcije $f(z)$ v točki $z = a$ kompleksno linearen, je ekvivalentna obstoju kompleksnega odvoda

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Prav tako je ekvivalentna veljavnosti Cauchy-Riemannove (CR) enačbe

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) = 0.$$

(Tu je $z = x + \mathrm{i}y$.) V tem primeru velja tudi

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$

Naj bo sedaj $n > 1$. Fiksirajmo točko $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \Omega$. Spreminjamo samo j-to koordinato in si oglejmo funkcijo ene kompleksne spremenljivke

$$z_j \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, z_j, a_{j+1}, ..., a_n).$$

Če je f $\mathbb{C}$-diferenciabilna v točki a, potem je tudi ta funkcija $\mathbb{C}$-diferenciabilna v spremenljivki z_j v točki $z_j = a_j$. Ekvivalentno, izpolnjena je Cauchy-Riemannova enačba

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f(a_1, ..., z_j, ..., a_n) = 0 \qquad \text{(III.1.1)}$$

v točki $z_j = a_j$. Če pišemo $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, imamo

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right).$$

Pri zapisu $f = u + \mathrm{i}v$, kjer sta u in v realni funkciji, se enačba (III.1.1) prevede na Cauchy-Riemannov sistem enačb

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_j}(a) &= \frac{\partial v}{\partial y_j}(a),\\ \frac{\partial u}{\partial y_j}(a) &= -\frac{\partial v}{\partial x_j}(a).\end{aligned}$$

V splošnem je diferencial df_a v smeri vektorja $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ s komponentami $w_j = u_j + \mathrm{i}v_j$ enak

$$\begin{aligned} df_a(w) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)u_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)v_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)w_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a)\overline{w}_j \\ &= \partial f_a(w) + \bar{\partial} f_a(w). \end{aligned}$$

Prvi del

$$\partial f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)\, dz_j$$

je $\mathbb{C}$-linearen del diferenciala df_a (saj je $\mathbb{C}$-linearna funkcija spremenljivk w_j), drugi del

$$\bar{\partial} f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a)\, d\bar{z}_j$$

pa je $\mathbb{C}$-antilinearen, saj je linearna v konjugiranih spremenljivkah $\overline{w}_j$.

Odtod vidimo, da so CR enačbe izpolnjene natanko tedaj, ko je diferencial df_a enak svojemu $\mathbb{C}$-linearnemu delu:

$$df_a(w) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)w_j = \partial f_a(w).$$

Ekvivalentno, f ima Taylorjev razvoj prvega reda

$$f(a_1 + w_1, \ldots, a_n + w_n) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)w_j + o(|w|).$$

Vektor

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(a) \right) \in \mathbb{C}^n$$

se imenuje ***kompleksni gradient*** holomorfne funkcije f v točki a.

Iz povedanega očitno sledi naslednja trditev.

Trditev 29. *Funkcija $f(z_1, \ldots, z_n)$ je holomorfna na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ natanko tedaj, ko je diferenciabilna v vsaki točki $z \in \Omega$ in velja CR sistem enačb*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv 0 \quad \text{na } \Omega, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Neposredno iz definicije sledi, da je vsaka zožitev $z_j \mapsto f(a_1, ..., z_j, ..., a_n)$ holomorfne funkcije $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ spet holomorfna funkcija ene spremenljivke na definicijskem območju. V obratni smeri pa bomo dokazali naslednji izrek, ki pove, da iz separatne holomorfnosti ter zveznosti sledi holomorfnost.

Izrek 43. *Če je $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ zvezna na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ in je za vsako točko $a \in \Omega$ in za vsak $j \in \{1, ..., n\}$ funkcija $z_j \mapsto f(a_1, ..., z_j, ..., a_n)$ holomorfna na množici $\{z_j \in \mathbb{C}\colon (a_1, ..., z_j, ..., a_n) \in \Omega\}$, potem je f holomorfna na Ω.*

Opomba. Izrek velja tudi v primeru, da predpostavko 'zvezna' nadomestimo z 'lokalno omejena'. Iz osnovne analize vemo, da analogen izrek ne velja za funkcije realnih spremenljivk; te so lahko separatno gladke v posameznih spremenljivkah, a vseeno niso gladke.

Dokaz. Izrek bomo dokazali za primer $n = 2$; za poljuben $n > 1$ se dokaže podobno. Holomorfnost je lokalna lastnost, zato je dovolj obravnavati funkcije na polidisku. Naj bo P polidisk

$$P = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\colon |z_1 - a_1| < r_1, |z_2 - a_2| < r_2\},$$

tako da je $\overline{P} \subset \Omega$. Zožitev $f|_P$ bomo predstavili s Cauchyjevo integralno formulo.

Fiksirajmo točko $z = (z_1, z_2) \in P$. Funkcija $z_1 \mapsto f(z_1, z_2)$ je holomorfna na okolici diska $\{z_1 \in \mathbb{C}\colon |z_1 - a_1| \leq r_1\}$, zato velja Cauchyjeva reprezentacijska formula

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1}\, d\zeta_1. \tag{III.1.2}$$

Sedaj fiksiramo točko ζ_1 na krožnici $|\zeta_1 - a_1| = r_1$. Funkcija $\zeta_2 \mapsto f(\zeta_1, \zeta_2)$ je holomorfna na okolici diska $\{|\zeta_2 - a_2| \leq r_2\}$, zato velja Cauchyjeva formula

$$f(\zeta_1, z_2) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta_2 - a_2| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2}\, d\zeta_2. \tag{III.1.3}$$

Enačbo (III.1.3) vstavimo v (III.1.2) in dobimo ***Cauchyjevo reprezentacijsko formulo Cauchyjeva reprezentacijska formula*** za holomorfne funkcije na bidisku:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \iint\limits_{\substack{|\zeta_1 - a_1| = r_1 \\ |\zeta_2 - a_2| = r_2}} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1\, d\zeta_2. \tag{III.1.4}$$

V dokazu smo uporabili le zveznost f na $\overline{P}$ in separatno holomorfnost v P. □

Če Cauchyjevo jedro v (III.1.4) razvijemo v geometrijsko vrsto okrog točke (a_1, a_2), dobimo

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 - a_1)^k}{(\zeta_1 - a_1)^{k+1}} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z_2 - a_2)^s}{(\zeta_2 - a_2)^{s+1}}.$$

Enačba (III.1.4) se s pomočjo členske integracije vrste prepiše v

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k,s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \iint\limits_{\substack{|\zeta_1 - a_1| = r_1 \\ |\zeta_2 - a_2| = r_2}} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2}{(\zeta_1 - a_1)^{k+1}(\zeta_2 - a_2)^{s+1}} \right) (z_1 - a_1)^k (z_2 - a_2)^s.$$

Dobili smo torej razvoj holomorfne funkcije v potenčno vrsto dveh spremenljivk. Vrsta konvergira absolutno in enakomerno na vsaki kompaktni podmnožici v polidisku P.

Analogno dobimo za holomorfno funkcijo $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ razvoj v potenčno vrsto v okolici poljubne točke $a = (a_1, \ldots, a_n)$:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} c_{k_1, \ldots, k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} c_k (z - a)^k. \qquad \text{(III.1.5)}$$

Tako kot v eni spremenljivki vidimo, da vrsta konvergira na vsakem polidisku $P \subset \Omega$ s središčem v točki a.

Iz lokalnega razvoja v potenčno vrsto sledijo razne druge lastnosti holomorfnih funkcij, podobno kot v eni spremenljivki. Npr., vsaka holomorfna funkcija je gladka, ima parcialne odvode vseh redov po posameznih spremenljivkah in vsi njeni odvodi so spet holomorfne funkcije na domeni Ω, na kateri je f holomorfna. Parcialni odvodi f v točki a se izražajo s koeficienti vrste (III.1.5):

$$\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}}(a) = k_1! \ldots k_n!\, c_{k_1, \ldots, k_n}. \qquad \text{(III.1.6)}$$

To vidimo s členskim odvajanjem vrste (III.1.5), pri čemer na koncu vstavimo $z = a$.

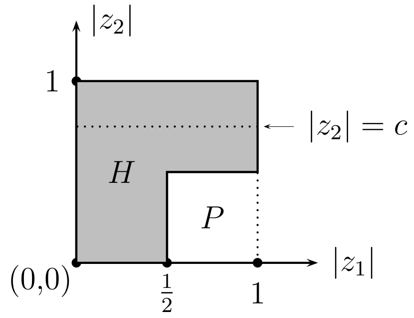
Iz elementarne analize funkcij ene kompleksne spremenljivke je znano, da na vsaki domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ obstaja holomorfna funkcija $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, ki je singularna v vsaki robni točki $p \in \partial\Omega$, to je, f nima analitičnega nadaljevanja na nobeno okolico točke p. Ena od možnih konstrukcij take funkcije je s pomočjo Weierstrassovega izreka o ničlah holomorfne funkcije. Naj bo $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ diskretno zaporedje v Ω (torej brez stekališča v Ω), tako da je vsaka točka $p \in \partial\Omega$ njegovo stekališče. Po Weierstrassovem izreku obstaja nekonstantna holomorfna funkcija $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, ki ima ničle v točkah a_j. Ker so ničle holomorfne funkcije izolirane, se f ne more holomorfno razširiti v okolico nobene robne točke $p \in \partial\Omega$.

Pri funkcijah večih kompleksnih spremenljivk pa pride do povsem novega fenomena ***simultanega analitičnega nadaljevanja analitično nadaljevanje*** na neko večje območje. To lepo vidimo na naslednjem primeru, ki ga je opazil F. Hartogs leta 1906.

Izrek 44. *Naj bo H* ***Hartogsova figura*** *(glej sliko III.1):*

$$H = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1| < 1/2, |z_2| < 1\} \cup \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1| < 1, 1/2 < |z_2| < 1\}.$$

Potem za vsako holomorfno funkcijo $f \colon H \to \mathbb{C}$ obstaja (natanko ena) holomorfna funkcija $F \colon P(1,1) = \{|z_1| < 1, |z_2| < 1\} \to \mathbb{C}$, tako da je $F|_H = f$.



Slika III.1: Hartogsova figura v bidisku

Dokaz. Izberemo število c, $1/2 < c < 1$. Definirajmo funkcijo $F\colon P(1,c) \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta|=c} \frac{f(z_1,\zeta)}{\zeta - z_2}\, d\zeta.$$

Ker je to Cauchyjev integral funkcije $z_2 \mapsto f(z_1, z_2)$ na disku $\{|z_2| \leq c\}$, je F holomorfna v spremenljivki z_2 na disku $\{|z_2| < c\}$. Velja tudi

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta|=c} \frac{\partial f(z_1,\zeta)/\partial \bar{z}_1}{\zeta - z_2}\, d\zeta = 0,$$

zato je F holomorfna tudi v spremenljivki z_1 na disku $\{|z_1| < 1\}$. Torej je F holomorfna kot funkcija dveh spremenljivk na bidisku $P(1,c)$.

Naj bo sedaj $|z_1| < 1/2$. Disk $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_2| \leq c\}$ leži v domeni H, na kateri je f holomorfna. Za tak z_1 sledi po Cauchyjevi formuli $F(z_1, z_2) = f(z_1, z_2)$. To velja na odprti množici $|z_1| < 1/2$, $|z_2| < c$. Torej je F holomorfna na $P(1,c)$ in $F = f$ na $P(1/2, c)$. Iz principa identičnosti sledi, da je $F = f$ na $H \cap P(1,c)$. Skupaj torej f in F definirata holomorfno funkcijo na uniji $P = H \cup P(1,c)$. $\square$

Fenomen simultanega analitičnega nadaljevanja holomorfnih funkcij več spremenljivk, ki smo ga videli na primeru Hartogsove figure, je odprl eno najpomembnejših vprašanj v kompleksni analizi v prvi polovici 20. stoletja: Kako geometrijsko karakterizirati domene $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, ki so ***domene holomorfnosti***. Slednje pomeni, da obstaja na Ω holomorfna funkcija, ki se ne da analitično nadaljevati preko nobene robne točke (niti lokalno, in niti kot večlična holomorfna funkcija). To je t.i. ***Levijev problem***, ki ga je rešil japonski matematik ***Kiyoshi Oka*** leta 1942. (Dokaz je podal najprej za $n = 2$, leta 1953 pa je bil problem rešen za poljuben $n > 1$). Preprosto je npr. videti, da je vsaka konveksna odprta množica v $\mathbb{C}^n$ domena holomorfnosti. (Tudi vsaka domena v $\mathbb{C}$ je domena holomorfnosti.)

Karakterizacija Oke je s pomočjo geometrijskega pojma ***psevdokonveksnosti***. V resnici obstaja več različnih pojmov psevdokonveksnosti, ki pa se vse med seboj ekvivalentne. Eden o teh pojmov psevdokonveksnosti uporablja ***plurisubharmonične funkcije***.

Spomnimo, da je realna funkcija $\rho(z)$ kompleksne spremenljivke $z = x + \mathrm{i}y$ ***subharmonična***, če ima nenegativen ***Laplaceov operator***:

$$\Delta\rho = \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial\bar{z}} \geq 0.$$

Definicija 37. Funkcija $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}$ na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ se imenuje ***plurisubharmonična***, če je za vsako točko $a \in \Omega$ in vsak vektor $v \in \mathbb{C}^n$ funkcija $\zeta \to \rho(a + \zeta v)$ subharmonična na svoji domeni $\{\zeta \in \mathbb{C}\colon a + \zeta v \in \Omega\}$. Funkcija ρ je ***plurisuperharmonična***, če je $-\rho$ plurisubharmonična. Funkcija ρ je ***pluriharmonična***, če je hkrati plurisuperharmonična in plurisubharmonična (ekvivalentno, obe funkciji $\pm\rho$ sta plurisubharmonični).

Preprosto je preveriti, da je ρ plurisubharmonična v točki $a \in \Omega$ natanko tedaj, ko je Hermitska kvadratična forma

$$H_\rho(a)(v) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\bar{z}_k} v_j\bar{v}_k \geq 0$$

nenegativno definitna na prostoru $v \in \mathbb{C}^n$. Ta forma se imenuje ***kompleksna Hessejeva forma***, ali tudi ***Levijeva forma***, funkcije ρ. Funkcija ρ je ***strogo plurisubharmonična***, če je njena Levijeva forma strogo pozitivno definitna:

$$H_\rho(a)(v) > 0, \qquad 0 \neq v \in \mathbb{C}^n.$$

Primer 29. Ogledali si bomo nekaj preprostih primerov plurisubharmoničnih funkcij.

1. Lahko je videti, da je za vsako holomorfno funkcijo $f(z)$ funkcija $|f(z)|^2$ plurisubharmonična, funkcija $\log|f(z)|$ pa je plurisubharmonična na množici $f \neq 0$.

2. Vsota dveh (strogo) plurisubharmoničnih funkcij je spet (strogo) plurisubharmonična, saj se Levijeve forme med seboj seštevajo. Produkt $c\rho$ (strogo) plurisubharmonične funkcije ρ s pozitivno realno konstanto $t > 0$ je spet (strogo) plurisubharmonična. Razlika, produkt ali kvocient plurisubharmoničnih funkcij pa v splošnem niso plurisubharmonične.

3. Če so $f_1, \ldots, f_m$ holomorfne funkcije, je $\sum_{j=1}^{m} |f_j|^2$ plurisubharmonična; ta funkcija je strogo plurisubharmonična v točkah, kjer kompleksni gradienti ∇f_j napenjajo ves tangentni prostor.

4. Funkciji $||z||^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2$ in $\log(1 + ||z||^2)$ sta strogo plurisubharmonični na $\mathbb{C}^n$.

Funkcija $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je pluriharmonična natanko tedaj, ko je za vsako točko $a \in \Omega$ in vektor $v \in \mathbb{C}^n$ funkcija $\mathbb{C} \ni \zeta \to \rho(a + \zeta v)$ harmonična na svoji domeni $\{\zeta \in \mathbb{C}\colon a + \zeta v \in \Omega\}$. Harmonična funkcija ene kompleksne spremenljivke je lokalno realni del neke holomorfne funkcije. Podobno velja tudi za več spremenljivk:

Izrek 45. *Vsaka pluriharmonična funkcija* $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *je lokalno na* Ω *(v majhni okolici poljube točke) enaka* $\rho = \Re f$, *kjer je* f *neka holomorfna funkcija.*

Spomnimo se, da se zvezna funkcija $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}$ imenuje ***funkcija izčrpanja***, če je podnivojnica $\{z \in \Omega\colon \rho(z) \le c\}$ kompaktna za vsak $c \in \mathbb{R}$. Ekvivalentno, če gre $z \to \partial\Omega$, gre $\rho(z) \to +\infty$.

