IZPIT iz TEORIJE MERE

27. avgust 2007

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{4}\frac{n^2\sin\frac{x}{n}}{(n-1)x^2+nx}dx.$$

2. [20] S pomočjo razvoja v vrsto izračunaj integral
$$\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx.$$
Upoštevaj, da je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

3. [20] Naj bo (X,μ) merljiv prostor, $\mu(X)=1$ in $1<p<\infty$. Naj bo $\mathcal{A}_p$ družina funkcij iz $L^1(\mu)$, za katere je $||f||_1=1$ in $||f||_p=2$. Za vsak ε, $0<\varepsilon<1$, definiraj množico $B_f=\{x\in X; |f(x)|>\varepsilon\}$.
   (a) Pokaži, da je $\displaystyle\int_{B_f}|f|d\mu\geq 1-\varepsilon$.
   (b) Pokaži, da obstaja $\delta_p>0$, da je $\mu(B_f)\geq\delta_p$ za vsak $f\in\mathcal{A}_p$.

4. [15] Normiran prostor $L^\infty(\mu)$:
   (a) Kako je definirana L^∞-norma $\|f\|_\infty$ merljive funkcije $f:X\to\mathbb{C}$?
   (b) Pokaži, da je $|f(x)|\leq\|f\|_\infty$ skoraj za vsak $x\in X$.
   (c) Katere lastnosti norme veljajo za L^∞-normo in katera v splošnem ne velja? Dokaži vse lastnosti, ki veljajo.
   (d) Na kakšen način vseeno dobimo normiran prostor $L^\infty(\mu)$?

5. [15] Konvergence zaporedij merljivih funkcij:

   Naj bo μ pozitivna mera na X, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih merljivih funkcij na X in f kompleksna merljiva funkcija na X.
   (a) Kdaj $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoraj povsod proti f in kdaj skoraj enakomerno?
   (b) Katera od teh dveh konvergenc implicira drugo? Trditev tudi dokaži. S primerom pokaži, da obratna implikacija v splošnem ne velja.
   (c) Brez dokaza navedi izrek Jegorova.