# IZPIT iz TEORIJE MERE

13. junij 2008

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{n}{n+1}}^{2} \frac{(x+n)\, e^{\frac{x}{n}}}{nx+1}\, dx.$$

2. [20] Funkcija $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom
$$f(x,y) = ye^{-(1+x^2)y^2}.$$
S pomočjo dvojnega integrala funkcije $f$ izračunaj integral
$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

3. [20] Naj bo $\mu$ polna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{M})$. Pokaži, da je $A \subseteq X$ merliva množica natanko takrat, kadar za vsak $\varepsilon > 0$ obstajata merljivi množici $B$ in $C$, da je $B \subseteq A$, $A \setminus B \subseteq C$ in $\mu(C) < \varepsilon$.

4. [15] Konvergence zaporedij merljivih funkcij:

   Naj bo $\mu$ pozitivna mera na $X$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih merljivih funkcij na $X$ in $f$ kompleksna merljiva funkcija na $X$.

   (a) Kdaj $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoraj povsod proti $f$ in kdaj skoraj enakomerno?

   (b) Katera od teh dveh konvergenc implicira drugo? Trditev tudi dokaži. S primerom pokaži, da obratna implikacija v splošnem ne velja.

   (c) Brez dokaza navedi izrek Jegorova.

5. [15] Lebesgue-Radon-Nikodymov izrek:

   (a) Zapiši obe trditvi izreka (Lebesgueov razcep kompleksne mere in Radon-Nikodymov odvod).

   (b) Dokaži enoličnost v obeh trditvah.

   (c) Zakaj obstaja Radon-Nikodymov odvod kompleksne mere $\mu$ po njeni totalni variaciji $|\mu|$? Kaj velja zanj? Navedi izrek in ga dokaži.