Definicija 38. Domena $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je ***psevdokonveksna***, če obstaja gladka plurisubharmonična funkcija izčrpanja.

Če plurisubharmonični funkciji izčrpanja ρ dodamo kakšno strogo plurisubharmonično funkcijo izčrpanja τ na $\mathbb{C}^n$, dobimo strogo plurisubharmonično funkcijo izčrpanja $\rho + \tau$ domene Ω. Npr., za vsako plurisubharmonično funkcijo $\rho(z)$ je funkcija $\widetilde{\rho}(z) = \rho(z) + ||z||^2$ strogo plurisubharmonična na svoji domeni. Podobno velja za funkcijo $\rho(z) + \log(1 + ||z||^2)$.

Izrek 46. (K. Oka, 1942) *Domena* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *je domena holomorfnosti natanko tedaj, ko je psevdokonveksna.*

Za več informacij o tej temi glej standardno literaturo s področja kompleksne analize v $\mathbb{C}^n$. Pregled najpomembnejših rezultatov, z obilno dodatno bibliografijo, je dosegljiv v 1. in 2. poglavju monografije [8].

III.2 Holomorfne preslikave

V tem razdelku bomo prikazali osnovne definicije in pojme iz teorije holomorfnih preslikav.

Naj bo Ω domena v $\mathbb{C}^n$ s koordinatami $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Definicija 39. Preslikava $F = (f_f, \ldots, f_m)\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ je $\mathbb{C}$-diferenciabilna v točki $a \in \Omega$, če je v tej točki diferenciabilna v običajnem smislu in je njen diferencial

$$dF_a\colon \mathbb{C}^n = T_a\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m = T_{F(a)}\mathbb{C}^m$$

kompleksno linearen. F je holomorfna na Ω, če je $\mathbb{C}$-diferenciabilna v vsaki točki $a \in \Omega$.

Lahko je videti, da je preslikava $\mathbb{C}$-diferenciabilna (oz. holomorfna) natanko tedaj, kadar so take vse njene komponente. Diferencial $\mathbb{C}$-diferenciabilne preslikave je predstavljen z množenjem vektorja $w \in \mathbb{C}^n$ s kompleksno ***Jacobijevo matriko***

$$DF(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}.$$

To pomeni, da ima F Taylorjev razvoj prvega reda oblike:

$$F(a+w) = F(a) + DF(a)w + o(|w|), \qquad w \in \mathbb{C}^n = T_a\mathbb{C}^n.$$

V primeru $n = m$ se determinanta te matrike,

$$JF(a) = J_{\mathbb{C}}F(a) := \det DF(a) \in \mathbb{C}$$

imenuje kompleksna ***kompleksna Jacobijeva determinanta*** holomorfne preslikave F.

Če komponente f_j preslikave F zapišemo v obliki $f_j = u_j + \mathrm{i}v_j$ in gledamo F kot realno preslikavo z $2n$ komponentami $F = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$, lahko z računom ugotovimo, da velja naslednja zveza med realno in kompleksno Jacobijevo determinanto:

$$J_{\mathbb{R}}F = |J_{\mathbb{C}}F|^2.$$

Račun je preprost v primeru $n = 1$, torej za holomorfno funkcijo $f = u + \mathrm{i}v$, saj je tedaj realna Jacobijeva matrika preslikave $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ enaka

$$D_{\mathbb{R}}f = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & -\partial v/\partial x \\ \partial v/\partial x & \partial u/\partial x \end{pmatrix}.$$

(uporabili smo CR enačbe) in je zato

$$J_{\mathbb{R}}f = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 = |f'|^2 \geq 0.$$

V primeru $n > 1$ je račun bolj kompliciran in ga tu ne bomo naredili.

Enako kot v realnem primeru se dokaže ***verižno pravilo*** za kompleksno diferenciabilne preslikave.

Trditev 30. (Verižno pravilo) *Če je preslikava $F\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ $\mathbb{C}$-diferenciabilna v točki $a \in \Omega$ in je preslikava $G\colon \Omega' \subset \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^k$ $\mathbb{C}$-diferenciabilna v točki $F(a) \in \Omega'$, potem je njuna kompozicija $G \circ F$ $\mathbb{C}$-diferenciabilna v točki a in velja*

$$D(G \circ F)(a) = DG(F(a)) \cdot DF(a).$$

Če je $n = m = k$, velja tudi $J(G \circ F)(a) = JF(a)JG(F(a))$.

Posledica 19. *Kompozicija holomornih preslikav je spet holomorfna.*

Definicija 40. (Kompleksni) ***rang*** holomorfne preslikave F v točki a, $r = \mathrm{rang}_a F$, je enak kompleksnemu rangu njene (kompleksne) Jacobijeve matrike $DF(a)$.

Realni rang pripadajoče realne Jacobijeve matrike $D_{\mathbb{R}}F(a)$ je enak $2r = 2\,\mathrm{rang}_a F$.

Očitno je $\mathrm{rang}_a F \leq \max\{n, m\}$, če ima F n spremenljivk in m komponent. Ker je Jacobijeva matrika zvezno (celo holomorfno) odvisna od točke a, je $\mathrm{rang}_a F$ navzdol polzvezna funkcija a. Konkretno, vsaka točka $a \in \Omega$ ima odprto kolico $U \subset \Omega$, tako da je $\mathrm{rang}_z F \geq \mathrm{rang}_a F$ za vsak $z \in U$.

V splošnem pa rang ni navzgor polzvezen. Točka a se imenuje ***razvejišče*** preslikave F, če funkcija $z \mapsto \mathrm{rang}_z F$ ni zvezna v a; to je, če obstaja zaporedje točk $z_j \in \Omega$, ki konvergira v a, tako da je $\mathrm{rang}_{z_j} F > \mathrm{rang}_a F$ za vsak $j \in \mathbb{N}$.

Definicija 41. Holomorfna preslikava $F\colon \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ se imenuje ***imerzija*** v točki a, če je $\mathrm{rang}_a F = n$ (torej je $n \leq m$), in ***submerzija***, če je $\mathrm{rang}_a F = m$ (torej je $n \leq m$). Preslikava je imerzija (oz. submerzija) na Ω, če je ta pogoj izpolnjen v vsaki točki $a \in \Omega$.

Iz polzveznosti ranga sledi, da so ti pogoji izpolnjeni na neki odprti množici točk v Ω.

V primeru $n = m = \mathrm{rang}_a F$ (ekvivalentno, $JF(a) \neq 0$) se F imenuje ***lokalno biholomorfna*** v točki a. Slednji izraz upravičuje naslednji izrek.

Izrek 47. (Izrek o inverzni preslikavi) *Naj bo Ω domena v $\mathbb{C}^n$. Če ima holomorfna preslikava $F\colon \Omega \to \mathbb{C}^n$ maksimalen rang n v neki točki $a \in \Omega$, potem F preslika neko odprto okolico $U \subset \Omega$ točke a biholomorfno na okolico $F(U)$ točke $F(a)$.*

Ta izrek se dokaže enako kot v realnem primeru, v bistvu pa sledi iz standardnega izreka o inverzni preslikavi: Ob pogoju izreka je realni rang prirejene realne preslikave $F = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ v točki a enak $2n$, zato je F difeomorfizem neke odprte okolice U točke a na okolico odprto okolico $U' = F(U)$ točke $F(a)$. Diferencial inverzne preslikave $G = F^{-1}$ je predstavljen z realno Jacobijevo matriko

$$D_{\mathbb{R}}G(F(z)) = D_{\mathbb{R}}F(z)^{-1}, \qquad z \in U.$$

Ker je realna $2n \times 2n$ matrika $D_{\mathbb{R}}F(z)$ realen zapis kompleksne Jacobijeve matrike $D_{\mathbb{C}}F(z)$ (to je, predstavlja $\mathbb{C}$-linearno preslikavo), tudi inverzna matrika $D_{\mathbb{R}}F(z)^{-1}$ predstavlja $\mathbb{C}$-linearno preslikavo. To pomeni, da je lokalna inverzna preslikava $G = (F|_U)^{-1}$ v vsaki točki $w = F(z) \in U'$ kompleksno diferenciabilna, zato je holomorfna.

Za holomorfne preslikave med enako dimenzionalnimi evklidskimi prostori velja naslednji izrek, ki jedobro znan v eni spremenljivki. Dokaz v več spremenljivkah je bistveno težji.

Izrek 48. *Naj bo Ω domena v $\mathbb{C}^n$. Vsaka* injektivna *holomorfna preslikava $F\colon \Omega \to \mathbb{C}^n$ je biholomorfna na svojo sliko.*

Podobno kot pri realnih funkcijah lahko dokažemo tudi naslednji ***izrek o rangu holomorfne preslikave*** kot posledico izreka o inverzni preslikavi.

Izrek 49. *Naj bo* $F\colon \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ *holomorfna preslikava. Če je* $\operatorname{rang}_z F = k$ *konstanten (neodvisen od* z*) v neki odprti okolici točke* $a \in \Omega$*, potem obstajata biholomorfni zamenjavi koordinat* Φ *v okolici točke* a *in* Ψ *v okolici točke* $b = F(a)$*, tako da je* $\Phi(a) = 0 \in \mathbb{C}^n$*,* $\Psi(b) = 0 \in \mathbb{C}^m$ *in*

$$(\Psi \circ F \circ \Phi^{-1})(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0).$$

Naslednja dva posebna primera sta posebej pomembna:

- Če je $n < m$ in je F imerzija v točki a, jo lahko z lokalnimi zamenjavami koordinat na domeni in kodomeni spremenimo v modelno imerzijo (linearno vložitev)
$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^m.$$
- Če je $n > m$ in je F submerzija v točki a, jo lahko z lokalnimi zamenjavami koordinat na domeni in in kodomeni spremenimo v modelno submerzijo (linearno projekcijo)
$$(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_m).$$

V primeru $n > m = k$ (submerzija) dobimo naslednji poseben primer izreka o rangu.

Izrek 50 (Izrek o implicitni preslikavi)**.** *Denimo da je* $n > m$ *in da holomorfna preslikava* $F = (f_1, \ldots, f_m)\colon \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ *v neki točki* $a \in \Omega$ *zadošča* $F(a) = 0$ *in*

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(a) \right)_{i,j=1,\ldots,m} \neq 0.$$

Potem ima sistem enačb $f_1(z) = 0, \ldots, f_m(z) = 0$ *v okolici točke* a *rešitev oblike*

$$z_k = g_k(z_{m+1}, \ldots, z_n), \quad k = 1, \ldots, m,$$

kjer so $g_1, \ldots, g_m$ *holomorfne funkcije v neki okolici točke* $a' = (a_{m+1}, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n-m}$ *in* $g_k(a') = a_k$ *za* $k = 1, \ldots, m$*.*

Izrek o implicitni funkciji lahko povemo v naslednji ekvivalentni obliki.

Izrek 51 (Izrek o implicitni preslikavi – II)**.** *Naj bo* $m < n$*. Denimo, da imajo holomorfne funkcije* $f_1, f_2, \ldots, f_m\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *kompleksno neodvisne gradiente* $\nabla f_j(a)$ *v neki točki* $a \in \Omega$*. Potem obstajajo* $\mathbb{C}$*-linearne funkcije* $f_{m+1}, \ldots, f_n\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$*, tako da je preslikava* $F = (f_1, \ldots, f_n)\colon \Omega \to \mathbb{C}^n$ *lokalno biholomorfna v točki* a*.*

Posledica 20. *Naj bodo* $f_1, f_2, \ldots, f_m\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfne funkcije na domeni* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *in*

$$M = \{z \in \Omega\colon f_1(z) = 0, \ldots, f_m(z) = 0\}.$$

Denimo, da so kompleksni gradienti $\nabla f_j(a)$ *linearno neodvisni v neki točki* $a \in M$*. (Torej je* $m \leq n$*.) Potem obstaja odprta okolica* $U \subset \Omega$ *točke* a *in biholomorfna preslikava* $\Phi\colon U \to U' = \Phi(U) \subset \mathbb{C}^n$*, tako da je* $\Phi(a) = 0$ *in*

$$\Phi(M \cap U) = U' \cap \left(\{0\}^m \times \mathbb{C}^{n-m}\right).$$

Pojmi kot so rang preslikave ter izreki o inverzni in implicitni preslikavi so lokalne narave in se zato direktno posplošijo na holomorfne preslikave med kompleksnimi mnogoterostmi. Na primer, če je $F\colon X \to Y$ holomorfna preslikava, je njen rang v točki $a \in X$ enak rangu ustrezne preslikave v lokalnih koordinatah. Konkretno, izberemo lokalno karto (U, ϕ) na X $(a \in U)$ ter lokalno karto (V, ψ) na Y $(F(a) \in V)$ ter definiramo

$$\operatorname{rang}_a F = \operatorname{rang}_{\phi(a)}(\psi \circ F \circ \phi^{-1}).$$

S tem se pojmi kot so imerzija in submerzija ter izrek o implicitni preslikavi posplošijo na holomorfne preslikave $X \to Y$ kompleksnih mnogoterosti.

III.3 Komplekne podmnogoterosti, imerzije, vložitve

Izrek o implicitni funkciji omogoča obravnavo kompleksnih podmnogoterosti v dani kompleksni mnogoterosti.

Definicija 42. Naj bo Z kompleksna mnogoterost dimenzije $\dim_{\mathbb{C}} Z = n$. Podmnožica $X \subset Z$ se imenuje ***kompleksna podmnogoterost*** kompleksne dimenzije m in kodimenzije $d = n - m$, če za vsako točko $a \in X$ obstaja odprta okolica $U \subset Z$ in biholomorfna preslikava $\Phi\colon U \to \Phi(U) = U' \subset \mathbb{C}^n$, tako da je $\Phi(a) = 0$ in

$$\Phi(X \cap U) = U' \cap \left(\mathbb{C}^m \times \{0\}^d\right). \tag{III.3.1}$$

Podmnogoterost X se imenuje ***zaprta podmnogoterost***, če je topološko zaprta v Z, in ***sklenjena podmnogoterost***, če je kompaktna (in brez roba).

Očitno je vsaka kompleksna podmnogoterost Z dimenzije nič diskretna podmnožica v Z, kompleksna podmnogoterost maksimalne dimenzije $m = n = \dim Z$ pa je unija povezanih komponent mnogoterosti Z.

Kompleksna podmnogoterost $X \subset Z$ kompleksne dimenzije ena se imenuje tudi ***gladka kompleksna krivulja*** v Z. Beseda 'gladka' se nanaša na to, da je X brez singularnih točk. Obravnavali bomo tudi ***kompleksne krivulje s singularnostmi*** (kompleksno analitične podmnožice kompleksne dimenzije ena).

Kompleksna podmnogoterost $X \subset Z$ čiste kompleksne *kodimenzije* ena (in dimenzije $\dim X = \dim Z - 1$) se imenuje ***kompleksna hiperploskev*** v Z. V primeru $\dim_{\mathbb{C}} Z = 2$ pojma hiperploskve in krivulje sovpadata.

Naslednja trditev sledi neposredno iz izreka o implicitni funkciji.

Trditev 31. *Podmnožica X v n-dimenzionalni kompleksni mnogoterosti Z je m-dimenzionalna kompleksna podmnogoterost natanko tedaj, ko za vsako točko $a \in X$ obstaja odprta okolica $a \in U \subset Z$ in holomorfne funkcije $f_1, \ldots, f_d \in \mathcal{O}(U)$ $(d = n - m)$ s $\mathbb{C}$-linearno neodvisnimi kompleksnimi gradienti ∇f_j, tako da velja*

$$X \cap U = \{z \in U\colon f_1(z) = 0, f_2(z) = 0, \ldots, f_d(z) = 0\}.$$

Po izreku o implicitni funkciji lahko namreč izberemo m dodatnih holomorfnih funkcij $g_1, \ldots, g_m$ v okolici točke a, ki zadoščajo pogoju $g_j(a) = 0$ za $j = 1, \ldots, m$, tako da ima holomorfna preslikava $\Phi = (g_1, \ldots, g_m, f_1, \ldots, f_d)$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$ maksimalen rang n v točki a. To pomeni, da Φ preslika neko okolico točke a biholomorfno na okolico $0 \in \mathbb{C}^n$, tako da velja pogoj (III.3.1).

