

1. Izpit iz Teorije mere (P)

7. februar 2011

1. Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[0, 1]$ in naj bo F njena primitivna funkcija.

Dokaži, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 n f(x) \operatorname{tg} \left(\frac{x}{n} \right) dx = F(1) - \int_0^1 F(x) dx.$$

2. Naj bo (X, \mathcal{A}, μ) σ -končen merljiv prostor in naj bo $f : X \rightarrow [0, \infty]$ taka merljiva funkcija, da za poljubno podmnožico $E \subseteq X$ s končno mero velja

$$\int_E f d\mu = 0.$$

Dokaži, da je $f = 0$ skoraj povsod glede na mero μ .

3. Naj bo (X, \mathcal{A}, μ) verjetnostni prostor in $f \in L^1(\mu)$ nenegativna merljiva funkcija.

Dokaži, da velja naslednja neenakost

$$e^{-\|f\|_1} \leq \int_X e^{-f(x)} d\mu(x).$$

4. Naj bo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih števil. Za poljubno podmnožico $E \subseteq \mathbb{N}$ definiramo

$$\lambda(E) = \sum_{n \in E} a_n.$$

(a) Določi potreben in zadosten pogoj, da je λ realna mera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

(b) Določi kak Hahnov razcep mere v primeru, ko je λ realna mera.

(c) Kdaj je Hahnov razcep enolično določen?