# 1. Izpit iz Teorije mere (B)
7. februar 2011

1. Naj bo $f$ zvezna funkcija na intervalu $[0,1]$ in naj bo $F$ njena primitivna funkcija. Dookaži, da velja

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} nf(x)\mathrm{tg}\left(\frac{x}{n}\right)dx = F(1) - \int_0^1 F(x)dx.$$

2. Naj bo $(X,\mathcal{A},\mu)$ merljiv prostor s končno pozitivno mero in naj bo $\mathcal{F}$ neprazna množica nenegativnih merljivih funkcij na $X$. Naj obstaja taka omejena nenegativna merljiva funkcija $g$, da za vsak $f \in \mathcal{F}$ in vsak $x \in X$ velja $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Dokaži, da je funkcija

$$(\sup \mathcal{F})(x) := \sup_{f\in\mathcal{F}} f(x)$$

skoraj povsod enaka neki merljivi funkciji.

3. Naj bo $(X,\mathcal{A},\mu)$ verjetnostni prostor in $f \in L^1(\mu)$ nenegativna merljiva funkcija. Dokaži, da velja naslednja neenakost

$$e^{-\|f\|_1} \leq \int_X e^{-f(x)}d\mu(x).$$

4. Naj bo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih števil. Za poljubno podmnožico $E \subseteq \mathbb{N}$ definiramo

$$\lambda(E) = \sum_{n\in E} a_n.$$

   (a) Določi potreben in zadosten pogoj, da je $\lambda$ realna mera na $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

   (b) Določi kak Hahnov razcep mere v primeru, ko je $\lambda$ realna mera.

   (c) Kdaj je Hahnov razcep enolično določen?