IZPIT iz TEORIJE MERE

25. marec 2008

Reši naslednje 3 naloge in odgovori na 2 teoretični vprašanji. Izpit traja največ 3 ure. Uporaba zapiskov, priročnika in druge literature ni dovoljena. Ker je bilo z domačo nalogo mogoče doseči 10 točk, je maksimalno število točk na izpitu enako 90 točk, ki so po nalogah razdeljene, kot je navedeno v oglatih oklepajih.

1. [20] Izračunaj limito

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{n+1}{nx^2+n+1}\, e^{-\frac{x}{n}}\, dx.$$

2. [20] Izračunaj integral

$$\int_1^\infty dx \int_x^\infty \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\, dy.$$

3. [20] Naj bosta f in g realni funkciji iz $L^3(X,\mu)$, za kateri velja

$$\|f\|_3 = \|g\|_3 = \int_X f^2 g\, d\mu = 1.$$

   (a) Pokaži, da sta $|f|$ in $|g|$ enaki skoraj povsod. Pri tem upoštevaj, da je $\int_X |uv| d\mu = \|u\|_p \|v\|_q$ natanko takrat, ko obstajata konstanti C_1 in C_2, da je $C_1|u|^p = C_2|v|^q$.

   (b) Preveri enakost

$$\int_X f^2|g| d\mu = \int_X f^2 g d\mu$$

   in z njeno pomočjo dokaži, da je $|f| = g$ skoraj povsod.

4. [15] Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci (LDK):

   (a) Formuliraj izrek!

   (b) Dokaži izrek! Za katero zaporedje funkcij se uporabi Fatoujeva lema (ki je ni potrebno dokazati)?

   (c) Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil. Ali za zaporedje funkcij

$$f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{\{1,2,\ldots,n\}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

   veljajo predpostavke izreka LDK? Ali veljajo zaključki izreka?

5. [15] Jensenova neenakost:

   (a) Kdaj pravimo, da je realna funkcija φ na (a,b) $(-\infty \le a < b \le \infty)$ konveksna? Definicijo konveksnosti prikaži tudi grafično! Kako za neskončnokrat odvedljivo funkcijo φ najlažje ugotovimo, ali je konveksna?

   (b) Formuliraj izrek o Jensenovi neenakosti! Izreka ni potrebno dokazati.

   (c) Z uporabo izreka izpelji neenakost med aritmetično in geometrično sredino pozitivnih števil x_1, x_2, $\ldots$, x_n.