Na kompleksni podmnogoterosti X (v neki kompleksni mnogoterosti Z) dobimo inducirano kompleksno strukturo tako, da vsaki biholomorfni preslikavi $\Phi\colon U \to U' \subset \mathbb{C}^n$, ki zadošča pogoju (III.3.1), priredimo karto

$$\pi \circ \Phi|_{X \cap U} \colon X \cap U \to \mathbb{C}^m$$

na X. Pri tem je je $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ koordinatna projekcija $\pi(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_m)$. Prehodne preslikave med temi kartami so biholomorfne, saj so zožitve prehodnih preslikav med kartami na Z. Torej smo s tem dobili kompleksen atlas na X, ki določa strukturo kompleksne mnogoterosti. Ta kompleksna struktura na X se imenuje ***podmnogoterostna struktura***, inducirana z inkluzijo $X \hookrightarrow Z$.

Obratno nas zanima, kdaj je slika $F(X)$ neke holomorfne preslikave $F\colon X \to Z$ kompleksnih mnogoterosti kompleksna podmnogoterost v Z. Očiten potreben pogoj je, da je F injektivna (holomorfna) imerzija. Vendar ta pogoj ni zadosten, kot lahko vidimo na naslednjem primeru.

Primer 30. Naj bo $Z = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ kompleksni torus dimenzije 2, kjer je $\mathbb{T}$ torus $\mathbb{C}/\Gamma$ po mreži Gaussovih celih števil $\Gamma = \{a + ib\colon a, b \in \mathbb{Z}\}$. Označimo s $\pi\colon \mathbb{C}^2 \to Z = (\mathbb{C}/\Gamma)^2$ kvocientno projekcijo. (To je kartezični produkt kvocientnih projekcij $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ v vsaki od obeh spremenljivk.) Pokaži, da je za vsako iracionalno število α preslikava $\mathbb{C} \ni \zeta \mapsto \pi(\zeta, \alpha\zeta) \in Z$ injektivna imerzija, katere zaloga vrednosti (injektivno imerzirana kompleksna premica) je povsod gosta v torusu Z. □

Vprašamo se, kateri dodatni pogoj nam zagotovi, da je slika $M = F(X)$ injektivne holomorfne imerzije $F\colon X \to Z$ kompleksna podmnogoterost ambientne mnogoterosti Z. Odgovor nam podaja naslednji izrek.

Izrek 52. *Naj bo $F\colon X \to Z$ injektivna holomorfna imerzija. Potem je $M = F(X)$ kompleksna podmnogoterost v Z natanko tedaj, ko je $F\colon X \to F(X)$ homeomorfizem X na sliko $F(X)$, opremljeno z relativno topologijo (to je, s topologijo podprostora topološkega prostora Z).*

Najpomembenejši in v praksi preverljiv dodatni pogoj, ki zagotovi, da je injektivna imerzija homeomorfizem na svojo sliko (in da je ta slika hkrati zaprta v kodomeni), je biti prava preslikava (glej def. 14).

Posledica 21. *Če je $F\colon X \to Z$ prava injektivna holomorfna imerzija, potem je slika $F(X)$ zaprta kompleksna podmnogoterost v Z.*

Dokazi teh trditev so analogni kot v realnem primeru, glej npr. [9].

Injektivna holomorfna imerzija F kot v izreku 52 se imenuje ***holomorfna vložitev*** mnogoterosti X v mnogoterost Z. Če je poleg tega F tudi prava preslikava, se imenuje ***prava holomorfna vložitev***.

Za gladke mnogoterosti je znan ***Whitneyev izrek***: Vsaka gladka (realno) n-dimenzionalna mnogoterost X ima pravo gladko vložitev v evklidski prostor $\mathbb{R}^{2n+1}$; torej je lahko gledamo kot gladko realno podmnogoterost $\mathbb{R}^{2n+1}$. Analogen izrek velja v kategoriji realno analitičnih mnogoterosti in preslikav. V holomorfnem primeru pa to ne velja; le redke kompleksne mnogoterosti dopuščajo pravo holomorfno vložitev v kakšen kompleksni evklidski prostor. Ena od najpreprostejših obstrukcij je kar ***princip maksimuma***:

Izrek 53. *Vsaka holomorfna funkcija na povezani kompaktni kompleksni mnogoterosti X je konstantna.*

Zato je tudi vsaka holomorfna preslikava $X \to \mathbb{C}^N$ take mnogoterosti konstantna. Splošneje, če kompleksna mnogoterost X vsebuje kakšno kompaktno povezano kompleksno podmnogoterost Y pozitivne dimenzije, potem vsaka holomorfna preslikava $F\colon X \to \mathbb{C}^N$ stisne Y v točko, torej ni injektivna.

Prisotnost kakšne kompaktne podmnogoterosti pozitivne dimenzije v X še zdaleč ni edina obstrukcija za obstoj holomorfne vložitve X v $\mathbb{C}^N$. Tudi fenomen simultanega analitičnega nadaljevanja, ki smo ga opazili na Hartogsovi figuri, onemogoči vložljivost domene v $\mathbb{C}^N$ kot zaprte podmnogoterosti.

Kompleksne mnogoterosti, ki so holomorfno vložljive v evklidske prostore, sestavljajo posebno pomemben razred, ki ga je v literaturo vpeljal Karl Stein leta 1951.

Definicija 43. Kompleksna mnogoterost X se imenuje ***Steinova mnogoterost***, če obstaja prava holomorfna vložitev $F\colon X \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ za nek $N \in \mathbb{N}$. V tem primeru obstaja prava holomorfna vložitev v $\mathbb{C}^{2\dim X+1}$ in prava holomorfna imerzija v $\mathbb{C}^{2\dim X}$.

Izkaže se, da je domena $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ Steinova mnogoterost natanko tedaj, ko je domena holomorfnosti; to je kombinacija izrekov Cartana in Thullena (1932) in Remmerta (1956). Behnke in Stein pa sta leta 1949 dokazala:

Izrek 54. *Vsaka odprta (nekompaktna) Riemannova ploskev je Steinova.*

Posledica 22. *Za vsako odprto Riemannova ploskev X obstaja prava holomorfna vložitev $X \hookrightarrow \mathbb{C}^3$ in prava holomorfna imerzija $x \to \mathbb{C}^2$ (z enostavnimi dvojnimi točkami).*

Drugače povedano, vsaka nekompaktna Riemannova ploskev brez roba je biholomorfno ekvivalentna neki zaprti kompleksni krivulji brez singularnosti v $\mathbb{C}^3$.

Vprašanje, ali se da vsaka odprta Riemannova ploskev predstaviti z gladko (vloženo) kompleksno krivuljo v $\mathbb{C}^2$, je že zelo dolgo odprto. Eden najsplošnejših rezultatov v tej smeri je naslednji:

Izrek 55. (F. Forstnerič & E. F. Wold, 2011) *Vsaka nekompaktna domena* Ω *v Riemannovi sferi z največ števno mnogo robnimi komponentami, od katerih je največ končno mnogo izoliranih točk, dopušča pravo holomorfno vložitev v* $\mathbb{C}^2$.

Po uniformizacijskem izreku He-ja in Schramma (1996) je vsaka domena Ω v zgornjem izreku konformno ekvivalentna (biholomorfna) neki ***krožni domeni*** $\mathbb{C} \setminus \cup_j \overline{\Delta}_j$, kjer so $\overline{\Delta}_j$ paroma disjunktni diski ali točke v ravnini $\mathbb{C}$.

Pomemben razred tvorijo podmnogoterosti $\mathbb{C}^n$, definirane s holomorfnimi polinomi.

Definicija 44. Podmnožica $X \subset \mathbb{C}^n$, ki je definirana s končno mnogo holomorfnimi polinomi $P_j(z) = P_j(z_1, \ldots, z_n)$ v smislu

$$X = \{z \in \mathbb{C}^n \colon P_1(z) = 0, \ldots, P_d(z) = 0\},$$

se imenuje ***afino algebraična množica***. Če je poleg tega X kompleksna podmnogoterost (torej brez singularnosti), se imenuje ***afino algebraična mnogoterost***.

Videli smo že, da se kompaktne kompleksne mnogoterosti ne da vložiti v noben kompleksen evklidski prostor. Ker je projektivni prostor $\mathbb{CP}^n$ kompakten, je naravno pričakovati, da se da vsaj nekatere take mnogoterosti holomorfno vložiti v $\mathbb{CP}^n$ za dovolj velik n.

Definicija 45. Kompaktna kompleksna mnogoterost X se imenuje ***kompleksno projektivna mnogoterost***, če obstaja holomorfna vložitev $F \colon X \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$ za nek $N \in \mathbb{N}$.

Če je X kompaktna, je vsaka preslikava $X \to \mathbb{CP}^N$ avtomatično prava. S pomočjo holomorfnih projekcij $\mathbb{CP}^N \setminus \{p\} \to \mathbb{CP}^{N-1}$ v nižje dimenzionalne projektivne prostore lahko vidimo, da ima vsaka kompleksna projektivna mnogoterost X holomorfno vložitev v projektivni prostor $\mathbb{CP}^{2\dim X+1}$.

V določenem smislu je večina kompaktnih kompleksnih mnogoterosti 'skoraj' projektivnih; to je, dopuščajo holomorfne preslikave $X \to \mathbb{CP}^N$, ki so vložitve izven neke majhne analitične podmnožice. Najpomembnejši rezultat v tej smeri je ***Kodairov vložitveni izrek***, ki ga na tem mestu ne moremo navesti, saj bi potrebovali pojem pozitivnega holomorfnega svežnja premic. Kodairov izrek med drugim implicira naslednji klasični rezultat.

Izrek 56. *Vsaka sklenjena Riemannova ploskev* X *je projektivno algebraična in dopušča holomorfno vložitev v* $\mathbb{CP}^3$ *ter holomorfno imerzijo v* $\mathbb{CP}^2$.

To pomeni, da je vsaka sklenjena Riemannovo ploskev biholomorfna neki gladki kompleksni krivulji v $\mathbb{CP}^3$, lahko pa jo predstavimo tudi kot imerzirano krivuljo z enostavnimi dvojnimi točkami v $\mathbb{CP}^2$. Znano je tudi, da veliko večino sklenjenih Riemannovih ploskev ne moremo predstaviti z gladkimi kompleksnimi krivuljami v $\mathbb{CP}^2$.

Projektivno algebraične množice in mnogoterosti bomo obravnavali bolj podrobno v §III.6.

III.4 Weierstrassov pripravljalni in delilni izrek

Zanima nas vprašanje, kako izgleda ničelna množica $\{f = 0\}$ nekonstantne holomorfne funkcije n kompleksnih spremenljivk. Pri $n = 1$ vemo, da je $\{f = 0\}$ diskretna, to je, vse njene točke so izolirane. Pri $n > 1$ lahko v regularnih točkah, kjer je $\nabla f(a) \neq 0$, uporabimo izrek o implicitni funkciji, ki pove, da lahko množico $\{f = 0\}$ predstavimo lokalno kot graf ene holomorfne funkcije $n-1$ kompleksnih spremenljivk. Ta izrek odpove v kritičnih točkah, kjer je $\nabla f(a) = 0$. Kljub temu se da množico ničel sorazmerno lepo opisati tudi v okolici kritične točke kot razvejan končnolisten holomorfen krov nad neko domeno v prostoru $\mathbb{C}^{n-1}$. Bistveno vlogo v lokalni analizi igrata Weierstrassov pripravljalni in delilni izrek, ki ju bomo dokazali v tem razdelku.

Naj bo f nekonstantna holomorfna funkcija na neki okolici izhodišča $0 \in \mathbb{C}^n$, pri čemer je $f(0) = 0$. Označimo koordinate na $\mathbb{C}^n$ z $z = (z', z_n)$, kjer je $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Z rotacijo koordinat lahko dosežemo, da ima funkcija $z_n \mapsto f(0', z_n)$ izolirano ničlo v $z_n = 0$. Izberimo majhen $r_n > 0$, tako da je $z_n = 0$ edina ničla funkcije $f(0', z_n)$ na zaprtem disku $\overline{P''} = \{|z_n| \leq r_n\}$. Po zveznosti obstaja poliradij $r' = (r_1, ..., r_{n-1}) \in (0, \infty)^{n-1}$, da je

$$f(z', z_n) \neq 0 \quad \text{na} \quad \overline{P'} \times \partial P'', \tag{III.4.1}$$

kjer je $P' = \{(z_1, ..., z_{n-1})\colon |z_j| < r_j,\ j = 1, ..., n-1\}$.

Izrek 57. (Weierstrassov pripravljalni izrek) *Naj bo f holomorfna funkcija na okolici zaprtega polidiska $\overline{P} = \overline{P}' \times \overline{P}''$, tako da je $z_n = 0$ edina ničla funkcije $f(0', z_n)$ na zaprtem disku $\overline{P''} = \{|z_n| \leq r_n\}$ in velja predpostavka (III.4.1). Naj bo $k \geq 1$ stopnja ničle funkcije $z_n \mapsto f(0', z_n)$ pri $z_n = 0$. Potem obstaja* ***specialen Weierstrassov polinom***

$$W(z', z_n) = z_n^k + c_1(z')z_n^{k-1} + \cdots + c_{k-1}(z')z_n + c_k(z'), \tag{III.4.2}$$

kjer so $c_1, ..., c_k$ holomorfne funkcije na okolici $\overline{P'}$ in je

$$c_j(0) = 0 \quad za \quad j = 1, \ldots, k, \tag{III.4.3}$$

tako da velja $f = gW$ na neki okolici $\overline{P}$, kjer je g holomorfna funkcija brez ničel na okolici polidiska $\overline{P}$. Razcep $f = gW$ te oblike je enoličen.

Od tod seveda sledi $\{f = 0\} \cap P = \{W = 0\} \cap P$.

Opomba. Izraz ***Weierstrassov polinom*** se običajno uporablja za vsak polinom oblike (III.4.2) v spremeljivki z_n z vodilnim koeficientom 1, čigar koeficienti so holomorfne funkcije ostalih spremenljivkah. Weierstrassov polinom je 'specialen' (glede na točko $0 \in \mathbb{C}^n$), če dodatno zadošča pogoju (III.4.3), to je, če velja

$$W(0', z_n) = z_n^k.$$

Opomba. Predpostavka (III.4.1) v izreku 57 je bistvena in je ne moremo izpustiti. Če izpustimo predpostavko, da je $z_n = 0$ edina ničla funkcije $f(0', z_n)$ na $\overline{P}'' = \{|z_n| \leq r_n\}$, izrek še vedno velja, le da dobimo Weierstrassov polinom (III.4.2), ki ne zadošča nujno pogoju (III.4.3), torej ni nujno specialen. V tem primeru je stopnja k polinoma W v spremenljivki z_n enaka številu ničel (šteto z algebraičnimi večkratnostmi) funkcije $z_n \mapsto f(z', z_n)$ na disku $\overline{P}''$.

Dokaz. Definirajmo funkcijo k na polidisku P' s predpisom

$$k(z') := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z_n|=r_n} \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', z_n)}{f(z', z_n)}\, dz_n, \qquad z' \in P'.$$

To je ravno ovojno število funkcije $z_n \mapsto f(z', z_n)$ na krožnici $|z_n| = r_n$. Integral je dobro definiran, ker je $f \neq 0$ na integracijski domeni. Po izreku o ostankih je $k(z')$ enako številu ničel funkcije $z_n \mapsto f(z', z_n)$ na disku P'', torej je naravno število. Iz definicije neposredno sledi tudi, da je $k(z')$ holomorfna funkcija spremenljivke $z' \in \overline{P'}$. Zato je $k(z')$ konstanta (neodvisna od točke $z' \in P'$), torej je $k(z') \equiv k(0') = k$.

Za poljuben $z' \in P'$ označimo z $a_1(z'), a_2(z'), \ldots, a_k(z') \in P''$ vse ničle funkcije $f(z', \cdot\,)$ na disku P'', pri čemer ničla stopnje d nastopa d-krat v tem zaporedju. Teh ničel ne moremo globalno na P' definirati kot enolične zvezne (ali celo holomorfne) funkcije. Oglejmo si Weierstrassov polinom

$$W(z', z_n) := \prod_{j=1}^{k} (z_n - a_j(z')) = z_n^k + c_1(z') z_n^{k-1} + \cdots + c_k(z')$$

Za vsak $m \in \mathbb{Z}_+$ definiramo funkcijo $S_m \colon P' \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$S_m(z') := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta|=r_n} \zeta^m \frac{\frac{\partial f}{\partial \zeta}(z', \zeta)}{f(z', \zeta)}\, d\zeta.$$

Izrek o ostankih pove, da je

$$S_m(z') = \sum_{j=1}^{k} a_j(z')^m.$$

Funkcije $S_1, S_2, \ldots$ so simetrični polinomi v $a_1, a_2, \ldots, a_k$, pri čemer je S_m homogen stopnje m. Tudi koeficienti $c_1, c_2, \ldots, c_k$ Weierstrassovega polinoma W so simetrični polinomi v $a_1, \ldots, a_k$. Vemo (Newton-Girardove formule): Vsak simetrični polinom v spremenljivkah $a_1, \ldots, a_k$ lahko zapišemo kot polinom v $S_1, \ldots, S_k$. Odtod sledi, da se dajo koeficienti $c_1(z'), \ldots, c_k(z')$ Weierstrassovega polinoma W izraziti kot polinomi (s konstantnimi koeficienti) v funkcijah $S_1(z'), \ldots, S_k(z')$. Ker so funkcije S_j holomorfne v $z' \in P'$, so tudi funkcije $c_j(z')$ holomorfne na P'. Torej je W zares Weierstrassov polinom.

