IZPIT iz TEORIJE MERE

22. junij 2005

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Naj bo $1 \leq p < \infty$. Naj za funkcijo $g \in L^p[0,1]$ velja $g(x) \geq 1$ za vsak $x \in [0,1]$. Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\frac{n+x}{n(x+1) - \frac{1}{2}} \right)^{1-\frac{1}{p}} g(x)^{\frac{1}{n}} dx.$$
2. [20] Naj bo $0 < a < b$. S pomočjo dvojnega integrala funkcije
$$f(x,y) = ye^{xy}$$
po primerno izbranem območju izračunaj integral
$$\int_a^b \frac{x-1}{x^2}\, e^x dx.$$
3. [20] Naj bo X množica, katere moč je večja od moči množice naravnih števil. Naj bo σ-algebra $\mathcal{M}$ družina vseh podmnožic E množice X z lastnostjo, da je vsaj ena od množic E in E^c največ števna. Pokaži, da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ merljiva natanko takrat, kadar je f konstantna na komplementu množice, ki je končna ali števna.
4. [15] Fatoujeva lema:
   (a) Formuliraj Fatoujevo lemo!
   (b) Dokaži lemo! Izreka o monotoni konvergenci pri tem ni potrebno dokazati.
   (c) Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil. Izračunaj levo in desno stran v neenakosti za zaporedje funkcij $f_n = \chi_{\{n\}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Vse izračune natančno utemelji!
5. [15] Produktna σ-algebra in produktna mera:
   (a) Navedi definicije naslednjih pojmov: merljiv pravokotnik, elementarna množica, produktna σ-algebra in monotoni razred!
   (b) Kako opišemo produktno σ-algebro v družini vseh monotonih razredov? Izreka ni potrebno dokazati.
   (c) Navedi mali Fubinijev izrek in potem definicijo produktne mere! S sliko utemelji smiselnost definicije.
   (d) Ali je produktna mera σ-končna? Odgovor utemelji.