1	
2	
3	
4	
Σ	

Teorija mere: 3. izpit

19. 8. 2013

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Sedež (3.06)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga

Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor s tako pozitivno mero μ, da velja $\mu(X) = 2$. Naj bosta A in B neprazni množici iz $\mathcal{A}$. Dokaži ali ovrži naslednji trditvi.

a) Če je $\mu(A), \mu(B) > 1$, potem je $A \cap B \neq \emptyset$.

b) Če je $\mu(A) = \mu(B) = 1$, potem je $A \cap B \neq \emptyset$.

2. naloga

Racionalna števila intervala $(0, 1)$ oštevilčimo z $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Definirajmo funkcijo $f : [0, 1] \to [0, \infty]$ s predpisom

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 |x - r_n|^{\frac{1}{2}}}.$$

Dokaži, da je $f(x) < \infty$ skoraj povsod.

3. naloga

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero μ. Naj bo $f : X \to [0, \infty)$ merljiva funkcija. Definirajmo množico

$$A_f = \{g \in L^1(X, \mu) : \ |g(x)| \leq f(x) \ \text{ s.p.}[\mu]\}.$$

a) Dokaži, da je A_f zaprta podmnožica v $L^1(X, \mu)$.

b) Če je A_f omejena, potem dokaži, da je $f \in L^1(X, \mu)$.

4. naloga

Naj bo interval $[0, \infty)$ opremljen z Borelovo σ-algebro $\mathcal{B}_{[0,\infty)}$ in Lebesgueovo mero m. Naj bo $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Borelovo merljiva funkcija. Definirajmo funkcijo $F : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ z $F(x, y) = f(x + y)$.

a) Dokaži, da je F merljiva glede na produktno σ-algebro $[0, \infty) \otimes [0, \infty)$ na $[0, \infty) \times [0, \infty)$.

b) Naj za funkcijo f velja $f(x + y) = f(x)f(y)$ za vse $x, y \geq 0$. Če je $f \in L^1([0, \infty), m)$, dokaži, da je $F \in L^1([0, \infty) \times [0, \infty), m \times m)$ in izrazi

$$\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} F(x, y) d(m \times m)(x, y)$$

z integralom funkcije f.