Pri $z' = 0$ velja $a_j(0') = 0$ za vse $j = 1, \dots, k$, saj je po predpostavki $z_n = 0$ edina ničla (stopnje k) funkcije $f(0', \cdot)$ na P''. Sledi $W(0', z_n) = z_n^k$, torej je W specialen Weierstrassov polinom.

Naj bo $g(z) := f(z)/W(z)$. Trdimo, da je g holomorfna in brez ničel na P. Fiksirajmo $z' \in P'$. Po konstrukciji imata funkciji $f(z', \cdot)$ in $W(z', \cdot)$ iste ničle (z istimi večkratnostmi) na disku $\overline{P}''$. Zato je $f/W = g$ neničelna holomorfna funkcija zadnje spremenljivke na P''. Dejstvo, da je g holomorfna kot funkcija vseh spremenljivk, sledi iz Cauchyjeve formule

$$g(z', z_n) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta| = r_n} \frac{f(z', \zeta)}{W(z', \zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_n} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta| = r_n} \frac{g(z', \zeta)}{\zeta - z_n} \, d\zeta. \tag{III.4.4}$$

Da je razcep $f = gW$ enoličen, vidimo takole. Recimo, da je tudi $f = \widetilde{g}\widetilde{W}$, kjer je $\widetilde{W}$ specialen Weierstrassov polinom in je $\widetilde{g}$ holomorfna funkcija brez ničel na $\overline{P}$. Ker imata za vsak $z' \in P'$ polinoma $W(z', \cdot)$ in $\widetilde{W}(z', \cdot)$ stopnje k iste ničle in sta oba monična (z vodilnim koeficientom 1), se ujemata, $W = \widetilde{W}$. Odtod seveda sledi tudi $g = \widetilde{g}$. □

Izrek 58. (Weierstrassov delilni izrek) *Naj bo $W(z', z_n)$ specialen Weierstrassov polinom stopnje k. Za vsako holomorfno funkcijo f v okolici točke $0 \in \mathbb{C}^n$ obstajata holomorfni funkciji g, r v okolici 0, tako da velja*

$$f = gW + r, \qquad r(z', z_n) = b_1(z') z_n^{k-1} + b_2(z') z_n^{k-2} + \cdots + b_k(z'),$$

pri čemer so koeficienti $b_j(z')$ holomorfne funkcije spremenljivke z' v okolici $0' \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Dokaz. Izberimo polidisk $P = P' \times P'' \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ kot v pripravljalnem izreku. Oglejmo si Cauchyjev integral funkcije f/W v zadnji spremenljivki:

$$g(z', z_n) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\zeta \in \partial P''} \frac{f(z', \zeta)}{W(z', \zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_n}.$$

Ker je $W \neq 0$ na integracijski domeni, je g dobro definirana in holomorfna na P. Naj bo

$$\begin{aligned}
r(z', z_n) :&= f(z', z_n) - g(z', z_n) W(z', z_n) \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta| = r_n} \frac{f(z', \zeta)}{\zeta - z_n} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta| = r_n} \frac{f(z', \zeta) W(z', z_n)}{W(z', \zeta)(\zeta - z_n)} \, d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta| = r_n} \frac{f(z', \zeta)}{W(z', \zeta)} \frac{W(z', \zeta) - W(z', z_n)}{\zeta - z_n} \, d\zeta.
\end{aligned}$$

Ker je

$$\begin{aligned}
W(z', \zeta) - W(z', z_n) &= (\zeta^k + c_1(z') \zeta^{k-1} + \cdots) - (z_n^k - c_1(z') z_n^{k-1} + \cdots) \\
&= (\zeta^k - z_n^k) + (\zeta^{k-1} - z_n^{k-1}) c_1(z') + \cdots \\
&= (\zeta - z_n) Q(z', z_n, \zeta),
\end{aligned}$$

pri čemer je Q polinom v z_n stopnje največ $k-1$, sledi

$$r(z', z_n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta|=r_n} \frac{f(z',\zeta)}{W(z',\zeta)}\, Q(z', z_n, \zeta)\, d\zeta.$$

Torej je r polinom stopnje največ $k-1$ v z_n, njegovi koeficienti pa so holomorfne funkcije spremenljivke $z' \in P'$.

Preverimo še enoličnost. Iz $f = gW + r = \widetilde{g}W + \widetilde{r}$ sledi $(g - \widetilde{g})W = \widetilde{r} - r$. Ker je W polinom v z_n stopnje k, $\widetilde{r} - r$ pa polinom v z_n stopnje največ $k-1$, je ta enačba izpolnjena natanko tedaj, ko je $\widetilde{r} - r = 0$ in $g - \widetilde{g} = 0$. □

S pomočjo Weierstrassovega pripravljalnega izreka lahko dokažemo naslednjo posplošitev Riemannovega izreka o odpravljivih singularnostih, ki pove, da je množica ničel holomorfne funkcije odpravljiva singularnost za omejene holomorfne funkcije.

Izrek 59. (Riemannov izrek o odpravljivih singularnostih) *Naj bo g nekonstantna holomorfna funkcija na povezani domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ in $V = \{g = 0\}$. Vsaka holomorfna funkcija f na $\Omega \setminus V$, ki je omejena v okolici poljubne točke $a \in V$, se analitično nadaljuje preko V do holomorfne funkcije na Ω.*

Dokaz. V primeru $n = 1$ je množica V diskretna v Ω in izrek poznamo iz klasične kompleksne analize. Dokažemo ga npr. takole. Fiksirajmo točko $a \in V$ in število $r > 0$, tako da disk $\overline{D} = \{|z - a| \le r\} \subset \Omega$ ne vsebuje nobene druge točke množice V. Funkcijo f na punktiranem disku $z \in D \setminus \{a\}$ predstavimo s Cauchyevim integralom:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta - a| = \epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Tu je število $\epsilon > 0$ izbrano tako, da je $|z - a| > \epsilon$. Pri prehodu $\epsilon \to 0$ gre drugi integral na desni strani proti 0, ker je f omejena v okolici izhodišča. Torej je f predstavljena na D s Cauchyjevim integralom po ∂D in je zato holomorfna na D.

Naj bo sedaj $n > 1$. Izberimo koordinate na $\mathbb{C}^n$ tako, da je $a = 0$ in ima funkcija $z_n \mapsto g(0', z_n)$ izolirano ničlo v $z_n = 0$. Nato izberemo polidisk $P = P' \times P'' \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ okrog 0, tako da je $z_n = 0$ edina ničla funkcije $g(0', \cdot)$ na disku $P'' = \{|z_n| < r\}$ in je $g \ne 0$ na $P' \times \partial P''$. Za poljubno točko $z' \in P'$ je množica ničel funkcije $g(z', \cdot)$ na P'' končna (glej pripravljalni izrek). Iz Riemannovega izreka za $n = 1$ sledi, da se funkcija $f(z', \cdot)$ analitično nadaljuje do holomorfne funkcije na P''; zato velja Cauchyjeva formula

$$f(z', z_n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta| = r} \frac{f(z', \zeta)}{\zeta - z_n}\, d\zeta, \qquad (z', z_n) \in P.$$

Cauchyev integral na desni strani očitno definira holomorfno funkcijo na P; torej je f holomorfna na P. Ker je bila točka $a \in V$ poljubna, je izrek s tem dokazan. □

III.5 Lastnosti lokalnega kolobarja ${}_n\mathcal{O}_a$

Zanima nas struktura množice ničel $\{f = 0\}$ holomorfne funkcije n spremenljivk ali, splošneje, struktura skupne množice ničel končnega števila holomorfnih funkcij. Problem bomo najprej študirali lokalno, kasneje pa še globalno.

Naj bo f nekonstantna holomorfna funkcija v okolici $0 \in \mathbb{C}^n$, ki zadošča pogoju $f(0) = 0$. Weierstrassov pripravljalni izrek nam pove, da lahko v primerno izbranih holomorfnih koordinatah na $\mathbb{C}^n$ zapišemo f kot produkt $f = gW$ neke holomorfne funkcije g z $g(0) \neq 0$ in nekega specialnega Weierstrassovega polinoma W. Torej je $\{f = 0\} = \{W = 0\}$. S tem smo problem reducirali na študij ničelnih množic Weierstrassovih polinomov. Če razcepimi Weierstrassov polinom W na nerazcepne faktorje

$$W = W_1^{d_1} W_2^{d_2} \cdots W_m^{d_m},$$

kjer je vsak W_j (specialen) Weierstrassov polinom stopnje k_j ($\mathrm{st}W = k = \sum_{j=1}^m d_j k_j$), dobimo lokalen razcep ničelne množice na nerazcepne komponente:

$$\{W = 0\} = \bigcup_{j=1}^m \{W_j = 0\}.$$

Podobno bomo pristopili k študiju skupnih ničelnih množic več funkcij; slednjim bomo priredili ideale kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$.

Opisali bomo dva pristopa k rešitvi tega problema, najprej algebraičen (v tem razdeku), v razdelku III.8 pa še geometričen pristop. Oba opisana pristopa se smiselno dopolnjujeta in kot celota ponujata dosti boljše razumevanje kot vsak posamezen.

Za poljubno točko $a \in \mathbb{C}^n$ označimo z ${}_n\mathcal{O}_0$ ***kolobar zarodkov holomorfnih funkcij*** na $\mathbb{C}^n$ v okolici točke $0 \in \mathbb{C}^n$. Elementi tega kolobarja so torej predstavljeni s holomorfnimi funkcijami f v okolici $U = U_f \subset \mathbb{C}^n$ točke 0, pri čemer dve funkciji f in g določata isti zarodek v 0, če se f in g ujemata v neki odprti okolici izhodišča. Natančneje, ***zarodek holomorfne funkcije*** v točki $0 \in \mathbb{C}^n$ je določen s parom (U, f), kjer je U okolica točke 0 in $f \in \mathcal{O}(U)$ holomorfna funkcija na U. Pri tem je $(U, f) \sim (V, g)$, če obstaja manjša odprta okolica $0 \in W \subset U \cap V$, tako da je $f|_W = g|_W$. (Več o tem v razdelku II.1.)

Vsako holomorfno funkcijo v okolici $0 \in \mathbb{C}^n$ lahko razvijemo v potenčno vrsto

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1,\ldots,k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}, \tag{III.5.1}$$

ki konvergira v neki okolici izhodišča. (Okolica je v splošnem odvisna od funkcije.) Funkcija je v tej okolici natanko določena s Taylorjevimi koeficienti $c_{k_1,\ldots,k_n}$, ki se izražajo s parcialnimi odvodi f v točki $z = 0$ preko formule (III.1.6). S tem lahko vsak zarodek holomorfne funkcije f v 0 identificiramo s potenčno vrsto (III.5.1) v spremenljivkah $z_1, \ldots, z_n$, ki konvergira v neki okolici izhodišča. Zato pravimo kolobarju ${}_n\mathcal{O}_0$ tudi ***kolobar konvergentnih potenčnih vrst*** v n kompleksnih spremenljivkah,

$${}_n\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}.$$

Analogno označimo z ${}_n\mathcal{O}_a$ kolobar zarodkov holomorfnih funkcij v točki $a \in \mathbb{C}^n$; tega lahko enačimo s kolobarjem konvergentnih potenčnih vrst v spremenljivkah $z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n$. S pomočjo translacije koordinat dobimo izomorfizem kolobarjev ${}_n\mathcal{O}_a \cong {}_n\mathcal{O}_0$, zato zadošča študirati lastnosti kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$ v izhodišču $0 \in \mathbb{C}^n$.

Očitno je ${}_n\mathcal{O}_0$ komutativen kolobar z identičnim elementom, to je konstanta 1. ***Enote*** kolobarja so njegovi obrnljivi elementi; v našem primeru so to zarodki $f \in {}_n\mathcal{O}_0$, ki zadoščajo $f(0) \neq 0$; obratni element je tedaj podan s funkcijo $1/f$. Vse enote kolobarja sestavljajo grupo obrnljivih elementov

$${}_n\mathcal{O}_0^* = \{f \in {}_n\mathcal{O}_0 \colon f(0) \neq 0\}.$$

Od tod sledi, da je vsak ideal $I \lhd {}_n\mathcal{O}_0$ kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$ vsebovan v maksimalnem idealu

$$\mathfrak{m} = \{f \in {}_n\mathcal{O}_0 \colon f(0) = 0\} \lhd {}_n\mathcal{O}_0.$$

Vsako holomorfno funkcijo v okolici $0 \in \mathbb{C}^n$ z $f(0) = 0$ lahko lokalno zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} f(z_1, ..., z_n) &= c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n + \sum_{j,k=1}^{n} c_{j,k} z_j z_k + \cdots \\ &= z_1 h_1(z) + z_2 h_2(z) + \cdots + z_n h_n(z), \end{aligned}$$

kjer so h_j spet holomorfne funkcije na okolici 0. To pomeni, da je maksimalni ideal $\mathfrak{m} \lhd {}_n\mathcal{O}_0$ generiran z zarodki koordinatnih funkcij $z_1, \ldots, z_n$:

$$\mathfrak{m} = \langle z_1, z_2, ..., z_n \rangle.$$

Ker ima kolobar ${}_n\mathcal{O}_0$ natanko en maksimalni ideal, je ***lokalni kolobar***.

Naj bo K komutativen kolobar z identičnim elementom. K se imenuje ***Noetherski***, če je vsak ideal $I \lhd K$ končno generiran. Ekvivalentno, K je Noetherski, če je vsako naraščajoče zaporedje idealov $I_1 \lhd I_2 \lhd I_3 \lhd \cdots$ v K stacionarno.

Kolobar K je ***Gaussov kolobar***, če lahko vsak element razcepimo na nerazcepne faktorje in je faktorizacija enolična do enot in vrstnega reda natančno.

Primer 31. Oglejmo si kolobar ${}_1\mathcal{O}_0$ zarodkov holomorfnih funkcij ene spremenljivke. Vsako holomorfno funkcijo v okolici $0 \in \mathbb{C}$ lahko enolično zapišemo v obliki $f(z) = z^k g(z)$ za nek $k \in \mathbb{Z}_+$ in neko holomorfno funkcijo g z $g(0) \neq 0$. Prirejen glavni ideal je enak $(f) = (z^k)$. Za različne $k \in \mathbb{N}$ so to ravno vsi ideali kolobarja ${}_1\mathcal{O}_0$:

$${}_1\mathcal{O}_0 \supset \mathfrak{m} = \langle z \rangle \supset \langle z^2 \rangle \supset \cdots \supset \langle z^k \rangle \supset \cdots .$$

Vsak ideal je torej neka potenca maksimalnega ideala $\mathfrak{m} = \langle z \rangle$. Od tod sledi, da je vsako naraščajoče zaporedje idealov $I_1 \lhd I_2 \lhd I_3 \lhd \cdots \lhd {}_1\mathcal{O}_0$ stacionarno; to je, kolobar ${}_1\mathcal{O}_0$ je Noetherski in Gaussov. V danem primeru je vsak element $f(z) = z^k g(z)$ produkt enote g in k kopij nerazcepnega elementa z. $\square$

Sedaj bomo dokazali naslednji glavni rezultat razdelka.

Izrek 60. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je kolobar ${}_n\mathcal{O}_0$ Noetherski Gaussov kolobar.*

V dokazu bomo uporabili naslednja dva klasična izreka komutativne algebre (glej npr. Zariski in Samuel [18]). Naj bo K komutativen kolobar z identičnim elementom.

- **Gaussov izrek:** Če je K Gaussov kolobar, potem je tudi kolobar polinomov $K[z]$ v eni spremenljivki (s koeficienti v K) Gaussov kolobar.
- **Hilbertov izrek:** Če je K Noetherski, potem je tudi $K[z]$ Noetherski.

Z indukcijo na n sledi, da je tudi kolobar polinomov $K[z_1, \ldots, z_n]$ v n spremenljivkah s koeficienti v K Gaussov (oz. Noetherski), če je K tak.

