IZPIT IZ TEORIJE MERE

18. junij 2009

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Naj bo $a > 0$. S pomočjo Fubinijevega izreka izračunaj integral
$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx.$$

2. [20] Za vsak $r \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}$ definiramo množico
$$K_r := \big\{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ : \ \max\{|x|,|y|\} \le r\big\}.$$
Določi najmanjšo σ-algebro $\mathcal{M}$ na $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, ki vsebuje vse množice K_r. Ali $\mathcal{M}$ vsebuje enotski krog
$$D := \big\{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ : \ x^2+y^2 \le 1\big\}?$$

3. [20] Zaporedje funkcij $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ je definirano s predpisom
$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \cdot e^{-x\sqrt{n}}.$$
   (a) Pokaži, da za vsak $x \in [0,1]$ velja
   $$\lim_{n\to\infty} \ln(f_n(x)) = -\frac{x^2}{2}.$$
   (b) Izračunaj limito
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} x f_n(x)\,dx.$$

4. [15] Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci (LDK):
   (a) Formuliraj izrek!
   (b) Dokaži izrek! Za katero zaporedje funkcij se uporabi Fatoujeva lema (ki je ni potrebno dokazati)?
   (c) Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil. Ali za zaporedje funkcij $\{\frac{1}{n}\,\chi_{\{n\}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ veljajo predpostavke izreka LDK? Ali veljajo zaključki izreka?

5. [15] Bistveni supremum:
   (a) Naj bo μ pozitivna mera na $(X,\mathcal{M})$ in $f : X \to [0,\infty]$ merljiva funkcija. Kako je definiran bistveni supremum $\operatorname{ess\,sup}(f)$?
   (b) Pokaži, da je $f(x) \le \operatorname{ess\,sup}(f)$ skoraj za vsak $x \in X$ glede na mero μ.
   (c) Naj bo $X = \mathbb{R}$ in $f = \chi_{\mathbb{Q}}$. Kaj je bistveni supremum funkcije $\chi_{\mathbb{Q}}$ glede na Lebesgueovo mero na $\mathbb{R}$? Kaj pa glede na mero štetja točk na $\mathbb{R}$?