# IZPIT iz TEORIJE MERE

29. avgust 2008

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Izračunaj limito

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{(nx+1)\ \sin\frac{x}{n}}{x^2+x}\, dx.$$

2. [20] Naj bo $a > 0$. S pomočjo dvojnega integrala funkcije

$$f(x,y) = y\sin(xy)$$

po primerno izbranem območju izračunaj integral

$$\int_0^1 \frac{\sin(ax) - ax\cos(ax)}{x^2} dx.$$

3. [20] Naj bosta $\mu$ in $\nu$ pozitivni končni meri na prostoru $(X, \mathcal{M})$, za kateri velja $\nu \ll \mu$ in $\nu \neq 0$. Pokaži, da obstajata merljiva množica $E$ in število $n$, da je $\nu(E) > 0$ in za vsako merljivo množico $A \subseteq E$ velja

$$\frac{1}{n}\mu(A) \leq \nu(A) \leq n\mu(A).$$

4. [15] Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci (LMK):

   (a) Formuliraj izrek! Izreka ni potrebno dokazati.

   (b) Kaj dobimo iz izreka v posebnem primeru, ko je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje karakterističnih funkcij merljivih množic?

   (c) Naj bo $\mu$ pozitivna mera na $X$, $g \in L^1(X,\mu)$ nenegativna funkcija in naj za zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ realnih merljivih funkcij na $X$ velja

   $$-g(x) \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots$$

   za vsak $x \in X$. Dokaži enakost

   $$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu,$$

   kjer je funkcija $f$ limita po točkah, torej $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ za vsak $x \in X$.

5. [15] Izrek o povprečjih in njegova uporaba:

   (a) Formuliraj izrek o povprečjih! Izreka ni potrebno dokazati.

   (b) Zakaj obstaja Radon-Nikodymov odvod $h$ kompleksne mere $\mu$ po njeni totalni variaciji $|\mu|$? Kaj velja za funkcijo $h$? Navedi izrek in dokaži samo tisto lastnost funkcije $|h|$, kjer se uporabi izrek o povprečjih.