1. izpit iz Teorije mere

22. februar 2012

1. Naj bosta μ_1 in μ_2 končni pozitivni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$. Dokaži, da predpis

$$\lambda(A) = \sup\{\mu_1(B) + \mu_2(A \backslash B) : \; B \subseteq A, \, B \in \mathcal{A}\}$$

definira končno pozitivno mero na $(X, \mathcal{A})$. Če za končno pozitivno mero ν na $(X, \mathcal{A})$ velja $\nu \geq \mu_1, \mu_2$, dokaži, da velja $\nu \geq \lambda$.

2. Naj bo realna os $\mathbb{R}$ opremljena z Lebesgueovo mero m. Naj bo K neprazna kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}$. Dokaži naslednji trditvi:

   (a) $m(K) < \infty$.

   (b) Če je $0 < \lambda < m(K)$, potem obstaja taka kompaktna podmnožica L v K, da je $m(L) = \lambda$.

3. Izračunaj

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{\operatorname{arctg}(n/x)}{1 + x^2} e^{-\frac{x^2}{n}} \, dx.$$

4. Naj bo μ σ-končna pozitivna mera in λ kompleksna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$. Naj bo λ absolutno zvezna glede na μ. Če je $\frac{d\lambda}{d\mu} = f$, dokaži, da velja $\frac{d|\lambda|}{d\mu} = |f|$.