Druga domača naloga

1. Dokaži naslednje trditve za kompaktni Riemannovi ploskvi X in Y:
   a) Če $f, g \in \mathcal{M}(X)$, je $\operatorname{ord}_p(fg) = \operatorname{ord}_p f + \operatorname{ord}_p g$.
   b) Če ima $f \in \mathcal{M}(X)$ natanko en enostaven pol, je $X \cong \hat{\mathbb{C}}$.
   c) Naj bo $g(X) = g(Y) \geq 2$ in $F \in \mathcal{O}(X, Y)$ nekonstantna. Pokaži, da je $\operatorname{st} F = 1$. Poišči protiprimer za $g(X) = g(Y) = 1$.
2. Naj bo $f(z) = 4z^2(z-1)^2/(2z-1)^2$. Poišči stopnjo inducirane preslikave $\tilde{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ in pokaži, da je $\operatorname{st}_p \tilde{f} = 2$ za $p = 1/2 \pm 1/2i$.
3. Naj bo $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ in L mreža generirana z 1 in τ. Definirajmo

   $$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau + 2nz)}$$

   in $\theta^x(z) = \theta\left(z - 1/2 - \tau/2 - x\right)$. Dokaži trditve:
   a) Funkcija θ konvergira enakomerno po kompaktih na $\mathbb{C}$. Zanjo veljata zvezi $\theta(z+1) = \theta(z)$ in $\theta(z+\tau) = e^{-\pi i(\tau+2z)}\theta(z)$, njena ničelna množica pa je $\mathcal{N}_\theta = \{(1/2+n) + (1/2+m)\tau;\ n, m \in \mathbb{Z}\}$.
   b) Če za točke $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ velja $\sum_{i=1}^d x_i - \sum_{i=1}^d y_i \in \mathbb{Z}$, je

   $$R(z) = \frac{\prod_{i=1}^d \theta^{x_i}(z)}{\prod_{i=1}^d \theta^{y_i}(z)} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L).$$

   c) Vsaka $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$ je oblike $f = c \cdot R$ za nek $c \in \mathbb{C}$.

   Nasvet: Pri $\mathcal{N}_\theta$ uporabi princip argumenta in Jacobijev trojni produkt: če $x, y \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$, $y \neq 0$, tedaj

   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2} y^{2n} = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^{2m})(1 + x^{2m-1}y^2)(1 + x^{2m-1}y^{-2}).$$

4. Naj bosta X_1 in X_2 afini krivulji podani z $x^2 = 3 + 10t^4 + 3t^8$ in $w^2 = z^6 - 1$, ter Z_1 in Z_2 pripadajoči hipereliptični ploskvi. Dokaži:
   a) Krivulji X_1 in X_2 sta gladki in povezani. Preslikava $F : X_1 \to X_2$, $z = (1+t^2)/(1-t^2)$, $w = 2tx/(1-t^2)^3$, je holomorfna za $t \neq \pm 1$.
   b) Preslikavo F lahko razširimo do nerazvejane holomorfne preslikave stopnje 2, ki slika iz Z_1 v Z_2.
5. Naj bo X projektivna krivulja podana z enačbo $x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$. Preveri, da je gladka. Njena stopnja je enaka $d = 3$, zato je po formuli, ki ste jo omenili na predavanjih, rod enak $g(X) = (d-1)(d-2)/2 = 1$. Dokaži to dejstvo še z orodji, ki smo jih spoznali na vajah.