Dokaz. (Izreka 60) Oglejmo si naraščajoče zaporedje kolobarjev

$$\mathbb{C} = {}_0\mathcal{O} \subset \mathbb{C}[z_1] = {}_0\mathcal{O}[z_1] \subset {}_1\mathcal{O}_0 \subset {}_1\mathcal{O}_0[z_2] \subset {}_2\mathcal{O}_0 \subset {}_2\mathcal{O}_0[z_3] \subset \cdots {}_n\mathcal{O}_0.$$

Za vsak k je ${}_{k-1}\mathcal{O}_0[z_k]$ kolobar polinomov v spremenljivki z_k s koeficienti iz kolobarja ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ zarodkov holomorfnih funkcij v spremenljivkah $z_1, \ldots, z_{k-1}$.

Izrek bomo dokazali z indukcijo na n. Za $n = 0$ očitno, saj je ${}_0\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}$ obseg. V zgornjem primeru smo videli tudi, da izrek velja za $n = 1$.

Predpostavimo, da izrek velja za $n - 1$, torej da je kolobar ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Gaussov in Noetherski. Po navedenih izrekih je tudi kolobar polinomov ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ Gaussov in Noetherski. Radi bi dokazali enake lastnosti za kolobar ${}_n\mathcal{O}_0$. V ta namen bomo uporabili naslednjo lemo.

Lema 8. *Naj bo $W(z', z_n) = z_n^k + c_1(z')z_n^{k-1} + \cdots + c_k(z')$ specialen Weierstrassov polinom (torej je $c_1(0') = \cdots = c_k(0') = 0$). Potem je polinom W reducibilen v kolobarju ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ natanko tedaj, ko je reducibilen v kolobarju ${}_n\mathcal{O}_0$. Če je W reducibilen, so njegovi faktorji do enot natančno spet specialni Weierstrassovi polinomi, t.j., $W = W_1^{d_1} W_2^{d_2} \cdots W_m^{d_m}$, kjer so W_i ireducibilni v ${}_n\mathcal{O}_0$.*

Dokaz. Denimo, da je W reducibilen v kolobarju ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$, torej $W = W_1 W_2$, kjer $W_1, W_2 \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ nista enoti kolobarja. Imamo $W_j = a_j(z')z_n^{k_j} + O(z_n^{k_j - 1})$, $j = 1, 2$. S primerjavo vodilnih koeficientov v z_n dobimo $k_1 + k_2 = k$ in $a_1(z')a_2(z') = 1$ (ker je W moničen). Odtod sledi $a_1(0') \neq 0$ in $a_2(0') \neq 0$; torej sta vodilna koeficienta a_j polinomov W_j enoti kolobarja ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$. Če je $k_1 = 0$, je $W_1(z', z_n) = a_1(z')$ enota kolobarja ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ v protislovju s predpostavko; torej je $k_1 > 0$. Enako vidimo $k_2 > 0$. Torej je $W_j(0', 0) = 0$ za $j = 1, 2$, kar pomeni, da W_1 in W_2 nista enoti kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$. To pomeni, da je W reducibilen tudi v kolobarju ${}_n\mathcal{O}_0$. Če izpostavimo vodilni koeficient in pišemo $W_j(z', z_n) = a_j(z')W_j'(z', z_n)$, sta W_j' specialna Weierstrassova polinoma. Ker je $a_1a_2 = 1$, velja tudi $W = W_1W_2 = W_1'W_2'$.

Obratno, naj bo W reducibilen v kolobarju ${}_n\mathcal{O}_0$. To pomeni, da je $W = f_1f_2$, kjer $f_1, f_2 \in {}_n\mathcal{O}_0$ in $f_j(0) = 0$ za $j = 1, 2$. Ker je W_n specialen Weierstrassov polinom, je $z_n^k = W(0', z_n) = f_1(0', z_n)f_2(0', z_n)$. Odtod sledi, da je $z_n = 0$ izolirana ničla funkcij $f_j(0', \cdot)$ za $j = 1, 2$. Po Weierstrassovem pripravljalnem izreku dobimo $f_j = g_jW_j$ $(j = 1, 2)$, kjer je g_j neničelna holomorfna funkcija (g_j je enota v ${}_n\mathcal{O}_0$) in je $W_j \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ specialen Weierstrassov polinom. Torej je $W = f_1f_2 = g_1g_2W_1W_2$. Iz enoličnosti v pripravljelnem izreku sledi $g_1g_2 = 1$ in $W = W_1W_2$. □

Posledica 23. *Če je ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Gaussov kolobar, potem je tudi ${}_n\mathcal{O}_0$ Gaussov kolobar.*

Dokaz. Naj bo $f \in {}_n\mathcal{O}_0$, $f(0) = 0$, $f \neq 0$. Vemo, da lahko koordinate (z', z_n) na $\mathbb{C}^n$ izberemo tako, da je 0 izolirana ničla funkcije $f(0', \cdot)$. Po pripravljalnem izreku sledi $f = gW$, kjer je $g \in {}_n\mathcal{O}_0$ enota in je $W \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ specialni Weierstrassov polinom. Ker je ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Gaussov kolobar, je tudi ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ Gaussov. Torej obstaja razcep $W = \prod_{j=1}^n W_j^{k_j}$, kjer je vsak W_j nerazcepen specialen Weierstrassov polinom. Očitno je $\sum_{j=1}^m k_j \mathrm{st} W_j = \mathrm{st} W$. Po lemi je vsak polinom W_j nerazcepen tudi v kolobarju ${}_n\mathcal{O}_0$, torej je to tudi razcep na nerazcepne elemente v ${}_n\mathcal{O}_0$. To pomeni, da je kolobar ${}_n\mathcal{O}_0$ Gaussov. □

Dokazati moramo še, da je ${}_n\mathcal{O}_0$ Noetherski, ob predpostavki, da je ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Noetherski.

Naj bo $I \lhd {}_n\mathcal{O}_0$ nek ideal. Izberimo poljuben element $0 \neq f \in I$. Koordinate (z', z_n) na $\mathbb{C}^n$ izberimo tako, da je z_n izolirana ničla funkcije $z_n \mapsto f(0', z_n)$. Po Weierstrassovem pripravljalnem izreku sledi $f = gW$, kjer je $g \in {}_n\mathcal{O}_0$ enota in je $W \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ specialen Weierstrassov polinom. Ker je $f \in I$, je tudi $W \in I$.

Naj bo $I' := I \cap {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$; očitno je I' ideal kolobarja ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$. Ker je ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ Noetherski (po Hilbertovem izreku), ima I' končno bazo: $I' = \langle h_1, h_2, ..., h_m \rangle$.

Naj bo sedaj h poljuben element ideala I. Po delilnem izreku je $h = \phi W + r$, kjer je $\phi \in {}_n\mathcal{O}_0$ in $r \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$. Sledi $r \in I \cap {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n] = I'$; $r = \sum_{j=1}^m \alpha_j h_j$, $\alpha_j \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ za $j = 1, ..., m$. Odtod dobimo $h = \phi W + \sum_{j=1}^m \alpha_j h_j$; torej je $h \in \langle W, h_1, ..., h_m \rangle$. Ker je bil $h \in I$ poljuben, je $I = \langle W, h_1, ..., h_m \rangle$. S tem smo dokazali, da je ${}_n\mathcal{O}_0$ Noetherski. □

III.6 Algebraične in analitične množice

Lastnosti lokalnega kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$, ki smo jih dokazali v prejšnjem razdelku, omogočajo razvoj analitične geometrije.

Za motivacijo si najprej oglejmo preprostejši algebraičen primer. Vlogo lokalnega kolobarja v tem primeru igra kolobar polinomov v n kompleksnih spremenljivkah:

$$\mathbb{C}[z_1,...,z_n] = (\mathbb{C}[z_1,...,z_{n-1}])[z_n] = \mathbb{C}^{[n]}.$$

Z induktivno uporabo Gaussovega in Hilbertovega izreka (glej prejšnji razdelek) vidimo, da je ta kolobar Gaussov in Noetherski.

Afina algebraična geometrija je študij ***algebraičnih varietet*** (ali ***afino algebraičnih množic***) v evklidskih prostorih $\mathbb{C}^n$. To so množice oblike

$$V = \{z \in \mathbb{C}^n \colon P_j(z) = 0,\ j = 1,...,d\},$$

kjer so $P_j \in \mathbb{C}[z_1,...,z_n]$ holomorfni polinomi.

Bistveno vlogo igra korespondenca med ideali v kolobarju $\mathbb{C}[z_1,...,z_n]$ in algebraičnimi množicami $V \subset \mathbb{C}^n$, ki jo bomo sedaj opisali.

Naj bo $I \lhd \mathbb{C}[z_1,...,z_n]$ poljuben ideal v kolobarju polinomov. Ker je ta kolobar Noetherski, ima I končno bazo, recimo $P_1,...,P_d$. Idealu I priredimo afino algebraično množico

$$V(I) := \{z \in \mathbb{C}^n \colon P_j(z) = 0,\ j = 1,...,d\}. \tag{III.6.1}$$

Množica $V(I)$ je neodvisna od izbire baze ideala. Če je namreč tudi $I = \langle Q_1,\dots,Q_m\rangle$, se vsak polinom P_i izraža v obliki

$$P_i = \sum_{j=1}^{m} Q_j R_j, \qquad R_j \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_n],\ j = 1,\dots,m.$$

Obratno, vsak polinom Q_j je kombinacija polinomov P_i s koeficienti iz $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$. Odtod sledi, da obe množici polinomov določata isto ničelno množico (III.6.1).

Obratno, vsaki algebraični množici $V \subset \mathbb{C}^n$ priredimo ideal

$$I(V) := \{P \in \mathbb{C}[z_1,...,z_n] \colon P|_V \equiv 0\} \lhd \mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]. \tag{III.6.2}$$

Označimo z $I_1 + I_2$ vsoto in z $I_1 \cdot I_2$ produkt idealov $I_1, I_2 \lhd K$ v nekem komutativnem kolobarju K. Vsota je enaka

$$I_1 + I_2 = \{P_1 + P_2 \colon P_1 \in I_1,\ P_2 \in I_2\}.$$

Če je $I_1 = \langle P_1,\dots,P_k\rangle$ in $I_1 = \langle Q_1,\dots,Q_m\rangle$, potem je produkt $I_1 \cdot I_2$ generiran z vsemi produkti $P_i Q_j$ $(i = 1,\dots,k,\ j = 1,\dots,m)$.

Za vsak ideal $I \lhd K$ je njegov ***radikal*** enak

$$\sqrt{I} = \{P \in K \colon P^k \in I \text{ za nek } k \in \mathbb{N}\}.$$

Očitno velja

$$I \subset \sqrt{I}, \qquad \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}.$$

Ideal $I \lhd K$ se imenuje ***radikalno zaprt***, če je $I = \sqrt{I}$.

Primer 32. Ideal $I = I(V) \lhd \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ poljubne algebraične varietete $V \subset \mathbb{C}^n$ je radikalno zaprt.

Dejansko, polinom $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ je element radikala $\sqrt{I(V)}$, če je $P^k|_V = 0$ za nek $k \in \mathbb{N}$; tedaj je tudi $P|_V = 0$, torej $P \in I(V)$. □

Trditev 32. *Korespondenca med ideali $I \lhd \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ v kolobarju polinomov in algebraičnimi varietetami $V \subset \mathbb{C}^n$ zadošča naslednjim lastnostim:*

1. $V_1 \subset V_2 \Longrightarrow I(V_1) \supset I(V_2)$.
2. $I_1 \subset I_2 \Longrightarrow V(I_1) \supset V(I_2)$.
3. $V = V(I(V))$ *za vsako varieteto* $V \subset \mathbb{C}^n$.
4. $I \subset I(V(I))$ *za vsak ideal* $I \lhd \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$.
5. $I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2) \supset I(V_1) \cdot I(V_2)$, *pri čemer je inkluzija v splošnem prava.*
6. $I(V_1 \cap V_2) \supset I(V_1) + I(V_2)$.
7. $V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$.
8. $V(I_1 + I_2) = V(I_1) \cap V(I_2)$.
9. $V(I) = V(\sqrt{I})$ *in* $I(V) = \sqrt{I(V)}$.
10. ***Hilbertov Nullstellensatz**: $I(V(I)) = \sqrt{I}$ za vsak ideal $I \lhd \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$.*

Vse lastnosti razen zadnje so elementarne in njihov dokaz je prepuščen bralcu. Trditvi (5) in (6) med drugim povesta, da sta unija in presek končnega števila varietet spet varieteti. Hilbertov Nullstellensatz (10) je netrivialen rezultat; za dokaz glej npr. [11]. Mi bomo dokazali Nullstellensatz samo za glavne ideale (glej posledico 25 na str. 137).

Definicija 46. Algebraična varieteta $V \subset \mathbb{C}^n$ je ***razcepna*** (ali ***reducibilna***), če jo lahko predstavimo kot unijo $V = V_1 \cup V_2$ algebraičnih varietet $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}^n$, tako da nobena od njiju ni enaka V. V nasprotnem primeru se V imenuje ***nerazcepna*** (ali ***ireducibilna***).

Ideal $I \lhd K$ v komutativnem kolobarju K je ***praideal***, če iz predpostavke $PQ \in I$ $(P, Q \in K)$ sledi $P \in I$ ali $Q \in I$.

Trditev 33. *Algebraična varieteta $V \subset \mathbb{C}^n$ je nerazcepna natanko tedaj, ko je njen ideal $I(V)$ praideal kolobarja $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$.*

Dokaz. Če je V reducibilna, $V = V_1 \cup V_2$, je

$$I(V) = I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2).$$

Iz predpostavke $V_j \neq V$ sledi $I(V_j) \neq I(V)$ za $j = 1, 2$; torej je $I(V)$ presek dveh strogo večjih idealov in zato ni praideal.

Obratno, recimo da $I(V)$ ni praideal; torej obstajata $P, Q \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n] \setminus I(V)$, da je $PQ \in I(V)$. Tedaj je

$$V = (V \cap \{P = 0\}) \cup (V \cap \{Q = 0\}) = V_1 \cup V_2$$

razcep varietete V na unijo dveh pravih podvarietet. $\square$

Izrek 61. *Vsaka algebraična varieteta $V \subset \mathbb{C}^n$ dopušča razcep*

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$$

na unijo končno mnogo nerazcepnih algebraičnih varietet $V_j \subset \mathbb{C}^n$, pri čemer $V_i \not\subset V_j$ za $i \neq j$. Razcep je enoličen do vrstnega reda natančno.

Dokaz. Najprej dokažimo obstoj razcepa. Če je varieteta $V \subset \mathbb{C}^n$ razcepna, jo razcepimo kot unijo $V = V_1 \cup V_2$ dveh pravih podvarietet. Če je V_1 ali V_2 razcepna, jo ponovno razcepimo na unijo dveh pravih podvarietet. Postopek nadaljujemo. Če se postopek razcepljanja ne bi končal v končnem številu korakov, bi dobili neskončno padajoče zaporedje varietet $W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \cdots$, tako da $W_j \neq W_{j+1}$ za vsak $j = 1, 2, \ldots$. Prirejeno zaporedje idealov tedaj sestavlja neskončno strogo naraščajoče zaporedje:

$$I(W_1) \subset I(W_2) \subset I(W_3) \subset \cdots \lhd \mathbb{C}[z_1, ..., z_n].$$

Ker pa je kolobar $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ Noetherski, je vsako naraščajoče zaporedje njegovih idealov stacionarno (to je, vsi ideali od nekega dalje so med seboj enaki). To protislovje nam pove, da se opisani postopek razcepljanja vselej konča v končnem številu korakov.

Enoličnost razcepa pa vidimo takole. Recimo, da je tudi $V = \cup_{j=1}^m W_j$, kjer $W_j \not\subset W_{j'}$ za $j \neq j'$. Odtod sledi za vsak $i = 1, \ldots, k$, da je $V_i = \cup_{j=1}^m V_i \cap W_j$. Ker je V_i nerazcepna, sledi $V_i = V_i \cap W_j$ za nek j; torej je $V_i \subset W_j$. Enako ugotovimo, da za vsak indeks $j = 1, \ldots, m$ obstaja indeks $i' = i(j) \in \{1, \ldots, k\}$, da je $W_j \subset V_{i'}$. Odtod sledi $V_i \subset W_j \subset V_{i'}$ in zato $V_i = W_j = V_{i'}$. To pomeni, da so varietete W_j v drugem razcepu dobljene s permutacijo varietet iz prvega razcepa. $\square$

Opomba. Dualni rezultat izreka 61 je naslednji: *Vsak ideal $I \lhd \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ je enak produktu končnega števila praidealov, vsak radikalno zaprt ideal $I = \sqrt{I}$ pa je enak preseku končnega števila praidealov.*

Sedaj si oglejmo holomorfen analog zgornjih rezultatov, kjer algebraične množice v $\mathbb{C}^n$ nadomestimo z analitičnimi množicami v poljubni kompleksni mnogoterosti.

