Okrajšane rešitve računskega dela (izpit 28.8.2009)

(1)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}dx = \int_0^\infty dx \int_1^\infty ae^{-axy}\sin x dy \stackrel{(*)}{=} \int_1^\infty dy \int_0^\infty ae^{-axy}\sin x dx = (**)$$

S pomočjo dvojnega per-partesa ugotovimo, da velja

$$\int_0^\infty ae^{-axy}\sin x dx = \frac{a}{1+a^2y^2}.$$

Zato lahko s preprostim računom preverimo, da je

$$(**) = \frac{\pi}{2} - \arctan(a).$$

Utemeljiti moramo še zamenjavo vrstnega reda integriranja v enačaju $\stackrel{(*)}{=}$.
Če označimo $D := [0,\infty)\times[1,\infty)$, potem velja

$$\begin{aligned}\iint_D |ae^{-axy}\sin x|dxdy &\stackrel{(F+)}{=} \int_0^\infty dx \int_1^\infty |ae^{-axy}\sin x|dy \\ &= \int_0^\infty dx \int_1^\infty \Big|axe^{-axy}\frac{\sin x}{x}\Big|dy \\ &\leq \int_0^\infty dx \int_1^\infty axe^{-axy}dy \\ &= \ldots = \frac{1}{a} < \infty.\end{aligned}$$

Zato lahko uporabimo Fubinijev izrek. Pri tem smo v enačaju $\stackrel{(F+)}{=}$ uporabili Fubinijev izrek za nenegativne funkcije.

(2) Nalogo lahko rešimo na veliko načinov:

- Integrand (tj. polinom) direktno integriramo, nato pa izračunamo limito.

- Iskana limita bo zagotovo nenegativna, saj je integrand nenegativen. Po drugi strani pa za $0 \leq x \leq 1$ velja ocena

  $$n\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \leq ne^x \leq ne.$$

  Zato je

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\int_0^{e^{-n}} n\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n dx \leq \lim_{n\to\infty}\int_0^{e^{-n}} nedx = \lim_{n\to\infty} ne\cdot e^{-n} = 0.$$

- Lahko rešujemo tudi po "standardni" poti:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{e^{-n}} n\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 n\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \chi_{[0,e^{-n}]}(x)dx \\ &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} n\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \chi_{[0,e^{-n}]}(x)dx = \int_0^1 0dx = 0.\end{aligned}$$

Seveda je v tem primeru potrebno utemeljiti zamenenjavo limite in integrala: za $0 < x \leq e^{-n}$ velja $n \leq -\ln x$, posledično pa je

$$n\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,e^{-n}]}(x) \leq -\ln x \cdot e^x \leq -e \ln x.$$

Ker je $-e \ln x \in L^1([0,1])$ (slednje preverimo z integrirajem per-partes), lahko uporabimo LDK.

(3) Označimo $A = \{x \in X : f(x) \geq 1/2\}$ in $B = \{x \in X : f(x) < 1/2\}$. Ker je $f \in L^1(\mu)$, sledi

$$\infty > \int_X |f| d\mu \geq \int_A |f| d\mu \geq \int_A \frac{1}{2} d\mu = \frac{1}{2}\mu(A).$$

Zato je $\mu(A) < \infty$.

Za $x \in B$ je $1 - f(x) > 1 - 1/2 = 1/2$. Ker je $f - 1 \in L^p(\mu)$, sledi

$$\infty > \int_X |f - 1|^p d\mu \geq \int_B |1 - f|^p d\mu \geq \int_B \frac{1}{2^p} d\mu = \frac{1}{2^p}\mu(B).$$

Zato velja tudi $\mu(B) < \infty$. Ker je $\{A, B\}$ particija prostora X, sledi $\mu(X) = \mu(A) + \mu(B) < \infty$.

Rešitve teoretičnega dela lahko poiščete v zapiskih s predavanj.