IZPIT IZ TEORIJE MERE

28. 8. 2009

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Naj bo $a > 0$ realno število. Z integriranjem funkcije

   $$f(x, y) = e^{-axy} \sin x$$

   po ustreznem območju pokaži, da velja

   $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \arctan(a).$$

2. [20] Izračunaj limito

   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{e^{-n}} n\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n dx.$$

   Utemelji vse korake.

3. [20] Naj bo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in $f : X \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija. Naj bo $f \in L^1(\mu)$, poleg tega pa naj velja $f - 1 \in L^p(\mu)$ za neko število $p \in [1, \infty)$. Pokaži, da je mera μ končna, tj. $\mu(X) < \infty$.

   Namig: Oglej si množici $\{x \in X : f(x) \geq 1/2\}$ in $\{x \in X : f(x) < 1/2\}$.

4. [15] Konvergence zaporedij merljivih funkcij:

   Naj bo μ pozitivna mera na X, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih merljivih funkcij na X in f kompleksna merljiva funkcija na X.

   (a) Kdaj $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoraj povsod proti f in kdaj skoraj enakomerno?

   (b) Katera od teh dveh konvergenc implicira drugo? Trditev tudi dokaži. S primerom pokaži, da obratna implikacija v splošnem ne velja.

   (c) Brez dokaza navedi izrek Jegorova.

5. [15] Jensenova neenakost:

   (a) Kdaj pravimo, da je realna funkcija φ na (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ konveksna? Definicijo konveksnosti prikaži tudi grafično! Kako s pomočjo odvodov za neskončnokrat odvedljivo funkcijo φ ugotovimo, ali je konveksna?

   (b) Formuliraj izrek o Jensenovi neenakosti! Izreka ni potrebno dokazati.

   (c) Zapiši Jensenovo neenakost v primeru, ko je $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$ in $\mu(\{p_j\}) = \frac{1}{n}$ za vsak $j = 1, \ldots, n$.