Definicija 47. Množica V v kompleksni mnogoterosti X se imenuje ***analitična množica***, če za vsako točko $a \in V$ obstaja odprta okolica $U \ni a$ v X in končno mnogo holomorfnih funkcij $f_1, f_2, ..., f_k \in \mathcal{O}(U)$, da je

$$V \cap U = \{z \in U \colon f_1(z) = 0, ..., f_k(z) = 0\}.$$

Če je V zaprta v X, se imenuje ***zaprta analitična podmnožica*** mnogoterosti X.

Definicija 48. Točka $a \in V$ se imenuje ***regularna točka*** analitične množice $V \subset X$, če je v neki odprti okolici te točke V kompleksna podmnogoterost v X (glej def. 42 na str. 114). Njeno dimenzijo označimo z $\dim_a V$ in jo imenujemo ***dimenzija analitične množice v točki*** $a \in V$. Množico vseh regularnih točk ozačimo z V_{reg}. Točka $a \in V$, ki ni regularna, se imenuje ***singularna***; množico vseh singularnih točk označimo z V_{sing}.

Iz definicije sledi, da je množica V_{reg} odprta v V, njene povezane komponente pa so kompleksne podmnogoterosti (ne nujno zaprte, lahko različnih dimenzij) mnogoterosti X. Množica singularnih točk V_{sing} je zato zaprta v V. Dimenzijo množice V v singularni točki $a \in V_{\text{sing}}$ definiramo s predpisom

$$\dim_a V = \limsup_{b \in V_{\text{reg}},\ b \to a} \dim_b V. \tag{III.6.3}$$

Število $\dim X - \dim_a V$ se imenuje ***kodimenzija*** množice V v točki a. Definicija (III.6.3) je smiselna, ker je množica V_{sing} nikjer gosta v V.

Globalno definiramo ***dimenzijo analitične množice*** kot

$$\dim V = \max_{a \in V} \dim_a V.$$

Očitno je $\dim V \leq \dim X$.

Množica V je ***čiste dimenzije*** p, če je $\dim_a V = p$ za vsak $a \in V$. Analitična množica čiste dimenzije $\dim X - 1$ se imenuje ***kompleksna hiperploskev*** v X, množica čiste dimenzije ena pa ***kompleksna krivulja*** v X. V primeru $\dim X = 2$ ta dva pojma seveda sovpadata. Analitična množica čiste dimenzije 0 je diskretna, množica čiste dimenzije $n = \dim X$ pa je enaka uniji povezanih komponent mnogoterosti X.

Naj bo V analitična množica v X. Za vsako točko $a \in V$ bomo množici V priredili ideal

$$I(V)_a = {}_V\mathcal{I}_a \lhd {}_X\mathcal{O}_a$$

v lokalnem kolobarju zarodkov ${}_X\mathcal{O}_a$ holomorfnih funkcij v točki $a \in X$. Obratno, vsakemu idealu $I \lhd {}_X\mathcal{O}_a$ bomo priredili zarodek analitične množice v točki a.

Ker je kompleksna mnogoterost dimenzije n lokalno biholomorfna odprti okolici točke 0 v $\mathbb{C}^n$, zadošča v lokalni teoriji obravnavati analitične množice v okolici izhodišča $0 \in \mathbb{C}^n$.

Naj bo torej $I \lhd {}_n\mathcal{O}_0$ ideal v lokalnem kolobarju zarodkov holomorfnih funkcij v okolici $0 \in \mathbb{C}^n$. Ker je kolobar ${}_n\mathcal{O}_0$ Noetherski, je ideal I končno generiran, torej $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ za neke zarodke holomorfnih funkcij $f_1 \ldots, f_k \in {}_n\mathcal{O}_0$. Izberimo okolico $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$, tako da lahko vsak zarodek f_j predstavimo s holomorfno funkcijo $f_j \in \mathcal{O}(U)$. Idealu I priredimo analitično podmnožico $V \subset U$ s predpisom

$$V = \{z \in U \colon f_i(z) = 0, \quad i = 1, \ldots, k\}. \tag{III.6.4}$$

Če izberemo drug sistem generatorjev $I = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$ ideala I, ki jih predstavimo s holomorfnimi funkcijami g_j na neki okolici $0 \in U' \subset \mathbb{C}^n$, dobimo analitično množico

$$V' = \{z \in U' \colon g_j(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, m\}.$$

Ker lahko vsak generator f_i ideala I v neki manjši okolici $0 \in W \subset \mathbb{C}^n$ predstavimo v obliki $f_i = \sum_{j=1}^m g_j h_j$, kjer so koeficienti h_j holomorfne funkcije na W in obratno, vsak generator g_j lahko predstavimo kot kombinacijo generatorjev f_i, sledi $V \cap W = V' \cap W$.

Ta diskusija pokaže, da vsak ideal $I \lhd {}_n\mathcal{O}_0$ določa ***zarodek analitične množice*** $V \subset \mathbb{C}^n$ v točki 0 s predpisom (III.6.4). Dve množici $V \subset U$, $V' \subset U'$ v različnih okolicah izhodišča v $\mathbb{C}^n$ namreč določata isti zarodek množice v 0 natanko tedaj, ko za neko odprto okolico $W \subset U \cap U'$ točke 0 velja $V \cap W = V' \cap W$.

Obratno, za vsako analitično množico V v neki odprti okolici $U \subset \mathbb{C}^n$ točke 0 lahko najdemo neko manjšo okolico $0 \in U' \subset U$ in končno mnogo holomorfnih funkcij $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(U')$, tako da je

$$V \cap U' = \{z \in U' \colon f_1(z) = 0, \ldots, f_k(z) = 0\}.$$

Zato lahko množici V priredimo ideal

$$I(V) = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle \lhd {}_n\mathcal{O}_0.$$

Če imata V in V' isti zarodek v točki 0, je seveda $I(V) = I(V')$; torej je ideal $I(V)$ odvisen le od zarodka V v 0 in ne od konkretnega izbora predstavnika.

Na ta način dobimo korespondenco med ideali v ${}_n\mathcal{O}_0$ in zarodki analitičnih množic v točki $0 \in \mathbb{C}^n$. Ta korespondenca zadošča vsem lastnostim v trditvi 32.

Primer 33. Naj bo V analitična množica v kompleksni mnogoterosti X. Izberimo točko $a \in V$ in lokalno karto $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \colon U \to U' \subset \mathbb{C}^n$ v neki okolici $a \in U \subset X$, tako da je $\phi(a) = 0 \in \mathbb{C}^n$. Funkcije $\phi_1, \ldots, \phi_n$ generirajo lokalni kolobar ${}_X\mathcal{O}_a \cong {}_n\mathcal{O}_0$.

Če je $a \in V_{\text{reg}}$ regularna točka in je $\dim_a V = m$, lahko izberemo karto (U, ϕ) tako, da je

$$V \cap U = \{x \in U \colon \phi_j(x) = 0, \ j = m+1, \ldots, n\}.$$

V tem primeru je ideal množice V v točki a enak

$$I(V)_a = \langle \phi_{m+1}, \ldots, \phi_n \rangle \lhd {}_X\mathcal{O}_a,$$

kvocient ${}_V\mathcal{O}_a = {}_X\mathcal{O}_a/I(V)_a$ pa je prost kolobar, generiran s funkcijami $\phi_1, \ldots, \phi_m$.

Lokalna karta ϕ preslika par $V \subset X$ lokalno v par $\mathbb{C}^m \times \{0\}^{n-m} \subset \mathbb{C}^n$ ter inducira izomorfizme

$$ {}_X\mathcal{O}_a \cong {}_n\mathcal{O}_0, \quad I(V)_a \cong \langle z_{m+1}, \ldots, z_n \rangle \lhd {}_n\mathcal{O}_0, \quad {}_V\mathcal{O}_a \cong {}_m\mathcal{O}_0. $$

Pri tem je ${}_m\mathcal{O}_0$ kolobar zarodkov holomorfnih funkcij v spremenljivkah $z_1, \ldots, z_m$.

V primeru $m = 0$ je $V = \{0\}$ in je $I(V) = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle = \mathfrak{m}$ maksimalni ideal v ${}_n\mathcal{O}_0$.

Analogno kot v definiciji 46 uvedemo pojem (ne)razcepnosti zarodka analitične množice. Nerazcepnim zarodkom ustrezajo praideali lokalnega kolobarja (dokaz trditve 33 velja tudi v tem primeru):

Trditev 34. *Naj bo X kompleksna mnogoterost. Zarodek analitične množice $V \subset X$ v točki $a \in V$ je nerazcepen natanko tedaj, ko je njegov ideal $I(V)_a$ praideal kolobarja ${}_X\mathcal{O}_a$.*

Zarodek analitične množice V v vsaki regularni točki $a \in V_{\mathrm{reg}}$ je seveda nerazcepen.

Ker je lokalni kolobar ${}_X\mathcal{O}_a \cong {}_n\mathcal{O}_0$ Noetherski, sledi obstoj končnega razcepa na nerazcepne zarodke (glej dokaz izreka 61 na str. 128):

Izrek 62. *Naj bo X kompleksna mnogoterost. Vsak zarodek V analitične množice v točki $a \in X$ ima končen razcep $V = \cup_{j=1}^k V_j$ na unijo nerazcepnih zarodkov V_j. Razcep je enoličen do vrstnega reda členov.*

Kot primer si oglejmo glavni ideal $I = \langle f \rangle \lhd {}_n\mathcal{O}_0$, generiran z zarodkom f holomorfne funkcije v točki $0 \in \mathbb{C}^n$. Privzemimo, da f ni identično enaka 0.

Trditev 35. *Glavni ideal $I = \langle f \rangle$ je praideal kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$ natanko tedaj, ko je f nerazcepen element kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$.*

Dokaz. Če je f nerazcepen in je $gh \in \langle f \rangle$ za $g, h \in {}_n\mathcal{O}_0$, je produkt gh deljiv z f in je zato vsaj eden od elementov g, h deljiv z f; torej je $\langle f \rangle$ praideal. Obratno, če je f razcepen, $f = gh$, kjer g in h nista enoti kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$, potem g, h nista elementa ideala I, njun produkt f pa je v I; torej I ni praideal. □

Ker je ${}_n\mathcal{O}_0$ Gaussov kolobar, lahko vsak element $f \in {}_n\mathcal{O}_0$ razcepimo na produkt nerazcepnih faktorjev:

$$ f = f_1^{d_1} f_2^{d_2} \cdots f_k^{d_k}, $$

kjer so $f_1, \ldots, f_k \in {}_n\mathcal{O}_0$ nerazcepni in $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$. Tedaj je glavni ideal $I = \langle f \rangle \lhd {}_n\mathcal{O}_0$ produkt praidealov $I_j = \langle f_j \rangle$, $I = I_1^{d_1} \cdots I_k^{d_k}$. Njegov radikal je enak $\sqrt{I} = I_1 I_2 \cdots I_k = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_k$ in tako dobimo razcep analitične množice $V(I)$ na nerazcepne komponente:

$$ V(I) = \{f = 0\} = \cup_{j=1}^k \{f_j = 0\} = \cup_{j=1}^k V(I_j). $$

S tem smo dokazali Hilbertov Nullstellensatz (glej točko 10 v trditvi 32) za glavne ideale kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$. Kasneje bomo podali še geometričen dokaz (glej posledico 25 na str. 137).

III.7 Holomorfne funkcije na analitični množici

V tem razdelku bomo definirali pojem holomorfne funkcije na analitični množici in si ogledali nekaj osnovnih lastnosti kolobarja zarodkov takih funkcij.

Naj bo V analitična množica v kompleksni mnogoterosti X. Za vsako točko $a \in V$ označimo z $I(V)_a \lhd {}_X\mathcal{O}_a$ ideal (III.6.2), ki ga določa V v lokalnem kolobarju ${}_X\mathcal{O}_a$.

Definicija 49. Kvocientni kolobar ${}_X\mathcal{O}_a/I(V)_a =: {}_V\mathcal{O}_a$ se imenuje ***lokalni kolobar*** analitične množice V v točki a.

Elementi kolobarja ${}_V\mathcal{O}_a$ so predstavljeni s holomorfnimi funkcijami $f \in \mathcal{O}(U)$ na okolicah $a \in U \subset X$. Dve holomorfni funkciji $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(U')$ na različnih okolicah $U, U' \subset X$ točke a definirata isti element kolobarja ${}_V\mathcal{O}_a$ natanko tedaj, ko je $f = g$ na $U'' \cap V$ za neko okolico $a \in U'' \subset U \cap U'$. To pomeni, da je smiselno razumeti elemente kolobarja ${}_V\mathcal{O}_a$ kot zarodke holomorfnih funkcij na V v točki a. To upravičuje naslednjo definicijo.

Definicija 50. Naj bo V analitična množica v kompleksni mnogoterosti X. Funkcija $f\colon V \to \mathbb{C}$ je holomorfna, če za vsako točko $a \in V$ obstaja okolica $a \in U \subset X$ in holomorfna funkcija $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(U)$, tako da je $f|_{U\cap V} = \widetilde{f}|_{U\cap V}$. Kolobar vseh holomorfnih funkcij na V označimo z $\mathcal{O}(V)$.

Holomorfna funkcija na analitični množici V je torej v vsaki točki $a \in V$ predstavljena z nekim elementom lokalnega kolobarja ${}_V\mathcal{O}_a$.

Očitno je ${}_V\mathcal{O}_a$ komutativen kolobar z identiteto. Poleg tega je to lokalni kolobar (z natanko enim maksimalnim idealom) in tudi Noetherski, saj se ta lastnost podeduje na kvociente. V splošnem pa kolobar ${}_V\mathcal{O}_a$ ni Gaussov; lahko ima celo delitelje niča.

Trditev 36. *Lokalni kolobar ${}_V\mathcal{O}_a$ analitične množice V je cel kolobar (brez deliteljev niča) natanko tedaj, ko je zarodek analitične množice V v točki a nerazcepen.*

Dokaz. Zarodek množice V v točki a je razcepen natanko tedaj, ko ideal $I(V)_a$ ni praideal (trditev 33); torej ko obstajata elementa $f, g \in {}_X\mathcal{O}_a \setminus I(V)_a$, katerih produkt fg je v idealu $I(V)_a$. V kvocientu ${}_V\mathcal{O}_a = {}_X\mathcal{O}_a/I(V)_a$ sta f in g neničelna elementa, njun produkt fg pa je ničelni element ${}_V\mathcal{O}_a$, saj je $fg \in I(V)_a$). Trditev sledi. □

Primer 34. Naj bo

$$V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon z_1 z_2 = 0\} = \{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = 0\}.$$

Množica V je unija obeh koordinatnih osi in je singularna v izhodišču. Funkciji $f = z_1|_V$ in $g = z_2|_V$ nista ničelni, torej sta netrivialna elementa v lokalnem kolobarju ${}_V\mathcal{O}_{(0,0)}$, njun produkt $fg = 0$ pa je ničelni element kolobarja ${}_V\mathcal{O}_{(0,0)}$. □

Tudi v primeru, ko je V nerazcepna v neki točki $a \in V$, se lahko zgodi, da kolobar ${}_V\mathcal{O}_a$ ni Gaussov. To vidimo na naslednjem primeru nerazcepne krivulje z ostjo v $\mathbb{C}^2$.

Primer 35. Naj bo

$$V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon z_1^2 - z_2^3 = 0\}.$$

Lahko je videti, da je V gladka kompleksna krivulja izven $(0,0)$. (Ker je $\nabla(z_1^2 - z_2^3) = (2z_1, -3z_2^2) \neq (0,0)$ razen v $(z_1, z_2) = (0,0)$, lahko uporabimo izrek o implicitni funkciji.) V točki $(0,0)$ pa ima V singularnost. Njen zarodek v $(0,0)$ je nerazcepen.

Funkciji $f = z_1|_V \in \mathcal{O}(V)$ in $g = z_2|_V \in \mathcal{O}(V)$ sta nerazcepni kot zarodka v točki $(0,0) \in V$. Torej ima zarodek holomorfne funkcije $g = f_1^2 = f_2^3 \in \mathcal{O}(V)$ v točki $(0,0) \in V$ dva različna razcepa na nerazcepne faktorje v kolobarju ${}_V\mathcal{O}_0$. □

Analogno lahko definiramo pojem holomorfne preslikave med analitičnimi množicami.

