Ime in priimek:________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

Predavalnica:______ Vrsta:____ Sedež:____

2. izpit iz Teorije mere (P)

21. april 2011

(1) Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in f nenegativna merljiva funkcija. Naj bo $E = \{x \in E : \ f(x) < 1\}$. Izračunaj

$$\lim_{n\to\infty} \int_E e^{-f^n} d\mu.$$

(2) Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-končen merljiv prostor in f taka funkcija na X, da je za vsako množico E s končno mero funkcija $f\chi_E$ merljiva. Dokaži, da je f merljiva funkcija.

(3) S pomočjo dvojnega integrala funkcije $f(x, y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$ izračunaj integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

(4) Naj bo realna $\mathbb{R}$ os opremljena z Borelovo σ-algebro $\mathcal{B}$. Ali na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ obstaja taka kompleksna mera μ, da za vsako iracionalno število x velja $\mu((-\infty, x)) \neq \mu((-\infty, x])$? Odgovor dobro utemelji!