

IZPIT iz TEORIJE MERE

14. februar 2007

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(x + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} dx.$$

2. [20] S pomočjo dvojnega integrala funkcije

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 y^2}$$

po primerno izbranem območju izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

3. [20] Naj bo \mathcal{A} družina paroma disjunktne, Lebesgueovo merljive množice v \mathbb{R} s pozitivno mero. Pokaži, da je \mathcal{A} največ števna.

Namig: Definiraj zaporedje družin $\mathcal{A}_n = \{E \in \mathcal{A} : m(E \cap [-n, n]) \geq \frac{1}{n}\}$.

4. [15] Fatoujeva lema:

- Formuliraj Fatoujevo lemo!
- Dokaži lemo! Izreka o monotoni konvergenci pri tem ni potrebno dokazati.
- Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil. Izračunaj levo in desno stran v neenakosti za zaporedje funkcij $f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{\{1,2,3,\dots,n+1\}}$ ($n \in \mathbb{N}$). Vse izračune natančno utemelji!

5. [15] Produktna σ -algebra in produktna mera:

- Navedi definicije pojmov: merljiv pravokotnik, elementarna množica, produktne σ -algebra in monotoni razred!
- Kako opišemo produktno σ -algebro v družini vseh monotoni razredov? Izreka ni potrebno dokazati.
- Navedi mali Fubinijev izrek in potem definicijo produktne mere! S sliko utemelji smiselnost definicije.
- Utemelji števno aditivnost produktne mere!