Definicija 51. Naj bosta X in Y kompleksni mnogoterosti ter $V \subset X$, $V' \subset Y$ analitični podmnožici. Zvezna preslikava $f \colon V \to V'$ se imenuje holomorfna, če z vsako točko $a \in V$ obstajata okolica $a \in U \subset X$ ter lokalna karta $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \colon U' \to \mathbb{C}^m$ na neki okolici $U' \subset Y$ točke $f(a)$, tako da je $\psi_j \circ f \colon V \cap U \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija na $V \cap U$ za vsak $j = 1, \ldots, m$.

III.8 Geometričen razcep Weierstrassovega polinoma

V tem razdelku bomo s pomočjo analitično-geometričnih metod dobili 'semiglobalni' razcep holomorfne funkcije na nerazcepne faktorje. S tem bomo pridobili več dodatnih informacij, kot jih ponuja algebraična faktorizacija. Te nam bodo med drugim omogočale dokazati izrek o desingularizaciji kompleksne krivulje v naslednjem razdelku.

Obravnavali bomo podobno situacijo kot v Weierstrassovem pripravljalnem izreku. Naj bodo $z = (z', z_n)$ koordinate na $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ in $\pi \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ projekcija $\pi(z', z_n) = z'$. Naslednji izrek bomo potrebovali v primeru, ko je domena P polidisk.

Izrek 63. *Naj bo $P = P' \times P''$ omejena povezana domena v $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ ter f holomorfna funkcija na okolici množice $\overline{P}$, ki zadošča pogoju*

$$f \neq 0 \quad \text{na } \overline{P}' \times \partial P''.$$

Označimo $V = \{z \in P \colon f(z) = 0\}$. Za vsak $z' \in P'$ naj bo $m(z') \in \mathbb{Z}_+$ število različnih ničel funkcije $P'' \ni z_n \mapsto f(z', z_n)$ in $m = \max_{z' \in P'} m(z') \in \mathbb{Z}_+$. Potem velja naslednje:

(i) *Obstaja holomorfna funkcija $\delta \in \mathcal{O}(P')$, tako da za vsako točko $z' \in P'$ velja*

$$m(z') = m \iff \delta(z') \neq 0.$$

*Taka funkcija δ se imenuje **diskriminantna funkcija**, množica njenih ničel $E := \{z' \in P' \colon \delta(z') = 0\}$ pa **diskriminantna množica** funkcije f.*

(ii) *Lokalno na $P' \setminus E$ lahko uredimo korene $\alpha_1(z'), \dots, \alpha_m(z') \in P''$ enačbe $f(z', \cdot\,) = 0$ tako, da so α_j holomorfne funkcije. Projekcija*

$$\pi \colon V \setminus \pi^{-1}(E) \to P' \setminus E$$

je m-listna holomorfna krovna projekcija.

(iii) *Naj bo*

$$S := V \setminus \pi^{-1}(E) = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$$

razcep kompleksne hiperploskve S na povezane komponente. Za vsak $j = 1, \dots, k$ ima f konstantno večkratnost $d_j \in \mathbb{N}$ vzdolž S_j (to je, $f(z', \cdot\,)$ ima ničlo stopnje d_j v vsaki točki $\alpha_j(z')$, za katere je $(z', \alpha_j(z')) \in S_j$).

(iv) *Za vsak $j = 1, \dots, k$ obstaja Weierstrassov polinom W_j na P, tako da ima za vsako točko $z' \in P' \setminus E$ polinom $W_j(z', \cdot\,)$ enostavne ničle v tistih točkah $\alpha_j(z')$, za katere je $(z', \alpha_j(z')) \in S_j$, ter nobenih drugih ničel.*

(v) *Velja razcep*

$$f = g W_1^{d_1} W_2^{d_2} \cdots W_k^{d_k}, \tag{III.8.1}$$

kjer je g holomorfna funkcija na P brez ničel.

(vi) *Vsak Weiestrassov polinom W_j v točki (iv) je nerazcepen v smislu, da ga ne moremo zapisati kot produkt dveh holomorfnih funkcij z netrivialno množico ničel.*

Opomba. Ker je krovna projekcija trivialna nad vsako enostavno povezano množico v bazi, nam točka (ii) pove, da je za vsako enostavno povezano domeno $D' \subset P' \setminus E$ množica $V \cap \pi^{-1}(D')$ enaka disjunktni uniji grafov holomorfnih funkcij nad D'. To je posplošitev izreka o implicitni funkciji, ki da analogen rezultat samo v nekritičnih točkah, kjer je točkah $a \in V$ z $\nabla f(a) \neq 0$. V zgornjem izreku so vse ničle funkcije f kritične točke v primeru, ko so vse večkratnosti $d_j > 1$ strogo večje od 1.

Dokaz. Če domeno $P'' \subset \mathbb{C}$ nekoliko zmanjšamo, lahko predpostavimo, da ima P'' gladek rob in pri tem ne izgubimo nobenih ničel funkcije f na P.

Kot v dokazu Weierstrassovega pripravljalnega izreka vidimo, da ima enačba $f(z', \cdot\,) = 0$ za vse $z' \in P'$ enako število korenov, če upoštevamo algebraične večkratnosti. Zato je število $m(z')$ različnih korenov navzgor omejeno in je $m = \max_{z' \in P'} m(z') \in \mathbb{Z}$ končno število.

Fiksirajmo točko $a' \in P'$, v kateri ima enačba $f(a', \cdot\,) = 0$ natanko m različnih korenov $\alpha_1(a'), \dots, \alpha_m(a') \in P''$. Izberemo število $r'' > 0$, tako da so diski

$$D''_j = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon |\zeta - \alpha_j(a'')| \le r''\}$$

($j = 1, \ldots, m$) paroma disjunktni in vsebovani v P''. Funkcija $f(a', \cdot\,)$ nima ničel na robu teh diskov, saj so njene edine ničle točke $\alpha_j(a')$. Zato obstaja število $r' > 0$, tako da je polidisk D' s središčem a' in poliradijem r' kompaktno vsebovan v P' in velja

$$f \neq 0 \text{ na } \overline{D}' \times \partial D''_j, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Za $z' \in D'$ in $j \in \{1, \ldots, m\}$ si ogledamo integral

$$\nu_j(z') := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z_n - \alpha_j(z')| = r''} \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', z_n)}{f(z', z_n)}\, dz_n.$$

Po principu argumenta je $\nu_j(z')$ enako številu ničel funkcije $f(z', \cdot\,)$ v disku D''_j, šteto z večkratnostmi. To število je neodvisno od $z' \in D'$, saj je zvezna celoštevilska funkcija na povezani domeni, zato je enako $\nu_j := \nu_j(a') > 0$. Torej ima $f(z', \cdot\,)$ vsaj eno ničlo na vsakem od m diskov $D''_1, \ldots, D''_m$. Ker ima $f(z', \cdot\,)$ skupno največ m različnih ničel na domeni P'', sledi, da ima natanko m različnih ničel, po eno v vsakem od diskov D''_j. Označimo to edino ničlo z $\alpha_j(z') \in D''_j$. Ker je algebraično število ničel na D''_j enako ν_j, je $\alpha_j(z')$ ničla stopnje ν_j funkcije $f(z', \cdot\,)$. Torej je

$$V \cap \pi^{-1}(D') = \bigcup_{j=1}^{m} \{(z', \alpha_j(z')) \colon z' \in D'\}$$

unija disjunktih grafov holomorfnih funkcij α_j nad domeno D'. Ta argument nam pove, da je (neprazna) množica

$$\Omega = \{z' \in P' \colon m(z') = m\}$$

odprta v P' in je $\pi \colon V \cap \pi^{-1}(\Omega) \to \Omega$ holomorfna m-listna krovna projekcija.

Označimo $E := P' \setminus \Omega = \{z' \in P' \colon m(z') < m\}$. Konstruirali bomo holomorfno funkcijo $\delta \in \mathcal{O}(P')$, ki zadošča $\{\delta = 0\} = E$.

Lokalno na vsaki množici $D' \subset P'$ kot zgoraj lahko definiramo

$$\delta(z') = \prod_{1 \le i < j \le m} \big(\alpha_i(z') - \alpha_j(z')\big)^2, \quad z' \in D'.$$

Desna stran je simetričen polinom v $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$, zato je funkcija δ dobro definirana na vsej domeni Ω. (Na preseku različnih polidiskov $D' \subset \Omega$ dobimo iste korene v različnem vrstnem redu, kar pa ne vpliva na definicijo produkta δ.) Ker so $\alpha_j(z')$ lokalno na Ω holomorfne funkcije, je δ dobro definirana holomorfna funkcija na Ω.

Za vsako zaporedje točk $z'_l \in \Omega$ ($l = 1, 2, \ldots$) z $\lim_{l\to\infty} z'_l = a' \in E$ velja $\lim_{l\to\infty} \delta(z'_l) = 0$, saj koreni $\alpha_i(z'_l)$ ($i = 1, \ldots, m$) ležijo v omejeni množici P'' in vsaj ena od razlik $\alpha_i(z'_l) - \alpha_j(z'_l)$ v produktu $\delta(z'_l)$ konvergira v 0 po nekem podzaporedju (saj imamo v točki a' manj kot m različnih korenov). To pomeni, da se δ razširi do zvezne funkcije na P', tako da je $\{\delta = 0\} = E$. ***Izrek Rado*** nam pove, da je δ holomorfna na P'. (Ta klasični izrek trdi, da je vsaka zvezna funkcija, ki je holomorfna izven svoje ničelne množice, holomorfna povsod. Dokaz se reducira na funkcije ene spremenljivke z upoštevanjem dejstva, da je izrek lokalen in da je vsaka zvezna separatno holomorfna funkcija več spremenljivk dejansko holomorfna, kot smo videli v razdelku III.1.)

S tem smo v celoti dokazali točki (i) in (ii).

Sedaj si oglejmo razcep (iii) množice $S = V \setminus \pi^{-1}(E)$ na unijo povezanih komponent S_j. Zožitev krovne projekcije na vsako povezano komponento totalnega prostora je spet krovna projekcija; torej je $\pi\colon S_j \to \Omega$ holomorfen krov za vsak $j = 1, \ldots, k$. Naj bo m_j stopnja tega krova (število točk v vlaknu); tedaj je $m_1 + \cdots + m_k = m$. Za vsako točko $z' \in \Omega$ in vsak indeks $j = 1, \ldots, k$ označimo z $\alpha_{j,1}(z'), \ldots, \alpha_{j,m_j}(z')$ vse točke na vlaknu $S_j \cap \pi^{-1}(z')$ (torej vse ničle funkcije $f(z', \cdot\,)$, ki pripadajo povezani komponenti S_j). Kot v pripravljalnem izreku vidimo, da je red ničle funkcije $f(z', \cdot\,)$ konstanten lokalno vzdolž S_j; ker je S_j povezana, je red konstanten na S_j. Označimo to število z $d_j \in \mathbb{N}$. Za $z' \in \Omega$ in $j \in \{1, \ldots, k\}$ definiramo Weierstrassov polinom

$$W_j(z', z_n) = \prod_{l=1}^{m_j} \big(z_n - \alpha_{j,l}(z')\big) = z_n^{m_j} + a_{j1}(z') z_n^{m_j - 1} + \cdots + a_{jm_j}(z').$$

Kot v dokazu Weierstrassovega izreka vidimo, da so koeficienti $a_{jl}(z')$ dobro definirane holomorfne funkcije na Ω. Ker so vse ničle $\alpha_{j,l}(z')$ vsebovane v omejeni množici $P'' \subset \mathbb{C}$, so koeficienti $a_{jl}(z')$ omejene funkcije na $\Omega = P' \setminus E$. Riemannov izrek o odpravljivih singularnostih (izrek 59) nam pove, da se funkcije a_{jl} nadaljujejo preko množice $E = \{\delta = 0\}$ do holomorfnih funkcij na vsej domeni P'. Torej je W_j Weierstrassov polinom na $P' \times \mathbb{C}$. Iz konstrukcije sledi, da ima W_j enostavne ničle vzdolž hiperploskve S_j.

Naj bo $W = W_1^{d_1} W_2^{d_2} \cdots W_k^{d_k}$. Ker ima f stopnjo d_j vzdolž S_j, imata funkciji $f(z', \cdot\,)$ in $W(z', \cdot\,)$ iste ničle z istimi večkratnostmi za vsak $z' \in \Omega$. Odtod vidimo enako kot v dokazu pripravljalnega izreka, da na $\Omega \times P''$ velja razcep $f = gW$ (III.8.1) za neko funkcijo $g \neq 0$ brez ničel. Kvocient g lahko predstavimo s Caucyhevim integralom funkcije f/W po $\partial P''$ (glede na zadnjo spremenljivko); glej (III.4.4) na str. 120. Isti integral je očitno definiran tudi za točke z' na večji domeni P', torej podaja analitično nadaljevanje funkcije g na $P' \times P''$. Analogen argument lahko uporabimo za recipročno funkcijo $1/g = W/f$, ki se tudi nadaljuje do holomorfne funkcije na P. Odtod sledi $g \neq 0$ na P.

S tem smo dokazali točke (iii)–(v). Točka (vi) sledi iz dejstva, da ne moremo predstaviti povezane kompleksne mnogoterosti S_j kot unije ničelnih množic holomorfnih funkcij, razen če je vsaj ena od njih ničelna funkcija. Izrek je v celoti dokazan. □

Opomba. V primeru, ko je $P = P' \times P''$ polidisk okrog $0 \in \mathbb{C}^n$ in je 0 edina ničla funkcije $f(0', \cdot\,)$ na $\overline{P}''$, so Weierstrassovi polinomi W_j v razcepu (III.8.1) *specialni.*

Posledica 24. *Naj bo $f = gW_1^{d_1} W_2^{d_2} \cdots W_k^{d_k}$ faktorizacija na $P = P' \times P''$ kot v (III.8.1), pri čemer so W_j nerazcepni Weierstrassovi polinomi. Če je holomorfna funkcija $h \in \mathcal{O}(P)$ enaka nič na množici $V = \{f = 0\}$, potem je h deljiva s produktom $W = W_1 \cdots W_k$.*

Dokaz. Za vsako točko $z' \in \Omega = P' \setminus E$ (oznake kot v izreku) ima Weierstrassov polinom W natanko m različnih ničel na vlaknu $\{z'\} \times P''$. Delimo h z W po delilnem izreku:

$$h = vW + r, \qquad r \in \mathcal{O}(P')[z_n],$$

kjer je r polinom v z_n stopnje $< m$ s koeficienti, ki so holomorfne funkcije na P'. Ker imata $h(z', \cdot\,)$ in $W(z', \cdot\,)$ vsaj m različnih ničel za vsak $z' \in \Omega$, velja to tudi za razliko $r = h - vW$. Ker pa je r stopnje $< m$ v z_n, sledi $r(z', \cdot\,) \equiv 0$ za $z' \in \Omega$. To pomeni, da so njegovi koeficienti identično enaki nič na Ω. Ker je Ω povsod gosta v P', sledi isto na vsem P' po principu identičnosti; torej je $r \equiv 0$ in je zato funkcija h deljiva z W. $\square$

Posledica 25. (Nullstellensatz za glavne ideale v ${}_n\mathcal{O}_0$) *Za vsak glavni ideal $I = \langle f \rangle \lhd {}_n\mathcal{O}_0$ velja $I(V(I)) = \sqrt{I}$. Če je $f = f_1^{d_1} f_2^{d_2} \cdots f_k^{d_k}$ razcep, v katerem so f_j paroma različni nerazcepni faktorji kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$, je $\sqrt{I} = \langle f_1 f_2 \cdots f_k \rangle$.*

III.9 Lokalna predstavitev kompleksne krivulje

V tem razdelku si bomo ogledali lokalno predstavitev poljubne kompleksne krivulje V v dvodimenzionalni kompleksni mnogoterosti X.

Kompleksna krivulja je analitična množica čiste dimenzije ena, to je, $\dim_a V = 1$ za vsako točko $a \in V$ (glej str. 129). Za točke $a \in V_{\mathrm{reg}}$ je to običajna definicija dimenzije v smislu kompleksne podmnogoterosti (glej def. 42), v točkah $a \in V_{\mathrm{sing}}$ pa vzamemo (glej (III.6.3) na str. 129)):

$$\dim_a V = \limsup_{b \in X_{\mathrm{reg}},\ b \to a} \dim_b X.$$

Najprej si oglejmo izrek 63 v primeru $n = 2$.

