IZPIT iz TEORIJE MERE

1. marec 2006

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{(n+x)}{\sqrt{n^2x+1}}\,e^{-\frac{x}{n}}dx.$$
2. [20] S pomočjo dvojnega integrala funkcije
$$f(x,y)=\frac{1}{(y+1)(y+x)}$$
po primerno izbranem območju izračunaj integral
$$\int_0^1\frac{2\ln(1+x)-\ln(4x)}{1-x}\,dx.$$
3. [20] Naj bo (X,μ) σ-končen merljiv prostor. Naj bo $f : X \to [0,\infty)$ merljiva funkcija in a tako število, da je
$$\int_E f d\mu \le a\mu(E)$$
za vsako množico E s končno mero. Pokaži, da je tedaj $f(x)\le a$ skoraj povsod.
4. [15] Fatoujeva lema:
   (a) Formuliraj Fatoujevo lemo!
   (b) Dokaži lemo! Izreka o monotoni konvergenci pri tem ni potrebno dokazati.
   (c) Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil. Izračunaj levo in desno stran v neenakosti za zaporedje funkcij $f_n = \frac{1}{n}\cdot\chi_{\{1,2,\ldots,n\}}$ $(n\in\mathbb{N})$. Vse izračune natančno utemelji!
5. [15] Kompleksne mere:
   (a) Kako je definirana totalna variacija $|\mu|$ kompleksne mere μ? Kakšne lastnosti ima? Napiši in dokaži temeljno neenakost med merama $|\mu|$ in μ.
   (b) Kako definiramo normo na vektorskem prostoru vseh kompleksnih mer na dani σ-algebri $\mathcal{M}$? Dokaži, da ima vse lastnosti norme.
   (c) Kateremu znanemu normiranemu prostoru je izometrično izomorfen normiran prostor vseh kompleksnih mer na potenčni množici $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ množice naravnih števil? Odgovor utemelji!