1	
2	
3	
4	
Σ	

Teorija mere: 1. izpit

5. 2. 2014

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Sedež (2.04)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{F}$ podmnožica potenčne množice množice X. Naj bo $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ in

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \cup \{A^c : \ A \in \mathcal{F}_0\}.$$

Množico $\mathcal{F}_2$ definirajmo kot družino vseh končnih presekov množic iz $\mathcal{F}_1$, množico $\mathcal{F}_3$ pa definirajmo kot družino vseh končnih unij množic iz $\mathcal{F}_2$. Dokaži, da je $\mathcal{F}_3$ enaka algebri, generirani z $\mathcal{F}$.

2. naloga (25 točk)

Definirajmo zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na naslednji način:

$$f_1 = \chi_{[0,1]}, \quad f_2 = \sqrt{2}\chi_{[0,\frac{1}{2}]}, \quad f_3 = \sqrt{2}\chi_{[\frac{1}{2},1]}$$

in za $n > 1$

$$f_{2^n+k} = 2^{\frac{n}{2}}\chi_{[\frac{k}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^{n+1}}]} : \qquad k = 0, \dots, 2^n - 1.$$

a) Ali zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoraj povsod proti kaki merljivi funkciji na $[0, 1]$ glede na Lebesgueovo mero?

b) Ali zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po meri proti kaki merljivi funkciji na $[0, 1]$ glede na Lebesgueovo mero?

c) Ali obstaja

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n dm?$$

V primeru, da obstaja, jo izračunaj.

Vse odgovore dobro utemelji!

3. naloga (25 točk)

Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R}, m)$. Dokaži, da obe limiti

$$\lim_{t\to\infty} \int_{(t,\infty)} f dm \qquad \text{in} \qquad \lim_{t\to\infty} \int_{(-\infty,t)} f dm$$

obstajata in ju izračunaj. Za poljuben $t \in \mathbb{R}$ izračunaj

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+t) dm(x).$$

Vse odgovore dobro utemelji.

4. naloga (25 točk)

Naj bo λ taka kompleksna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$, da je $|\lambda|(X) = \lambda(X)$. Dokaži, da je λ pozitivna mera.