1	
2	
3	
4	
Σ	

Teorija mere: 2. izpit

25. 4. 2013

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Sedež (3.07)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga

Naj bo X neprazna množica, $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ pa neprazni podmnožici potenčne množice $\mathcal{P}(X)$.

a) Dokaži, da velja $\sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \sigma(\sigma(\mathcal{F}) \cup \sigma(\mathcal{G}))$.

b) Ali velja $\sigma(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{F}) \cap \sigma(\mathcal{G})$?

2. naloga

Naj bo f nenegativna merljiva funkcija na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$ s pozitivno mero. Definirajmo zaporedji funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z naslednjima predpisoma.

$$f_n(x) = \max\{f(x), n\} \qquad \text{in} \qquad g_n(x) = \min\{f(x), n\} \qquad\qquad (x \in X, n \in \mathbb{N}).$$

Izračunaj

$$L_1 := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \qquad \text{in} \qquad L_2 := \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu.$$

Ali je lahko $L_2 = \infty$? Kaj pa v primeru $f \in L^1(X, \mu)$?

3. naloga

Naj bosta μ_1 in μ_2 vzajemno singularni kompleksni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$. Dokaži, da veljajo naslednje enakosti.

$$||\mu_1| - |\mu_2|| = |\mu_1 + \mu_2| = |\mu_1 - \mu_2| = |\mu_1| + |\mu_2|$$

4. naloga

Naj bo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje nenegativnih števil, zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pa naj bo element prostora l^1. Definirajmo kompleksno mero ν in pozitivno mero μ na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ s predpisoma

$$\mu(E) = \sum_{n\in E} a_n \qquad \text{in} \qquad \nu(E) = \sum_{n\in E} b_n.$$

a) Določi Lebesgueovo dekompozicijo mere ν glede na mero μ. Zakaj ta dekompozicija obstaja?

b) Določi $\frac{d\nu_a}{d\mu}$.