IZPIT iz TEORIJE MERE

23. junij 2006

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{2}{n}}^{1}\frac{n^2\sin\frac{x}{n}}{nx-1}dx.$$
2. [20] S pomočjo dvojnega integrala funkcije
$$f(x,y)=y\sin(xy)$$
po primerno izbranem območju izračunaj integral
$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{x^2}(\sin x-x\cos x)dx.$$
3. [20] Naj bo $1<p<\infty$ in $\{f_n\}$ omejeno zaporedje v prostoru $L^p(X,\mu)$, tj. obstaja tako število M, da je $||f_n||_p\le M$ za vsak n.
   (a) Pokaži, da je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{f_n}{n}\right)^p\in L^1(X,\mu)$.
   (b) Pokaži, da zaporedje $\{\frac{f_n}{n}\}$ konvergira k 0 skoraj povsod.
4. [15] Fatoujeva lema:
   (a) Formuliraj Fatoujevo lemo!
   (b) Dokaži lemo! Izreka o monotoni konvergenci pri tem ni potrebno dokazati.
   (c) Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil. Izračunaj levo in desno stran v neenakosti za zaporedje funkcij $f_n=\frac{1}{n}\cdot\chi_{\{1,2,3,\dots,2n\}}$ $(n\in\mathbb{N})$. Vse izračune natančno utemelji!
5. [15] Jensenova neenakost:
   (a) Kdaj pravimo, da je realna funkcija φ na (a,b) $(-\infty\le a<b\le\infty)$ konveksna? Definicijo konveksnosti prikaži tudi grafično! Kako za neskončnokrat odvedljivo funkcijo φ najlažje ugotovimo, ali je konveksna?
   (b) Formuliraj izrek o Jensenovi neenakosti! Izreka ni potrebno dokazati.
   (c) Z uporabo izreka izpelji neenakost med aritmetično in geometrično sredino pozitivnih števil x_1, x_2, …, x_n.