IZPIT iz TEORIJE MERE

15. junij 2007

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^2}dx.$$

2. [20] Naj bo $a < 0 < b$. S pomočjo dvojnega integrala funkcije
$$f(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2}$$
po primerno izbranem območju izračunaj integral
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1+b^2x^2}{1+a^2x^2}\right)dx.$$

3. [20] Naj bo μ končna mera na prostoru X in f realna merljiva funkcija na X. Pokaži, da je $f \in L^n(X,\mu)$ za vsako naravno število n in obstaja (končna) limita $\lim\limits_{n\to\infty}\|f\|_n^n$ natanko takrat, ko je $|f(x)| \leq 1$ skoraj povsod.

4. [15] Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci (LMK):
   (a) Formuliraj izrek! Izreka ni potrebno dokazati.
   (b) Katero enakost dobimo iz izreka v posebnem primeru, ko je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje karakterističnih funkcij merljivih množic?
   (c) Naj bo μ pozitivna mera na X, $g \in L^1(X,\mu)$ nenegativna funkcija in naj za zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ realnih merljivih funkcij na X velja
   $$-g(x) \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots$$
   za vsak $x \in X$. Dokaži ali (s primerom) ovrzi enakost
   $$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu,$$
   kjer je funkcija f limita zaporedja po točkah, torej $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ za $x \in X$.

5. [15] Produktna σ-algebra in produktna mera:
   (a) Navedi definicije pojmov: merljiv pravokotnik, elementarna množica, produktna σ-algebra in monotoni razred!
   (b) Kako opišemo produktno σ-algebro v družini vseh monotonih razredov? Izreka ni potrebno dokazati.
   (c) Navedi mali Fubinijev izrek in potem definicijo produktne mere! S sliko utemelji smiselnost definicije.
   (d) Utemelji števno aditivnost produktne mere!