Ime in priimek: ________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

Predavalnica: ______ Vrsta: ____ Sedež: ____

2. izpit iz Teorije mere

29. maj 2012

1. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Če realni funkciji $f, g : X \to \mathbb{R}$ zadoščata zvezi $e^{f(x)} = g(x)$ za vsak $x \in X$, dokaži, da je f merljiva natanko takrat, ko je g merljiva.

2. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-končen merljiv prostor. Skonstruiraj nenegativno merljivo funkcijo f na X, ki ima naslednji lastnosti:

(a) $f(x) > 0$ povsod na X.

(b) $f^p \in L^1(X, \mathcal{A})$ za vse $1 \leq p < \infty$.

3. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij iz $L^1(X, \mu)$, ki konvergira enakomerno proti funkciji f.

(a) Če je $\mu(X) < \infty$, dokaži, da je $f \in L^1(X, \mu)$ in velja

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

(b) Ali trditev iz točke (a) velja tudi v primeru, ko mera prostora X ni končna?

4. S pomočjo Fubinijevega izreka izpelji zvezo

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$