Tretja domača naloga

1. Naj bo p kompleksen polinom stopnje n in V množica njegovih stacionarnih točk. Pokaži, da je $p\colon \mathbb{C}\backslash p^{-1}(p(V)) \to \mathbb{C}\backslash p(V)$ n-listen krov. Določi grupo krovnih translacij za $p(z) = z(z+1)^2$.

2. Dokaži naslednji trditvi:

   a) Holomorfna preslikava, ki slika iz $\mathbb{C}$ v hiperbolično Riemannovo ploskev, je konstantna.

   b) Naj bo $\pi : Y \to X$ univerzalni krov in $\mathrm{Deck}_\pi(Y) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (grupa je generirana z dvema komutativnima generatorjema). Pokaži, da je tedaj $Y \cong \mathbb{C}$ in zato X kompleksni torus.

3. Naj bo $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ in $L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$.

   a) Naj bo h meromorfna in L-periodična na $\mathbb{C}$. Za $p \in \mathbb{C}$ označimo z γ_p rob paralelograma z oglišči $p, p+1, p+\tau+1, p+\tau$. Denimo, da γ_p ne vsebuje ničel in polov h. Pokaži, da velja

   $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_p} z\frac{h'(z)}{h(z)}\mathrm{d}z \in L.$$

   b) Preslikava $A\colon \mathrm{Div}(\mathbb{C}/L) \to \mathbb{C}/L$ divizorju $\sum_{j=1}^k m_j\cdot(p_j+L)$ priredi točko $\sum_{j=1}^k m_j p_j + L$. Pokaži, da je D je glavni natanko tedaj, ko je $\deg(D) = 0$ in $A(D) = L$.

4. Poišči kompaktno Riemannovo ploskev X in točke $p_j \in X$, da bo divizor $K = -p_1 - p_2 + 3p_3 + 3p_4$ kanoničen.

5. Naj bo X hipereliptična ploskev podana z $y^2 = h(x)$, kjer je h polinom stopnje $2g+2$ z enostavnimi ničlami in $h(0) \neq 0$. Na X definiramo 1-forme $\omega_j = (x^j/y)\mathrm{d}x$, $j \in \mathbb{Z}$.

   a) Pokaži, da je ω_j holomorfna natanko tedaj, ko $j \in \{0, 1, \dots, g-1\}$.

   b) Pokaži, da forme ω_j tvorijo bazo prostora $\mathcal{O}^{(1)}(X)$.

   c) Naj bo $o_\pm = (0, \pm\sqrt{h(0)}) \in X$ in $D = (g-2)o_+ + (g-2)o_-$. Pokaži, da za $g \geq 3$ obstaja nekonstanten element prostora $L(D)$.

   Opomba: Predpis za ω_j je podan na X in ne v lokalni karti.