Izrek 64. *Naj bo f nekonstantna holomorfna funkcija na polidisku $\overline{P} = \overline{D}_1 \times \overline{D}_2 \subset \mathbb{C}^2$ okrog točke $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, tako da je $f(0,0) = 0$ in je $z_2 = 0$ edina ničla funkcije $f(0, \cdot\,)$ na $\overline{D}_2$. Naj bo $V = \{(z_1, z_2) \in P \colon f(z_1, z_2) = 0\}$. Če disk $0 \in D_1 \subset \mathbb{C}$ primerno zmanjšamo, potem koordinatna projekcija $\pi(z_1, z_2) = z_1$ definira nerazvejan holomorfen krov*

$$\pi \colon V^* = V \setminus \{0\} \to D_1^* = D_1 \setminus \{0\}. \tag{III.9.1}$$

Za dovolj majhen disk D_1 je množica V^* povezana natanko tedaj, ko je V ireducibilna v $(0,0)$. Točka $(0,0)$ je bodisi gladka točka krivulje V, bodisi njena izolirana singularnost.

Iz zadnje trditve sledi, da je množica singularnih točk krivulje v kompleksni ploskvi, ki jo lahko lokalno predstavimo kot množico ničel ene funkcije, diskretna množica.

Dokaz. Disk D_1 izberimo dovolj majhen, da je $f \neq 0$ na $D_1 \times \partial D_2$. Potem je projekcija $\pi \colon V \cap P \to D_1$ razvejan krov kot v izreku 63. Naj bo $\delta(z_1)$ njegova diskriminatna funkcija.

Če je $\delta(0) \neq 0$, je projekcija $\pi \colon V \cap P \to D_1$ nerazvejana nad točko $0 \in \mathbb{C}$ in je zato V nad majhno okolico $0 \in \mathbb{C}$ unija grafov holomorfnih funkcij. Ker ima $f(0, \cdot\,)$ ničlo samo v $z_2 = 0$, imamo samo en graf in je $V \cap P$ povezana kompleksna krivulja brez singularnosti.

Denimo sedaj, da je $\delta(0) = 0$. Ker je 0 izolirana ničla funkcije δ, lahko D_1 zmanjšamo tako, da je $\delta \neq 0$ na $D_1 \setminus \{0\}$. Po izreku 63 je tedaj projekcija (III.9.1) nerazvejan holomorfen krov. Odtod sledi, da je $(0,0)$ edina singularna točka krivulje V v polidisku P. Z razcepom V^* na povezane komponente $S_1 \cup \cdots \cup S_k$ dobimo za vsak S_i nerazcepen Weierstrassov polinom $W_i(z_1, z_2)$, tako da je $\overline{S}_i \cap P = S_i \cup \{(0,0)\} = \{(z_1, z_2) \in P \colon W(z_1, z_2) = 0\}$. □

Opomba. Če je $\delta(0) = 0$, je projekcija $\pi \colon V \to D_1$ sicer razvejana v točki $(0,0)$, a to ne pomeni nujno, da bi bila $(0,0)$ singularna točka množice V. Primer je

$$V = \{(z_1, z_2) \colon z_1 - z_2^2 = 0\},$$

ki je gladka krivulja (graf $z_1 = z_2^2$), a je projekcija na z_1 razvejana v $(0,0)$.

Izrek 65. *Naj bo V kompleksna krivulja v dvodimenzionalni kompleksni mnogoterosti X. Za vsako točko $a \in V$ obstaja okolica $a \in U \subset X$ in holomorfna funkcija $f \in \mathcal{O}(U)$, tako da je $U \cap V = \{x \in U \colon f(x) = 0\}$. Singularna množica V_{sing} je diskretna.*

Kompleksna krivulja v kompleksni ploskvi je torej lokalno v vsaki točki definirana z eno holomorfno funkcijo. Isti rezultat velja za vsako kompleksno hiperploskev v poljubni kompleksni mnogoterosti X, torej za analitično množico $V \subset X$ čiste dimenzije $\dim X - 1$. (Glej str. 129.) Z dokazom slednje trditve je nekoliko več dela; glej npr. Chirka [4].

Dokaz. Fiksirajmo točko $a \in V$ in izberimo lokalne koordinate (z_1, z_2) v okolici a na X, v katerih je $a = (0,0) \in \mathbb{C}^2$. Nato izberimo nekonstantno holomorfno funkcijo $f(z_1, z_2)$ v okolici $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, tako da je $f = 0$ na V. Po linearni zamenjavi koordinat lahko predpostavimo, da f zadošča izreku 64.

Razcepimo V na lokalne ireducibilne komponente: $V = \cup_{i=1}^k V_i$. Vsaka od komponent V_i je nerazcepna kompleksna krivulja. Tudi funkcijo f razcepimo na nerazcepne faktorje $f = f_1^{d_1} \cdots f_m^{d_m}$.

Za vsak $i = 1, \ldots, k$ obstaja indeks $j = j(i) \in \{1, \ldots, m\}$, tako da je $f_j|_{V_i} = 0$, torej je $V_i \subset \{f_j = 0\}$. (V nasprotnem primeru bi bila V_i razcepna.) Trdimo, da je $V_i = \{f_j = 0\}$ v okolici $(0,0)$ (to je, v smislu zarodkov). Če to ni res, obstaja holomorfna funkcija $g(z_1, z_2)$ v okolici $(0,0)$, ki ni identično enaka nič na krivulji $C_j := \{f_j = 0\}$ (torej ni deljiva z zarodkom f_j), tako da je $g|_{V_i} = 0$. Izrek 64 na str. 137 pove, da je $(0,0)$ izolirana singularnost krivulje C_j in je $C_j^* := C_j \setminus \{(0,0)\}$ povezana enodimenzionalna kompleksna krivulja brez singularnosti (Riemannova ploskev). Torej je množica ničel $C_j^* \cap \{g = 0\}$ funkcije g na C_j^* diskretna. To je v očitnem protislovju z dejstvom, da množica $C_j \cap \{g = 0\}$ vsebuje kompleksno krivuljo V_i. Protislovje pove, da je res $V_i = C_j$.

S preureditvijo indeksov dobimo $V_i = C_i = \{f_i = 0\}$ za $i = 1, \ldots, k$. Zato funkcija $f_1 f_2 \ldots f_k$ definira krivuljo $V = \cup_{i=1}^{k}$ v neki okolici točke $a \in V$. Odtod sledi tudi, da je V_{sing} diskretna, saj smo to že dokazali za krivulje, ki so lokalno definirane z eno funkcijo.

III.10 Izrek o normalizaciji kompleksne krivulje

S pomočjo rezultatov v prejšnjem razdelku bomo sedaj dokazali izrek o normalizaciji (ali desingularizaciji) poljubne kompleksne krivulje v kompleksni ploskvi X. Isti izrek velja za krivulje v kompleksnih mnogoterostih poljubne dimenzije, a za dokaz je potrebnih nekaj več tehničnih sredstev. (Glej npr. [4].) Glavno tehnično sredstvo je naslednja lema o lokalni parametrizaciji zarodka nerazcepne krivulje.

Lema 9 (**Lokalna parametrizacija kompleksne krivulje**)**.** *Naj bo* $V \subset \mathbb{C}^2$ *nerazcepen zarodek kompleksne krivulje v točki* $(0,0)$*, tako da je* $V \cap (\{0\} \times \mathbb{C}) = (0,0)$*. Označimo z* $d \in \mathbb{N}$ *stopnjo projekcije* $V \to \mathbb{C} \times \{0\}$*. Potem obstajata disk* $0 \in D \subset \mathbb{C}$ *ter injektivna holomorfna preslikava* $f = (f_1, f_2) \colon D \to \mathbb{C}^2$*, tako da velja naslednje:*

1. $f_1(\zeta) = \zeta^d$ *in* $f_2(0) = 0$*,*
2. $f(D)$ *je okolica točke* $(0,0)$ *v krivulji* V*,*
3. f *preslika punktiran disk* $D^* = D \setminus \{0\}$ *biholomorfno na punktirano okolico točke* $(0,0)$ *v* V*.*

Opomba. Če razvijemo funkcijo f_2 v potenčno vrsto $f_2(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \zeta^j$ ter upoštevamo $z_1 = f_1(\zeta) = \zeta^d$, dobimo naslednjo ***Puiseuxjevo vrsto*** za spremenljivko z_2 kot funkcijo spremenljivke z_1, ki opiše točke (z_1, z_2) na kompleksni krivulji V v okolici $(0,0)$:

$$V = \left\{ (z_1, z_2) \colon z_2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, z_1^{j/d} \right\}.$$

Dokaz. Po izrekih 64 in 65 je $(0,0)$ izolirana točka krivulje V, prva koordinatna projekcija $\pi \colon V^* = V \setminus \{(0,0)\} \to D_1^* = D_1 \setminus \{0\}$ na majhen punktiran disk s središčem v $0 \in \mathbb{C}$ pa je d-listna krovna projekcija. (Tu smo V nadomestili s primerno okolico izhodišča.) Ker je V nerazcepna, je množica V^* povezana.

Naj bo $f_1(\zeta) = \zeta^d$. Izberimo disk $D \subset \mathbb{C}$ s središčem 0 tako, da je $f_1(D) = D_1$. Preslikava $f_1 \colon D^* = D \setminus \{0\} \to D_1^* = D_1 \setminus \{0\}$ je tudi d-listna krovna projekcija. Poljubna dva d-listna krova s povezanim totalnim prostorom nad punktiranim diskom sta med seboj izomorfna. To pomeni, da lahko preslikavo $f_1 \colon D^* \to D_1^*$ dvignemo do biholomorfne preslikave f v naslednjem komutativnem diagramu:

$$\begin{tikzcd} & V^* \arrow[d, "\pi"] \\ D^* \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_1"'] & D_1^* \end{tikzcd}$$

Ker vsi listi projekcije $\pi\colon V \to D$ sovpadejo nad izhodiščem, velja $\lim_{\zeta\to 0} f_2(\zeta) = 0$, torej je f_2 holomorfna na D. Očitno f zadošča lastnostim v izreku. $\square$

Izrek 66 (**Normalizacija kompleksne krivulje**)**.** *Naj bo V kompleksna krivulja v neki kompleksni mnogoterosti X. Potem obstaja Riemannova ploskev R in surjektivna holomorfna preslikava $f\colon R \to V$ (**normalizacijska preslikava**), tako da velja:*

(i) *zožitev $f\colon f^{-1}(V_{\mathrm{reg}}) = R \setminus f^{-1}(V_{\mathrm{sing}}) \to V_{\mathrm{reg}}$ je biholomorfna preslikava;*

(ii) *za vsako točko $x \in V_{\mathrm{sing}}$ je vlakno $f^{-1}(x) \subset R$ končna množica točk v R. Točke vlakna $f^{-1}(x)$ so v bijektivni korespondenci z lokalnimi nerazcepnimi komponentami zarodka analitične množice V v točki x.*

Če je krivulja V lokalno nerazcepna v vsaki svoji točki, je normalizacijska preslikava $f\colon R \to V$ bijektivna.

Dokaz. Izrek bomo na tem mestu podrobno dokazali le v primeru $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$.

Množica $R_0 := V_{\mathrm{reg}}$ je kompleksna enodimenzionalna podmnogoterost v X, torej Riemannova ploskev. Označimo z $\iota\colon R_0 \hookrightarrow X$ njeno vložitev (inkluzijo) v X. Riemannovo ploskev R bomo konstruirali tako, da bomo ploskvi R_0 s holomorfnim lepljenjem dodali manjkajoče točke nad singularnim lokusom V_{sing}, po eno za vsako lokalno ireducibilno komponento krivulje V nad poljubno točko $x \in V_{\mathrm{sing}}$.

Fiksirajmo točko $x_0 \in V_{\mathrm{sing}}$. Naj bo U majhna odprta okolica točke x_0 v X in $V \cap U = \cup_{j=1}^{k} V_j$ razcep na lokalne nerazcepne komponente. Okolico U in lokalne koordinate (z_1, z_2) na njej lahko izberemo tako, da je $z_1(x_0) = z_2(x_0) = 0$ in da ima krivulja $V \cap U$ lokalna predstavitev kot v izreku 64. To med drugim pomeni, da je za vsak $j = 1, \ldots, k$ množica $V_j^* = V_j \setminus \{x_0\}$ nesingularna krivulja in se poljubni dve krivulji V_i, V_j $(i \neq j)$ sekata samo v točki x_0. Vsako od komponento V_i po potrebi zmanjšamo, tako da obstaja lokalna holomorfna parametrizacija $f_i = (f_{i1}, f_{i2})\colon D \to V_i$ kot v lemi 9. Tu je D nek disk v $\mathbb{C}$ s središčem v 0 in $f_i(0) = x_0$.

Naj bo $\widetilde{R}$ Riemannova ploskev, ki jo dobimo kot identifikacijski prostor disjunktne unije ploskve R_0 ter k kopij $D_1, \ldots, D_k$ diska D, pri čemer i-to kopijo D_i zlepimo na punktiranem disku $D_i^* = D_i \setminus \{0\}$ s punktirano komponento $V_i^* = V_i \setminus \{x_0\}$ s pomočjo biholomorfne preslikave $f_i\colon D_i^* \to V_i^*$. Drugih identifikacij ne naredimo. Izhodišče $0 \in D_i$ predstavlja v $\widetilde{R}$ novo (dodano) točko x_i in te točke so med seboj različne. Kot množica je torej $\widetilde{R} = R_0 \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Dobimo tudi holomorfno preslikavo $\widetilde{f}\colon \widetilde{R} \to X$, ki je enaka vložitvi ι na podmnožici $R_0 \subset \widetilde{R}$ in je enaka parametrizacijski preslikavi f_i na disku D_i (slednjega identificiramo s podmnožico v R'). Torej je $\widetilde{f}(x_i) = x_0$ za vsak $i = 1, \ldots, k$.

Opisani postopek lahko naredimo hkrati v vsaki singularni točki $x \in V_{\mathrm{sing}}$, saj so postopki v različnih singularnih točkah med seboj povsem neodvisni. Rezultat je Riemannova ploskev R in holomorfna preslikava $f\colon R \to V$ kot v izreku. $\square$

III.11 Algebraične funkcije na Riemannovi ploskvi

Naj bosta X in Y kompaktni Riemannovi ploskvi in $\pi\colon Y \to X$ neka nekonstantna holomorfna preslikava. Iz prvega poglavja vemo, da je π razvejan krov s razvejišči v končno mnogo točkah. Naj bo $A =\subset X$ (končna) množica vseh kritičnih vrednosti π in $B = \pi^{-1}(A) \subset Y$. Pišimo $Y' = Y \setminus B$ in $X' = X \setminus A$; tedaj je $\pi\colon Y' \to X'$ nerazvejana končno listna krovna projekcija. Naj bo n število listov.

III.12 Projektivno algebraične množice

Literatura

[1] L.V. Ahlfors: Complex Analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.

[2] G.E. Bredon. Sheaf Theory, Springer, 1997.

[3] W. Boothby: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Second edition. Pure and Applied Mathematics, 120. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.

[4] E.M. Chirka: Complex Analytic Sets. Kluwer, Dordrecht (1989)

[5] J.-P. Demailly: Complex Analytic and Algebraic Geometry.
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/demailly/books.html`

[6] H.M. Farkas; I. Kra: Riemann Surfaces. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, vol. 71. Springer-Verlag, New York, 1992.

[7] O. Forster; Lectures on Riemann surfaces. Graduate Texts in Mathematics, 81. Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] F. Forstnerič: Stein Manifolds and Holomorphic Mappings (The Homotopy Principle in Complex Analysis). Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 56, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2011)

[9] F. Forstnerič: Analiza na mnogoterostih – zapiski predavanj. Fakulteta za Matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2011. http://ucilnica.fmf.uni-lj.si

[10] P. Griffiths: Introduction to Algebraic Curves. Translations of Mathematical Monographs, vol. 76, AMS, 1980.

[11] P.A. Griffiths & J. Harris: Principles of algebraic geometry. John Wiley & Sons, Inc., New York (1978, 1994)

[12] R.C. Gunning & H. Rossi: Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1965)

[13] O. Lehto: Univalent Functions and Teichmüller spaces. Graduate Texts in Mathematics, vol. 109, Springer-Verlag, New York, 1987.

[14] R. Miranda: Algebraic Curves and Riemann Surfaces. Graduate Studies in Mathematics, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[15] J. Mrčun, Topologija. Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 44, Društvo matematikov, fizikov in astronomov - založništvo, Ljubljana, 2008.

[16] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents. (French) Ann. of Math. (2) 61, (1955), 197–278.

[17] D. Varolin: Riemann Surfaces by Way of Complex Analytic Geometry. Graduate Studies in Mathematics, 125. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[18] O. Zariski & P. Samuel: Commutative Algebra. Vol. 1. With the cooperation of I. S. Cohen. Corrected reprinting of the 1958 edition. Graduate Texts in Mathematics, No. 28. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1975.