Rešitve izpita

18. 6. 2009

(1) Ker je

$$\frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} = \frac{-e^{-yx^2}}{xe^{x^2}}\Big|_{y=0}^{a}$$

in

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-e^{-yx^2}}{xe^{x^2}}\right) = xe^{-x^2(1+y)},$$

je

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}dx = \int_0^\infty dx\int_0^a xe^{-x^2(1+y)}dy = \int_0^a dy\int_0^\infty xe^{-x^2(1+y)}dx,$$

kjer smo uporabili Fubinijev izrek za nenegativne merljive funkcije. Z uvedbo nove spremenljivke $t = x^2(1+y)$ dobimo

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{1+y}dy\int_0^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{1+y}dy = \frac{\ln(1+a)}{2}.$$

(2) Hitro opazimo, da je K_r kvadrat z oglišči $((r,r),\ (-r,r),\ (-r,-r),\ (r,-r)$, ki je "presekan" z racionalnimi koordinatami. Za vse $r \in [0,\infty)\cap\mathbb{Q}$ definiramo "kvadratnice"

$$k_r := \big\{(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\ :\ \max\{|x|,|y|\} = r\big\}.$$

Trdimo, da so vse "kvadratnice" v $\mathcal{M}$. Res, velja $k_0 = K_0 \in \mathcal{M}$, za $r \in (0,\infty)\cap\mathbb{Q}$ pa lahko izberemo tako zaporedje $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$, da velja $0 \le r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r$ in $\lim_{i\to\infty} r_i = r$. Tedaj je

$$k_r = \bigcap_{i=1}^{\infty}(K_r \backslash K_{r_i}) \in \mathcal{M}.$$

Torej upravičeno sumimo, da velja

$$\mathcal{M} = \left\{\bigcup_{r\in\Lambda} k_r : \Lambda \subseteq [0,\infty)\cap\mathbb{Q}\right\} =: \mathcal{N}.$$

Ker ležijo vse "kvadratnice" v $\mathcal{M}$ in so množice Λ v $\mathcal{N}$ kvečjemu števne, velja $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}$. Prav tako je $K_r \in \mathcal{N}$ za vsak $r\in[0,\infty)\cap\mathbb{Q}$, saj je $K_r = \bigcup_{\rho\in[0,r]\cap\mathbb{Q}} k_\rho$. Pokazati moramo torej le še, da je $\mathcal{N}$ σ-algebra na $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, kar pa sledi iz naslednjih razmislekov:

$$\emptyset = \bigcup_{r\in\emptyset} k_r \in \mathcal{N}$$

$$\bigcup_{r\in\Lambda} k_r \in \mathcal{N} \Longrightarrow \left(\bigcup_{r\in\Lambda} k_r\right)^c = \bigcup_{r\in\big([0,\infty)\cap\mathbb{Q}\big)\setminus\Lambda} k_r \in \mathcal{N}$$

$$\bigcup_{r\in\Lambda_1} k_r, \bigcup_{r\in\Lambda_2} k_r, \ldots \in \mathcal{N} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{r\in\Lambda_i} k_r = \bigcup_{r\in\bigcup_{i=1}^{\infty}\Lambda_i} k_r \in \mathcal{N}.$$

Iz zgornjega opisa σ-algebre $\mathcal{M}$ je razvidno, da ne vsebuje enotskega kroga $D = \big\{(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\ :\ x^2+y^2\leq 1\big\}$.

(3) (a) Limito

$$\lim_{n\to\infty}\ln(f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - x\sqrt{n}\right)$$

lahko izračunamo z uporabo vrste $\ln(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 - \ldots$ ali pa s pomočjo L'Hôpitalovega pravila, pri čemer je ugodno (ne pa nujno) vpeljati novo spremenljivko $u = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Tako dobimo

$$\lim_{n\to\infty}\ln(f_n(x)) = \lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+xu) - xu}{u^2} =$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\frac{x}{1+xu} - x}{2u} = \lim_{u\to 0}\frac{-x^2}{2(1+xu)} = -\frac{x^2}{2}.$$

(b) Ker je eksponentna funkcija zvezna, velja

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

po točki (a). Z zamenjavo limite in integrala tako dobimo

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\frac{1}{n}} x f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x f_n(x)\chi_{[0,1-\frac{1}{n}]}(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1 - e^{-\frac{1}{2}}.$$

Pri računanju zadnjega integrala lahko uvedemo novo spremenljivko $t = \frac{x^2}{2}$. Upravičiti moramo še zamenjavo limite in integrala. Zaradi znane neenakosti $1 + y \leq e^y$ je

$$1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \leq e^{\frac{x}{\sqrt{n}}}.$$

Ker je $x \geq 0$, od tod sledi ocena

$$\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \leq e^{x\sqrt{n}}$$

oziroma
$$f_n(x) \leq 1.$$
Zato je
$$0 \leq x f_n(x) \chi_{[0,1-\frac{1}{n}]}(x) \leq x =: g(x).$$
Ker je $\int_0^1 g(x)dx < \infty$, smo smeli uporabiti LDK. O merljivosti funkcij v integrandu seveda ni dvoma, saj so le te zvezne, ali pa so enake karakteristični funkciji merljive množice.

(4) Točki (a) in (b) najdemo v zapiskih predavanj na Spletni učilnici. Za zaporedje v točki (c) ne veljajo vse predpostavke izreka LDK, saj v prostoru L^1 ne obstaja funkcija g z lastnostjo $\frac{1}{n}\chi_{\{n\}} \leq g$ za vsak n. Za vsako tako funkcijo g mora namreč veljati $g(k) \geq \frac{1}{k}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$ in zato je
$$\int g = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$
Zlahka preverimo, da veljajo vsi zaključki izreka LDK.

(5) (a) Za merljivo funkcijo $f : X \to [0, \infty]$ definirajmo množico
$$S_f = \{t \in [0, \infty) : \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) = 0\}.$$
Če je $S_f \neq \emptyset$, definiramo $\operatorname{ess\,sup}(f) = \inf S_f$, sicer pa $\operatorname{ess\,sup}(f) = \infty$.

(b) Neenakost očitno velja, kadar je $S_f = \emptyset$ in tedaj $\operatorname{ess\,sup}(f) = \infty$. Denimo torej, da je $S_f \neq \emptyset$ in $t_0 = \operatorname{ess\,sup}(f)$. Dokazati moramo, da je $t_0 \in S_f$, saj je potem $f(x) \leq t_0$ skoraj za vsak $x \in X$ glede na mero μ. Ker je $t_0 + \frac{1}{n} \in S_f$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je množica
$$\{x \in X : f(x) > t_0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : f(x) > t_0 + \frac{1}{n}\right\}$$
števna unija ničelnih množic, zato je njena mera tudi enaka 0, torej je $t_0 \in S_f$.

(c) V primeru Lebesgueove mere je $S_f = [0, \infty)$ in zato $\operatorname{ess\,sup}(f) = 0$, v primeru mere štetja točk pa je $S_f = [1, \infty)$ in zato $\operatorname{ess\,sup}(f) = 1$.